18498

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik.

In zwanglosen Heften.

GENERAL LIBRARY University of MICHIGAN

Herausgegeben

von

A. L. Crelle.

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich-Preufsischer Behörden.

KÖN. PR. REGIERUNG ZU POTSDAM

Vierter Band,

In 4 Heften.

Mit 3 Kupfertafeln.

Berlin,

bei G. Reimer.

1829.

BERKELEY LIBRARY

Inhaltsverzeichnifs
des vierten Bandes, nach den Gegenständen.

I. Reine Mathematik.

1. Analysis.

Nr. der Abhandlung		Heft	Seite
3.	Note sur quelques formules elliptiques. Par Mr. *N. H. Abel.* . .	I.	85
4.	Note sur les intégrales définies. Par Mr. *Lejeune-Dirichlet*, prof. de math.	I.	94
5.	Auflösung einer analytischen Aufgabe. (In Folge der Aufgabe 7. S. 99. des dritten Bandes dieses Journals.) Von Herrn *Th. Clausen* zu Altona.	I.	99
8.	Mémoire sur une classe particulière d'équations résolubles algébriquement. Par Mr. *N. H. Abel.*	II.	131
9.	Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données. Par Mr. *Lejeune-Dirichlet*, prof. de mathém.	II.	157
10.	Über die Convergenz einer nach den Sinussen und Cosinussen der Vielfachen eines Winkels fortschreitenden Reihe. Vom Herrn Prof. *Dirksen* zu Berlin.	II.	170
12.	Suite des notices sur les fonctions elliptiques. Par Mr. *C. G. J. Jacobi*, prof. de math. à Königsberg.	II.	185
13.	Théorèmes sur les fonctions elliptiques. Par Mr. *N. H. Abel.* . .	II.	194
14.	Démonstration d'une propriété générale d'une certaine classe de fonctions transcendentes. Par Mr. *N. H. Abel.*	II.	200
17.	Über die bei verschiedenen Völkern üblichen Systeme von Zahlzeichen und über den Ursprung des Stellenwerthes in den indischen Zahlen. (Vorgelesen in einer Klassen-Sitzung der Königl. Academie der Wissenschaften zu Berlin, den 2. März 1829.) Von Sr. Excellenz dem Königl. wirkl. Geheimen-Rathe, Herrn Freiherrn *Alex. von Humboldt.*	III.	205
19.	Précis d'une théorie des fonctions elliptiques. Par Mr. *N. H. Abel* de Christiania.	III.	236
20.	Beweise verschiedener Sätze. Von Herrn *Th. Clausen* zu Altona. .	III.	278
21.	Summirung verschiedener nach den Sinussen oder Cosinussen vielfacher Bogen fortgehender Reihen. Von Herrn *Th. Clausen* zu Altona. .	III.	281
22.	Über die Potenzial-Functionen. Von Hrn. Prof. *C. Gudermann* zu Cleve.	III.	287
24.	Über einen allgemeinen, die Bernoullischen Zahlen und die Coëfficienten der Secantenreihe zugleich darstellenden Ausdruck. Von Herrn Prof. *H. F. Scherk* zu Halle.	III.	299
25.	Démonstration nouvelle du théorème du binome. Par l'Editeur. .	III.	305
26.	Précis d'une théorie des fonctions elliptiques. (Suite du mémoire 19. cah. dern.) Par Mr. *N. H. Abel* de Christiania.	IV.	309
28.	De functionibus ellipticis commentatio. Auct. *C. G. J. Jacobi*, prof. math. ord. Regiom.	IV.	371

2. Geometrie.

1.	Mémoire sur la théorie générale des polaires réciproques; pour faire suite au „Mémoire sur les centres de moyennes harmoniques." Lu a l'académie royale des sciences de Paris, le 12. avril 1824, et approuvé le 18. février 1828, par une commission composée de MM. Legendre Poinsot et Cauchy, rapporteur. Par Mr. *J. V. Poncelet*, Capitaine au corps royal du Génie.	I.	1

Abhandlung		Heft	Seite
7.	Von den metrischen Relationen im Gebiete der Lineal-Geometrie. Vom Herrn Prof. *Möbius* zu Leipzig.	II.	101
23.	Von der Zerlegung symmetrischer Polyëder. In Folge des Lehrsatzes S. 100., 4ter Band dieses Journals. Von Herrn *M*.....	III.	296
27.	Über die allgemeinen Gesetze, nach welchen irgend zwei Flächen einen Contact der verschiedenen Ordnungen haben. Von Herrn Prof. *Plücker* zu Bonn.	IV.	349
29.	Auflösung einer geometrischen Aufgabe. Von Herrn *Th. Clausen* zu München.	IV.	391
30.	Ein geometrischer Beweis, dafs wenn R und r die Halbmesser der in und um ein Dreieck beschriebenen Kreise bedeuten und D die Entfernung der Mittelpuncte dieser Kreise von einander bezeichnet, $D^2 = R^2 - 2Rr$, ist. Von dem Herrn Prof. *Unger* zu Erfurt.	IV.	395

3. Mechanik.

11.	Beweis eines neuen, von Herrn Chasles in der Statik entdeckten Satzes, nebst einigen Zusätzen. Vom Hrn. Prof. *A. F. Möbius* zu Leipzig.	II.	179
18.	Über ein neues allgemeines Grundgesetz der Mechanik. Vom Herrn Hofrath und Prof. Dr. *Gaufs* zu Göttingen.	III.	232

II. Angewandte Mathematik.

2.	Beobachtungen über die Schwere, welche in den Häfen von Europa, America und Asien, auf dem stillen Meere und in Neuholland, während Malaspina's Weltumsegelung, mit dem unveränderlichen Pendel angestellt worden sind. Mitgetheilt vom Herrn Prof. *Oltmanns* zu Berlin.	I.	72
15.	Über die Theorie der Schraube. Vom Herrn Prof. Dr. *Lehmus* zu Berlin.	II.	202

Aufgaben und Lehrsätze.

6.	Lehrsatz (zu beweisen). Vom Herrn Prof. *Gudermann* zu Cleve. .	I.	100
16.	Aufgaben. (Vom Herrn Prof. *Clausen* zu München und vom Herrn *W. Horn* zu Burg.)	II.	204
31.	Aufgaben und Lehrsätze, erstere aufzulösen, letztere zu beweisen.		
	Lehrsatz, vom Herrn Prof. Dr. *Grunert* zu Brandenburg.	IV.	396
	Aufgaben von Anderen.	IV.	396

32.	Einige Nachrichten von Büchern.	IV.	400
33.	Nécrologe.	IV.	402

1.

Mémoire sur la théorie générale des polaires réciproques;

pour faire suite au Mémoire sur les centres de moyennes harmoniques *).

Lu à l'académie royale des sciences de Paris, le 12. avril 1824, et approuvé le 18. février 1828, par une commission composée de MM. Legendre, Poinsot et Cauchy, rapporteur.

(Par Mr. *J. V. Poncelet*, Capitaine au corps royal du Génie **).)

Introduction.

Dans un précédent Mémoire sur les centres de moyennes harmoniques, j'ai annoncé que la théorie des polaires réciproques était susceptible d'une extension telle, qu'au simple énoncé d'une proposition suffisamment générale de l'étendue, elle permet d'en assigner, sur le champ, une autre toute différente et toute aussi générale, à moins cependant que la proposée ne soit elle même sa réciproque, ce dont il y a des exemples. J'ai ajouté qu'à l'exception de quelques principes élémentaires, je n'avais donné jusqu'ici qu'une idée très imparfaite de cette théorie, soit dans le Traité des propriétés projectives des figures, soit dans le tome VIII. des Annales de mathématiques, n'y ayant en effet simplement qu'effleuré le cas de l'espace, et m'étant constamment borné aux relations purement descriptives des figures; enfin j'ai annoncé que cette théorie était indispensable pour établir certaines propositions qui doivent entrer dans la partie de ces recherches relatives aux courbes et aux surfaces géométriques en général. Je me propose ici de reprendre cette théorie et de lui donner toute l'étendue et tous les développemens nécessaires pour en constituer un véritable corps de doctrine, qui puisse se suffire à lui même.

*) On trouve ce dernier mémoire tome III. cah. 3. pag. 213. de ce journal.
Note du redacteur.

**) Il s'est élevé sur ce mémoire une discussion entre son Auteur et Mr. Gergonne, redacteur des annales de mathématiques à Montpellier, qu'on trouve dans le tome XVIII. de ces annales. Le redacteur du présent recueil est absolument étranger à cette discussion, et il déclare hautement qu'il n'a pas le but d'y entrer d'aucune manière par la publication du mémoire en question que son respectable auteur lui a bien voulu confier. Note du redacteur.

Vu son importance et son utilité générale dans toutes les questions et recherches géométriques, et ayant d'ailleurs le dessein de réunir, par la suite, et de faire paraitre sous un même tître les différens Mémoires de Géométrie que je me propose de rédiger successivement, je n'ai pas dû craindre de revenir sur le petit nombre des principes déja exposés dans les ouvrages cités précédemment, et de m'appésantir sur ceux qui ne seraient point encore connus ou qui pourraient présenter quelques difficultés à être saisis par le grand nombre des lecteurs; j'ai même fait suivre chaque théorie particulière de plusieurs exemples qui, bien que des conséquences fort simples de ces théories, n'en sont pas moins très propres à les éclairer et à en montrer l'esprit et la fécondité; j'ose donc espérer que l'académie ne jugera pas trop sévérement le résultat de mon nouveau travail, et qu'elle voudra bien excuser des détails et des développemens nécessités par la nature du sujet et par le but particulier que je cherche à atteindre.

Pour donner une idée tant soit peu générale de l'objet que je me propose et des principes qui m'ont dirigé, il est nécessaire de rappeler que le pôle et la polaire d'une section conique, ne sont autre chose que le sommet de l'angle circonscrit à une telle courbe, et la direction indéfinie de la corde de contact des côtés de cet angle; tandis que, pour la surface du second ordre, le pôle et le plan polaire se confondent respectivement avec le sommet du cône circonscrit à cette surface et avec le plan indéfini du contact de ce cône.

Cela posé, considérons d'abord une figure quelconque sur le plan d'une section conique prise pour auxiliaire: on démontre aisément que, si un certain point se meut sur une ligne droite de la figure donnée, la polaire de ce point pivote sur la pôle de cette droite, et réciproquement; or de là on conclut plus généralement que, si ce même point est assujetti à décrire une courbe quelconque, sa polaire en enveloppera une autre ayant, à son tour, la première pour enveloppe des polaires de ses différens points; de sorte qu'on peut dire de ces deux courbes, qu'elles sont polaires réciproques à l'égard de la section conique auxiliaire. Substituant donc ainsi à chaque point, chaque droite, chaque courbe de la figure proposée, la droite, le pôle et la courbe qui leur appartiennent, on formera une nouvelle figure qui, elle-même, pourra s'appeler la polaire réciproque de la première, et sera tellement liée avec elle que, d'a-

près la théorie ordinaire du pôle et de la polaire simple, les relations descriptives ou de situation de l'une, pourront se traduire immédiatement en des relations pareilles de l'autre.

C'est à montrer l'espèce de réciprocité qu'ont entre elles les deux figures dans différens cas, et relativement aux diverses positions des points et des lignes, que j'ai consacré la première partie de ce Mémoire.

Ainsi, par exemple, j'y examine l'espèce de relations que conservent entre eux deux polygones réciproques polaires sur le plan d'une section conique, et je détermine le degré et les affections générales qui appartienent aux courbes polaires qui peuvent être considérées comme les limites de ces polygones etc. Au surplus, je le répète, j'avais déjà exposé les èlémens de cette théorie dans un article inséré au tome VIII. des Annales de mathématiques, année 1818, en montrant, par quelques exemples, tout le parti qu'on en pouvait tirer pour la recherche des propriétés générales des figures, et j'y suis revenu avec plus de détails dans le Traité des propriétés projectives, dont les sections II. et III. contiennent un grand nombre d'applications très remarquables et très propres à montrer l'importance et l'utilité de ce genre de spéculations.

Pour passer du cas du plan à celui de l'espace, il suffit de substituer une surface du second ordre quelconque à la section conique auxiliaire, et de remplacer la polaire par un plan: observant ensuite, avec MM. Monge, Livet et Brianchon, que quand un point ou pôle est assujetti à demeurer sur un plan ou sur une droite donnée, le plan polaire de ce point pivote lui même sur le pôle du premier plan, ou sur une droite qu'on peut nommer la polaire de la première droite, et réciproquement, on établit aisément la définition et les principales relations descriptives des figures rectilignes et polyédrales, qui sont polaires réciproques dans l'espace, par rapport à une surface quelconque du second ordre prise pour auxiliaire: or, de là on passe immèdiatement, par la loi de continuité, aux courbes à double courbure, aux surfaces développables et aux surfaces quelconques qui sont réciproques polaires dans l'espace, et peuvent être considérées comme les limites respectives des figures rectilignes et polyédrales dont il s'agit.

MM. Livet et Brianchon avaient déjà recherché (13. cahier du Journal de l'Ecole Polytechnique), quelle était l'enveloppe des

plans polaires d'un point assujetti à demeurer constamment sur une courbe à double courbure ou sur une surface donnée, et ils avaient facilement reconnu, par l'analyse algébrique, que c'était, dans le premier cas, une surface développable qui se réduit à un cône lorsque la courbe proposée est plane, et, dans le second, une surface quelconque à deux courbures, susceptible d'être engendrée par une droite en même tems que la proposée. Mais ces habiles géomètres n'ont pas recherché quelle espèce de relations et de réciprocité ont entre-elles la figure primitive et sa dérivée; et, à l'exception du cas particulier où la surface directrice est du second ordre, ou se réduit à une section conique, ils n'ont point déterminé le degré de la surface polaire: or c'est ce que j'ai établi généralement dans la seconde partie de ce mémoire, et par les seuls principes de la géométrie rationnelle, en montrant de plus, que l'enveloppe des plans polaires d'une surface donnée est, en même tems, le lieu des pôles des plans tangens de cette surface; de sorte qu'elles jouissent de relations descriptives entièrement réciproques à l'égard de la surface du second ordre qui sert d'auxiliaire, remarque qui seule suffit pour justifier l'épithète de polaires réciproques que je leur ai appliquée.

J'examine, au surplus, les principales relations descriptives qui peuvent appartenir à la surface primitive et à sa dérivée, et je mets ainsi le lecteur en état de traduire, sur le champ, toute propriété de situation, relative à une figure quelconque donnée, en une autre essentiellement distincte et applicable à la figure qui en est la réciproque polaire. C'est ce que je démontre par l'application à plusieurs théorèmes particuliers qu'il serait, je crois, difficile d'établir de toute autre manière. Parmi ce théorèmes, je me contenterai d'indiquer ceux qui concernent l'intersection plane des nappes de développables circonscrites à deux surfaces quelconques du second degré, et le lieu de tous les autres de surfaces du même degré, qui sont tangentes à la fois à huit plans donnés quelconques etc.

Ce qui précède concerne uniquement les relations purement descriptives, et, parmi ces relations, celles qui n'ont trait qu'à la direction indéfinie des lignes et surfaces, sans égard à aucun rapport de grandeur; or j'ai consacré les trois dernières parties du mémoire à examiner quelle espèce de modifications doivent éprouver, dans le passage de la figure donnée à sa polaire réciproque, soit les relations d'angles et de

lignes trigonométriques, soit les relations métriques entre les simples distances: j'ai trouvé que, quand ces relations sont de la nature de celles que j'ai nommées ailleurs projectives, la traduction pouvait toujours avoir lieu de l'une à l'autre figure, et j'ai indiqué les moyens de l'opérer, dans tous les cas, par une substitution de mots et de lettres à la place les uns des autres, qui se réduit à une sorte de mécanisme. Ainsi, non seulement on est en état de découvrir, par la théorie des polaires réciproques, de nouvelles propriétés descriptives des figures, à l'aide des propriétés descriptives déjà connues et établies par les géomàtres, mais on peut en faire tout autant pour les relations métriques entre les angles, et pour une classe très étendue de relations pareilles entre les simples distances, puisqu'elle comprend comme cas particuliers, toutes celles de la Théorie des transversales et de la Géométrie de la règle.

Je ne dirai rien d'ailleurs des applications que j'ai faites de ces préceptes généraux à la démonstration ou à la recherche des théorêmes concernant les angles et les distances de certaines figures; je ferai seulement remarquer que, loin d'avoir épuisé le nombre des applications particulières et méme des principes, je me suis constamment attaché aux plus simples et aux plus utiles d'entre eux, me contentant fort souvent, d'en indiquer à la hâte quelques autres, comme exercices, ou parcequ'ils me paraissaient dignes de fixer l'attention des géomètres. On verra en effet que la mine est d'une richesse pour ainsi dire intarissable, et que, si l'on voulait seulement citer ou énoncer les théorêmes de géométrie qui peuvent découler da la théorie des polaires réciproques, par sa simple application aux propositions déjà connues, il faudrait y consacrer des volumes entiers et un tems considérable.

Je crois devoir prévenir, avant d'entrer en matière, que je continuerai ici l'ordre de numérotage adopté, dans mon précédent mémoire, pour les figures et les articles, de sorte que celui-ci doit en être considéré comme la suite.

Théorie générale des polaires réciproques.

La théorie des polaires réciproques se rattache, de la manière la plus intime, à celle du centre des moyennes harmoniques, dont nous avons établi les principes dans notre précédent Mémoire: c'est ce qu'on a pu voir par ce que nous en avons déjà dit dans le Tome VIII. des Annales de mathématiques, et dans le Traité des propriétés projectives des figures; mais, avant de l'exposer dans toute la généralité qui lui est propre, nous croyons nécéssaire de réunir sous un même point de vue, et de résumer en peu de mots, les différentes notions et définitions établies aux endroits cités, de manière à arriver, par une marche à la fois claire et rapide, aux nouveaux principes qui font l'objet de ce Mémoire; et, afin d'aller du simple au composé, nous commençerons par le cas facile où les objets de la figure sont situés dans un seul et même plan.

Des figures polaires réciproques dans un plan.

55. Supposons que, d'un point quelconque P (Fig. 20.) pris sur le plan d'une ligne du second ordre, on mène une suite de droites telles que AB, rencontrant respectivement la courbe en deux points A et B; puis qu'on détermine (4. et 7.), sur chacune d'elles, le centre Q des moyennes harmoniques des points A, B par rapport au pôle commun P des rayons vecteurs, pris pour origine des segmens harmoniques, tous les centres pareils seront, comme on sait, situés sur une seule et même droite ou polaire TT' que, d'après nos précédentes définitions (42.), nous pourrions aussi nommer l'axe des moyennes harmoniques de la courbe relativement à l'origine commune ou au pôle P, qui, à son tour pourrait s'appeller le centre des moyennes harmoniques de la courbe relativement à la droite dont il s'agit, prise pour axe des origines harmoniques, puisque la relation $PA:PB::QA:QB$ qui lie l'origine P au centre Q des moyennes harmoniques de chaque transversale, est réciproque entre ces points.

Pour justifier, sur le champ et a priori, ces définitions, il suffit de remarquer que chaque transversale PB, menée par le point fixe P, ne renferme qu'un seul centre Q des moyennes harmoniques, et que ce centre ne peut jamais se confondre avec le point P, quelle que soit la position de la transversale mobile; de sorte que le lieu des points Q est

nécessairement du premier degré, c'est-à-dire une ligne droite (Propriétés projectives, Sect. IV. No. 539.).

Remarquons d'ailleurs, pour compléter ce rapprochement, que la polaire TT' d'un point P n'est autre chose que la direction indéfinie de la corde, réelle ou idéale, qui joint les points de contact T, T' des tangentes à la courbe, issues de ce point, et (1.) que cette polaire s'éloigne à l'infini, ou se change en un diamètre de la section conique, selon que le pôle lui même se confond avec le centre de cette section conique, ou s'éloigne à l'infini sur son plan; de sorte que le pôle d'un diamètre est à l'infini sur le diamètre conjugué, et le pôle de toute droite à l'infini se confond avec le centre même de la courbe.

56. Cela posé, considérons quelque part sur le plan de la section conique proposée, un nouveau point quelconque p, servant de pôle aux sécantes ou transversales rectilignes ab de la courbe; à ce pôle correspondra la nouvelle polaire tt' rencontrant en Q la première, et, pour les transversales QP, Qp qui y passent, le point Q sera à la fois le centre des moyennes harmoniques des cordes AB et ab déterminées par ces transversales, et cela par rapport aux pôles respectifs P et p. Mais les points Q et P, Q et p sont réciproques entre eux d'après la relation qui les définit: donc le point Q peut, à son tour, être considéré comme le pôle de la droite Pp, puisque les points P et p suffisent pour la déterminer complétement; c'est-à-dire que cette droite est la polaire de Q par rapport à la section conique, comme la droite TT' l'est déjà relativement au point P. Or de là résulte ce théorême qui sert de base à tout ce qui va suivre:

Si un certain point P est situé sur une droite Pp tracée dans le plan d'une section conique quelconque, sa *polaire* TT' passera nécessairement par le *pôle* Q de cette droite et réciproquement.

57. Le point P étant le pôle de TT', comme le point Q est le pôle de Pp, le système du point P et de la droite Pp qui le renferme, et le système du point Q et de la droite TT', défini par le premier, devront jouir de propriétés réciproques à l'égard de la section conique auxiliaire ou directrice; c'est pourquoi on peut dire que ces systèmes sont polaires réciproques l'un de l'autre.

58. Considérons, sur le plan d'une section conique quelconque (Fig. 21.), deux droites arbitraires AB et AC se rencontrant en A; soit P le pôle de AB, et P' le pôle de AC; d'après ce qui précède, la polaire de A devra renfermer à la fois les points P et P', c'est-à-dire que PP' est cette polaire. D'un autre côté, le système du point A et de AB est réciproque de PP' et P, comme aussi le système de A et AC est réciproque de PP' et P'; donc on peut dire que le système de BAC, tout entier, est réciproque polaire de P, P' et PP'. Il est évident d'ailleurs que si, aulieu des deux droites indéfinies AB et AC et de leur point de rencontre A, nous avions considéré primitivement le système des deux points P, P' et de la droite PP' qui les renferme, nous serions arrivés aux mêmes conséquences.

Enfin on voit pareillement que „le système d'un nombre quelconque de droites AB, AC, AD, ..., situées dans le plan d'une section conique, et qui convergeraient en un même point A, aurait pour réciproque polaire un système pareil de points P, P', P'', ... rangés sur une même droite PP' polaire de A."

59. En général, un système de m droites quelconques tracées dans un plan, a pour réciproque polaire un système pareil de points en nombre égal, et les $m.\left(\frac{m-1}{2}\right)$ points d'intersection de ces droites, prises deux à deux, sont remplacés par les $m.\left(\frac{m-1}{2}\right)$ droites ou distances qui joignent aussi deux à deux leurs pôles respectifs; de telle sorte qu'il passera autant de ces distances par l'un quelconque de ces pôles, que dans la figure primitive, il y a de points d'intersection sur la polaire correspondante à ce pôle, c'est-à-dire $m-1$.

Ainsi „les m droites du premier système et leurs intersections respectives, ont pour réciproques polaires le système d'un égal nombre de points réunis, deux à deux, par les lignes droites ou distances indéfinies qui leur appartiennent; et, vice versa, ce dernier système a pour réciproque polaire le premier."

Enfin, puisque les points d'intersection des m droites de celui-ci sont les pôles respectifs des distances de l'autre, „les droites ou diagonales qui joignent ces points deux à deux, ont, à leur tour, pour réciproques polaires (58.), les intersections correspondantes de ces mêmes distances prolongées;" telle est donc l'espèce de relation graphique qui sub-

siste entre une figure plane rectiligne et sa polaire réciproque à l'égard d'une section conique quelconque.

60. Considérons, par exemple, l'un quelconque des polygones *ABCDE* (Fig. 22.), formés par le système des droites proposées; ses côtés *AB*, *BC*, *CD*, ... ayant pour pôles respectifs les points *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, ses sommets *B*, *C*, ... *A* auront pour polaires respectives (58.) les droites *ab*, *bc*, *cd*, ... *ae* qui joignent, deux à deux, consécutivement les pôles dont il s'agit, et forment par conséquent le polygone *a*, *b*, *c*, *d*, ... qu'on peut nommer le polaire réciproque du proposé.

En effet, d'après ce qui précède, les côtés et sommets de celui-ci auront à leur tour pour pôles et polaires, les sommets et côtés respectifs du premier, et la même relation de réciprocité aura lieu entre les points de rencontre des côtés et les diagonales de ces polygones, à l'égard de la section conique auxiliaire; c'est-à-dire que les diagonales et les points de rencontre des côtés de l'un auront réciproquement pour pôles et polaires respectifs les points de rencontre des côtés de l'autre et ses diverses diagonales.

D'après cela on voit, entre autre, que si certains points de rencontre des côtés de l'un des polygones étaient situés en ligne droite, les diagonales qui leur correspondent dans l'autre, concourraient (58.) en un même point, pôle de cette droite et vice versa.

61. Supposons maintenant que l'on coupe par une droite ou transversale arbitraire, les côtés prolongés de l'un des polygones polaires ci-dessus, cette transversale sera remplacée, dans l'autre, par un point, pôle de cette droite, et tout point d'intersection avec un côté le sera par une droite ou polaire passant (58.) par ce pôle et par le pôle du côté dont il s'agit, c'est-à-dire par le sommet correspondant du polygone réciproque. Ainsi le „système de la transversale et de ses points de rencontre avec les côtés du polypone proposé, sera remplacé par le faisceau des droites qui joignent le pôle de cette transversale aux différens sommets du polygone polaire, et réciproquement, un pareil faisceau de droites convergentes, dans l'un des polygones, sera remplacé par le système des points de rencontre d'une droite transversale des côtés du polygone polaire."

62. Considérons encore deux polygones quelconques sur le plan d'une section conique prise pour auxiliaire, ainsi que les polygones polai-

res qui leur appartiennent; supposons qu'on prolonge les côtés de l'un de ces deux polygones jusqu'à ses intersections avec ceux de l'autre, ils est évident (59. et 60.) que les points ainsi obtenus seront remplacés, dans les polygones polaires des proposés, par les droites qui joignent, deux à deux, les sommets de ces derniers. D'après cela, on voit en particulier que, si un certain nombre des points d'intersection dont il s'agit, appartenant à des côtés différens, étaient en ligne droite, les polaires qui leur correspondent, et qui appartiennent également à des sommets différens des polygones réciproques, se croiseraient en un même point (58.).

Ces exemples me semblent devoir suffir, en ce moment, pour montrer l'espèce de dépendance graphique qui lie entre elles la figure primitive et sa dérivée, lorsqu'on n'envisage que des systèmes de points et de lignes droites situés dans un même plan; et attendu que cette dépendance est réciproque de l'une à l'autre des deux figures, il nous est permis de les appeller polaires réciproques à l'égard de la section conique auxiliaire. Les principes qui précèdent rendent d'ailleurs très faciles les moyens de multiplier indéfiniment le nombre de ces exemples et de se familiariser avec eux; c'est pourquoi je crois devoir aborder de suite le cas où l'on a à considérer des lignes courbes quelconques.

63. Soit une courbe quelconque sur le plan d'une section conique prise pour directrice des pôles; d'après la loi de continuité, on pourra regarder indifféremment cette courbe comme la limite de deux polygones inscrits ou circonscrits d'un nombre infini de côtés infiniment petits; appliquant donc à ces polygones les raisonnemens établis ci-dessus (60.) pour un polygone quelconque fini, on aura à considérer une nouvelle courbe, limite commune des polygones polaires des proposés, et qui sera à la fois le lieu des pôles des élémens ou des tangentes de la première, et l'enveloppe des polaires des points qui lui appartiennent.

On pourra donc décrire, par deux procédés différens et faciles, la courbe dont il s'agit, qu'on peut nommer la polaire réciproque de l'autre, puisque, en vertu de ce qui a été dit (60.) pour les simples polygones polaires, la courbe proposée doit, à son tour, être considérée à la fois, ou comme le lieu des pôles des tangentes de celle dont il

s'agit, ou comme l'enveloppe des polaires des points qui lui appartiennent.

D'ailleurs on arrive directement aux mêmes conséquences à l'aide du principe de l'art. 56., en observant que, si „un certain point se déplace infiniment peu sur la première courbe, ou sur la tangente en ce point, sa polaire qui, par hypothèse, est une tangente de l'autre, tendra à pivoter sur le point de contact de cette tangente; car, d'après le principe cité, ce point de contact est, à son tour, évidemment le pôle de l'élément ou de la tangente que l'on a considéré sur la première; c'est-à-dire que, si en un point quelconque de l'une des deux courbes, on mène une tangente à cette courbe, sa polaire touchera l'autre courbe en un point qui sera réciproquement le pôle de cette tangente.

Ainsi ces deux systèmes de tangentes et de points de contact seront polaires réciproques l'un de l'autre, comme les courbes mêmes dont ils font partie.

64. Supposons maintenant qu'on inscrive ou circonscrive un polygone quelconque à l'une de nos deux courbes, il est évident, d'après ce qui précède, que la polaire réciproque de ce polygone sera, au contraire, circonscrit ou inscrit à l'autre courbe; de telle sorte que les sommets inscrits se changeront en des côtés tangens ou circonscrits, polaires de ces sommets par rapport à la section conique auxilaire, tandis que les cordes ou côtés inscrits se changeront en des sommets d'angles ou de polygones circonscrits, et vice versa pour la seconde figure. Toutes les autres relations de réciprocité indiquées ci-dessus (60.) pour deux polygones polaires quelconques continueront d'ailleurs de subsister entre les deux polygones, l'un inscrit et l'autre circonscrit aux deux courbes réciproques

65. Pour développer encore plus ces considérations, concevons qu'on trace une droite ou transversale quelconque à travers l'une des deux courbes, elle la rencontrera, en général, en autant de points qu'il est marqué par son degré. Or (63.) chacun de ces points est le pôle d'une certaine tangente de la courbe réciproque, et (58.) cette tangente passe nécessairement par le pôle de la transversale arbitraire; donc „le système de cette transversale et des points d'intersection qui lui appartiennent, sera remplacé, dans la figure

réciproque, par le système d'un égal nombre de tangentes issues d'un même point, pôle de cette transversale."

Ces deux systèmes sont d'ailleurs réciproques; c'est-à-dire qu'à l'inverse: „Si, d'un même point, on mène à l'une des courbes toutes les tangentes qui lui appartiennent, ce système aura pour polaire une droite rencontrant l'autre courbe en un nombre de points, égal au degré de cette courbe et au nombre des tangentes dont il s'agit, qui en sont respectivement les polaires."

66. Il suit delà, entre autres, que

„Le degré de la polaire réciproque d'une courbe donnée est au plus égal au nombre qui exprime combien, d'un point arbitraire, on peut mener de tangentes à cette dernière courbe."

Car, si l'on trace, à volonté, une droite ou transversale à travers cette polaire réciproque, le nombre de ses intersections avec elle sera marqué par celui des tangentes à la proposée qui passent par le pôle de la transversale.

Mais on prouve aisément, à l'aide de la loi de continuité ou de toute autre manière, que le nombre des tangentes qu'il est possible de mener à une courbe plane du degré m, par un point quelconque de son plan, est en général et au plus $m(m-1)$; donc aussi

Une courbe de degré m a pour réciproque polaire, une courbe qui est en général et au plus du degré $m(m-1)$.

D'où il suit en particulier, que

Toute ligne du second ordre a pour réciproque polaire une ligne qui est elle même de cet ordre.

Sans nous arrêter aux conséquences qu'on peut déduire de là pour les sections coniques, conséquences qui, pour la plupart, sont indiquées dans le Traité des propriétés projectives, nous ferons, sur ce qui précède, plusieurs remarques essentielles, et que nous ne devons pas passer sous silence.

67. Dabord il paroît évident que, quoique la polaire réciproque d'une courbe de degré m soit, en général, du degré $m(m-1)$, on ne peut cependant (65.) lui mener, d'un point pris arbitrairement sur son plan, que m tangentes, au plus, bien qu'il semble, en général que le nombre des tangentes possibles pour une courbe du degré $m(m-1)$, soit

$m(m-1)[m(m-1)-1]$; mais cela tient à ce que cette courbe est d'une espèce particulière parmi toutes celles du même degré, et qu'une courbe du degré m n'a pas toujours et nécessairement $m(m-1)$ tangentes, réelles ou imaginaires, passant par un point pris à volonté sur son plan.

En effet, d'une part, il est visible que, si la courbe (m) que l'on considère, a un ou plusieurs points multiples, le nombre des tangentes véritables dont il s'agit sera nécessairement diminué, attendu que les droites qui joignent ce point multiple au point donné, quoiqu'ayant deux ou plusieurs points communs avec la courbe et confondus en un seul, n'en sont pas moins, en général, des sécantes de cette courbe, qui d'ailleurs, ne sauroient être distinguées, sous certains rapports, des véritables tangentes, puisqu'elles remplissent exactement les mêmes conditions.

D'une autre part, en se reportant à nos deux polaires réciproques, dont l'une est du degré m, on s'appercevra sans peine (63.), que tout point multiple de l'une a, pour polaire, une tangente commune à un nombre de branches de sa réciproque, marqué par l'ordre de multiplicité du point dont il sagit; et vice versa, qu'une telle tangente a pour pôle un point multiple de l'ordre marqué par le nombre des points de contact de cette tangente; enfin on voit que ces points de contact sont les pôles des tangentes au point multiple de la réciproque.

Or une courbe plane quelconque du degré m a évidemment, en général, un certain nombre n de tangentes communes à deux de ses branches; donc la réciproque polaire aura pareillement ce même nombre n de points doubles, et par conséquent, le nombre $m(m-1)[m(m-1)-1]$ que nous avons trouvé pour exprimer celui des tangentes à cette polaire, qui passent par un point donné, devra être diminué de $2n$.

En effet, il est aisé de s'assurer, par la loi de continuité, que la droite qui passe par un point double, doit être considérée comme la réunion en une seule de deux tangentes de la courbe, c'est-à-dire qu'elle fait doublement partie des $M(M-1)$ tangentes que, d'un point quelconque, on peut en général mener à une courbe plane géométrique du degré M. Elle diminueroit ce nombre de trois unités, si elle appartenoit à un point triple, et en général de p unités, si elle appartenoit à un point multiple de l'ordre p; mais on voit, d'après ce qui précède, que de tels points singuliers ne peuvent exister que pour des courbes d'une espèce

tout à fait particulières, tandis que le contraire a lieu pour les points qui ne sont que doubles.

68. Une conséquence de ce qui précède, c'est que la polaire réciproque d'une courbe du degré m n'est pas toujours du degré $m(m-1)$, comme on l'a avancé ci-dessus (66.); ce degré peut-être moindre si la proposée a des points multiples, car le nombre des tangentes véritables qu'on peut mener à (m) par un point quelconque de son plan, sera diminué d'autant d'unités qu'il y a de branches distinctes passant à la fois par tous ces points multiples, et il devra en être de même du nombre $m(m-1)$ qui exprime, en général, le degré de la polaire réciproque de (m); le pôle de toute droite qui passe simplement par un point multiple de cette dernière, ne faisant pas partie de la réciproque, et appartenant simplement à une tangente commune à plusieurs branches de cette réciproque.

Effectivement, d'après la remarque faite plus haut, une telle tangente est la polaire d'un point multiple de la courbe (m), et un point quelconque de sa direction a nécessairement (56.) pour polaire une droite quelconque passant par ce point multiple, tandis que les seuls points de contact de cette tangente avec la réciproque de (m), sont les pôles des véritables tangentes du point multiple dont il s'agit; de sorte que, dans la recherche ci-dessus (65. 66.) des intersections d'une droite arbitraire et de la réciproque de la courbe (m), on ne doit pas tenir compte de celles relatives aux tangentes de (m) qui passent simplement par les divers points multiples, à moins qu'on ne veuille considérer les polaires de tels points singuliers comme faisant réellement partie de la réciproque, par ce seul motif que leur différens points sont les pôles d'une série de droites qui, sous certains rapports, peuvent être censées des tangentes de la courbe primitive (m).

69. Les points d'inflexion, de rebroussement et les points conjugués donnent lieu à des remarques analogues.

En effet, le point conjugué d'une courbe pouvant être considéré comme une branche isolée et infiniment petite de cette courbe, ou, plus généralement, comme l'intersection réelle de deux branches imaginaires de cette même courbe, toutes les droites qui y passent doivent être considérées comme de véritables tangentes dont les pôles, par rapport à la section conique auxiliaire, sont situés sur une

même droite appartenant tout entière à la polaire réciproque de la courbe proposée. Or la droite menée d'un point quelconque donné au point conjugué, représentant au moins le système de deux tangentes issues de ce point et confondues en une seule, on voit que la polaire d'un point conjugué peut être envisagée comme le système de deux branches de la courbe réciproque, confondues en une seule et même droite. Faisant donc abstraction de cette droite, on voit que le degré de la réciproque sera abaissé au moins de deux unités: il le seroit évidemment de quatre, si le point conjugué étoit double ou représentoit deux branches de courbe devenues infiniment petites etc.

70. Par un point de rebroussement du premier ou du second genre, il passe également une infinité de tangentes; ainsi ce que nous venons de dire du point conjugué s'y applique directement; cependant comme le point de rebroussement a, de plus, une tangente réellement déterminée, renfermant deux élémens consécutifs et superposés de la courbe, la polaire réciproque de celle-ci aura un point singulier répondant au premier, et que la discussion, par rapport à la section conique auxiliaire, apprend être un point d'inflexion, quand le rebroussement est du premier genre ou que la tangente passe entre les branches, et un point de rebroussement du second genre, quand celui du proposé est de ce genre, ou que la tangente laisse d'un même côte les deux branches qui y passent.

A l'inverse, un point d'inflexion a pour réciproque polaire, un point de rebroussement du premier genre; mais comme, d'après la loi de continuité, les droites qui passent par un tel point, ne sauroient plus être prises pour des tangentes de la courbe proposée, la remarque précédente n'a plus lieu, à moins qu'on ne regarde la tangente en ce point comme faisant partie de la courbe, et en constituant une véritable branche.

71. J'ajouterai une dernière remarque à toutes celles qui précèdent, concernant les branches infinies et les asymptotes des courbes qui sont polaires réciproques par rapport à une section conique donnée dans leur plan commun: c'est que les points à l'infini de l'une de ces courbes ont pour polaires les tangentes de la réciproque, issue du centre de la section conique auxiliaire, tandis que les asymptotes relatives à ces points sont les polaires des points de contact de ces mêmes

tangentes; de telle sorte, par exemple, que, quand l'une des deux courbes a une ou plusieurs branches paraboliques, c'est-à-dire dont les asymptotes sont entièrement à l'infini, sa réciproque a un même nombre de branches passant par le centre de la section conique auxiliaire, lequel est ainsi un point multiple.

Ce qui précède, offre, comme on voit, les moyens de discuter parfaitement le cours et les affections diverses que peut présenter la polaire réciproque d'une courbe quelconque continue, donnée sur le plan d'une section conique, choisie à volonté pour servir d'auxiliaire ou de directrice; bien plus, on est en état de découvrir le degré véritable de cette polaire réciproque dans chaque cas particulier, et de trouver même, sans recourir à la description effective, la position des divers points singuliers et des asymptotes qui lui appartiennent, ou, plus généralement, la direction de ses branches infinies; sur quoi il est essentiel de remarquer que plusieurs des points à l'infini de ces branches peuvent eux-mêmes être des points singuliers, tout comme cela arrive pour les points à distance donnée et finie.

Pour se rendre compte de cette particularité, il suffit, en effet, de considérer un point singulier ordinaire et à distance donnée, d'une courbe quelconque, et de supposer ensuite qu'on mette la figure en projection centrale ou perspective sur un plan parallèle à la projetante de ce point, c'est-à-dire de façon que ce même point passe à l'infini dans la nouvelle figure.

Ainsi il y a des points d'inflexion et de rebroussement, des points multiples et conjugués etc., à l'infini comme à distance donnée; ce qui, je crois, n'a pas encore été remarqué des géomètres, ou du moins n'a pas encore attiré leur attention autant que le sujet le mérite par lui-même.

72. Nous sommes maintenant en état de passer au cas où la figure contiendroit deux ou un nombre quelconque de courbes situées sur le plan d'une section conique prise pour auxiliaire, et de découvrir ce qui se passe dans la polaire réciproque de cette figure; car, d'après ce qui a été dit art. 63., il paraîtra évident que tout point d'intersection, commun à deux des courbes de l'une des figures, a pour polaire, dans l'autre, une tangente commune aux réciproques de ces courbes; et vice versa, toute tangente commune à ces mêmes courbes, a pour pôle

l'un des points de rencontre des courbes réciproques: ainsi le nombre des points de rencontre et des tangentes communes appartenant à l'une des figures, est précisément égal à celui des tangentes communes et des points de rencontre qui appartiennent à l'autre; de plus ces deux systèmes ont entre eux les diverses relations examinées art. (59.) pour un système quelconque de points et de droites et son système polaire.

Par exemple: les points de concours des tangentes communes de l'un des systèmes, sont les pôles des sécantes ou cordes communes de l'autre et vice versa; comme aussi les droites qui joignent, deux à deux, les points de concours dont il s'agit, ont pour pôles, dans l'autre système, les points où se coupent deux à deux les sécantes communes etc.

73. Soient deux courbes, l'une du degré m et l'autre du degré n situées dans le plan commun d'une section conique prise pour directrice, leurs polaires réciproques seront, en général (66.), des degrés $m(m-1)$, $n(n-1)$, et, comme on sait, elles se rencontreront aussi en général et au plus, en $mn(m-1)(n-1)$ points, auxquels correspondront, d'après ce qui précède, un égal nombre de tangentes communes des courbes primitives; donc on a ce théorème:

Deux courbes géométriques, de degrés m et n, étant tracées sur un même plan, le nombre des tangentes communes à ces courbes est, en général et au plus, $mn(m-1)(n-1)$.

Quant au nombre des tangentes communes aux polaires réciproques de ces courbes, il ne sauroit évidemment surpasser celui mn, qui appartient aux points mêmes de rencontre des courbes m et n; sur quoi on pourroit faire des réflexions analogues à celles que nous avons rapportées ci-dessus (67. et 68.) pour le cas où les tangentes partent d'un même point.

Ajoutons, pour terminer, que l'orsque les courbes m et n ont un point de contact ou d'osculation d'un certain ordre, les polaires réciproques de ces courbes en ont pareillement un de ce même ordre, et qui correspond au premier; car p étant cet ordre, il en résulte que les courbes m et n ont $p+1$ tangentes consécutives communes confondues en une seule au point de contact, de sorte que les réciproques de ces courbes ont aussi $p+1$ points consécutifs communs confondus en un seul au point correspondant; on voit en outre que, dans

ce même cas, le nombre des points communs distincts et des tangentes communes distinctes des courbes de l'un et de l'autre système, se trouve diminué de p unités.

74. Je crois inutile d'examiner les diverses autres relations de situation qui peuvent exister entre le système des courbes primitives et de leurs réciproques; par exemple celles qui auroient lieu pour des tangentes et des points communs à l'infini, soit de simple contact, soit d'osculation etc.; j'en dirai tout autant de celles qui peuvent appartenir en commun au système d'un nombre quelconque de courbes situées dans un même plan; ce qui a été dit du cas particulier d'une seule courbe, suffira toujours pour faire découvrir ces relations sans difficulté, si l'on s'est bien pénétré de la théorie des polaires réciproques.

Au surplus, les principes qui viennent d'être exposés concernent proprement les relations descriptives des figures planes, et parmi ces relations, celles qui n'ont trait qu'au cours indéfini des lignes, sans égard à aucune mesure, à aucune grandeur déterminée ou constante, en un mot celles qui n'on trait qu'aux propriétés de situation des lignes et des points tracés dans un plan commun. Nous examinerons plus tard, ce qui arrive pour les relations qui, au contraire, ne concernent uniquement que les rapports de grandeur, que nous avons nommés métriques; et, quant aux applications de ces mêmes théories, nous renverrons au Traité des propriétés projectives qui en offre de nombreux exemples relatifs aux systèmes de sections coniques et de lignes droites. Nous ne saurions revenir ici sur ces applications particulières sans faire un double emploi, d'autant plus qu'elles se présentent comme d'elles-mêmes, et ne donnent lieu à aucune observation nouvelle, à aucune difficulté particulière. C'est pourquoi nous allons, de suite, passer au cas où les figures que l'on considère sont situées d'une manière quelconque dans l'espace.

Des figures polaires réciproques dans l'espace.

75. La théorie des polaires réciproques, dans l'espace, offre la plus grande analogie avec celle qui concerne les figures simplement tracées dans un plan; elle n'en est même, comme on va le voir, qu'une extension facile.

Soit, en effet, une surface du second ordre quelconque, et un point pris arbitrairement pour pôle des rayons vecteurs, ou d'une suite de transversales rectilignes rencontrant respectivement la surface en deux points; le raisonnement déjà mis en usage (55.) pour les courbes du second ordre, prouvera encore que le lieu des centres de moyennes harmoniques des différens couples de points d'intersection, par rapport au pôle considéré comme origine commune des segmens, sera du premier dégré ou une surface plane. On arriveroit d'ailleurs à la même conséquence en considèrant ce qui se passe dans les différens plans menés par le pôle des transversales, et en observant que les polaires (55.) qui répondent respectivement aux différentes courbes d'intersection de ces plans et de la surface proposée, doivent nécessairement s'entre-couper deux à deux, et être ainsi comprises dans un même plan, qu'on peut nommer indifféremment le plan des moyennes harmoniques, le plan polaire relatif au pôle considéré en particulier.

Il est évident d'ailleurs que le plan polaire, quand il rencontre la surface proposée, ou que le pôle est au dehors de cette surface, contient les différens points de contact de celle-ci avec les tangentes issues du pôle; c'est-à-dire que, dans tous les cas, il est le plan de contact, réel ou idéal, de la surface conique circonscrite à la proposée, et qui a son sommet au pôle.

Enfin on voit que, quand le pôle d'un plan s'éloigne à l'infini, ce plan passe par le centre de la surface auxiliaire, ou devient un plan diamétral conjugué à la direction du diamètre qui contient le pôle; comme aussi, quand le plan polaire passe tout entier à l'infini, le pôle devient le centre même de la surface auxiliaire, et vice versa.

76. Considérons à présent trois points arbitrairement situés par rapport à une surface du second ordre quelconque, les trois plans polaires qui leur correspondent respectivement dans la surface, iront se couper en un même point, et les cordes de la surface, qui appartiennent aux trois droites joignant ce point à chacun des proposés, seront (55.) divisées harmoniquement par le couple des deux points dont il s'agit; le point d'intersection des plans polaires de nos trois points proposés, a donc lui-même pour polaire un plan qui passe par ces trois points; d'où résulte ce principe entièrement analogue à celui qui a été établi (56.) pour le cas particulier des sections coniques, et qui, comme lui, est fondamental:

Si un certain point est situé sur un plan quelconque, le plan polaire de ce point, par rapport à une surface du second ordre quelconque, passera nécessairement par le pôle de ce plan, et *vice versa;* de sorte que ces deux systèmes seront *polaires réciproques* à l'égard de la surface auxiliaire du second ordre.

Il suit de là aussi qu'un nombre quelconque de plans passant par un même point, a pour réciproque polaire un nombre pareil de points ou pôles situés dans un même plan; et *vice versa,* un nombre quelconque de points situés dans un même plan, a pour polaire réciproque un système pareil de plans passant par un même point.

77. Considérons maintenant une droite quelconque dans l'espace, et prenons arbitrairement deux points sur sa direction; les plans polaires de ces points se rencontreront suivant une nouvelle droite, qui sera évidemment telle que tout point de la direction aura réciproquement pour plan polaire un plan passant par la première; car le point dont il s'agit, appartenant à la fois aux deux premiers plans, son plan polaire, d'après ce qui précède, doit renfermer aussi les pôles de ces plans, c'est-à-dire les deux points pris à volonté sur la droite donnée.

La réciproque de cette proposition est également vraie; c'est-à-dire que tout plan passant par la droite donnée a, pour pôle, un point de l'autre droite; car un tel plan renferme les deux points ci-dessus pris à volonté sur la droite proposée, et par conséquent son pôle doit appartenir à la fois (76.) aux plans polaires de ces deux points ou à la droite de leur intersection commune; de plus, si l'on applique à cette seconde droite les raisonnemens qu'on vient d'établir sur la première, il sera facile de prouver qu'elles jouissent entièrement des mêmes propriétés réciproques à l'égard de la surface du second ordre auxiliaire; on peut donc dire qu'elles sont polaires réciproques et énoncer ce théorème:

La droite, polaire réciproque d'une droite à l'égard d'une surface du second ordre, est à la fois le lieu des pôles des différens plans qui passent par la première, et l'intersection commune des plans polaires des différens points de

cette première; de sorte que ces propriétés sont réciproques entre les deux droites dont il s'agit.

78. Ajoutons comme chose évidente d'après ce qui précède, que, si par l'une quelconque de ces droites, on mène, dans la surface auxiliaire, une suite de plans sécans, ils rencontreront l'autre droite en des points qui seront respectivement, pour les courbes d'intersection, les pôles de la première. On voit encore que, si l'on joint par une nouvelle droite, deux quelconques des points de celles là, sa direction ira rencontrer la surface auxiliaire en deux autres points qui la diviseront harmoniquement ou en segmens proportionnels; de sorte que, en supposant l'une quelconque de ces droites à l'infini, dans une direction donnée par un plan, sa polaire deviendra un diamètre de la surface auxiliaire, et vice versa.

Enfin, si l'on considère deux ou un nombre quelconque de droites passant par un même point, leurs polaires réciproques seront (77.) situées dans le *plan polaire* unique de ce point, et, à l'inverse, si un nombre quelconque de droites sont situées dans un seul et même plan, leurs polaires réciproques passeront par un point unique, pôle de ce plan.

79. En remarquant que la réciproque polaire d'une droite n'est autre chose que la direction indéfinie de la sécante, réelle ou idéale, qui, sur la surface du second ordre, renferme les points de contact des plans tangens issus de cette même droite, on déduira aisément de ce qui précède, les différens théorêmes établis d'abord par Monge, Livet, Brianchon et Chasles, sur les droites polaires ou conjuguées.

Mon objet n'est point d'ailleurs d'examiner les conséquences particulières qu'on peut déduire de là pour les surfaces du second degré, conséquences qui ont été également exposées par les geomètres cités, dans les Recueils de l'Ecole polytechnique; je me contenterai seulement de remarquer que les considérations précédentes sont basées sur la définition la plus générale des lignes et des surfaces du second ordre, et qu'elles offrent la plus grande analogie avec celles qui ont été exposées à la fin du Mémoire précédent, relativement aux centres et aux axes de moyennes harmoniques des figures rectilignes et polyèdrales.

80. Après ce qui vient d'être dit sur les polaires réciproques du point, du plan et de la droite, il ne sera pas difficile de découvrir les di-

verses relations graphiques ou descriptives qui peuvent avoir lieu entre une figure, composée des manières quelconques des mêmes objets, et celle qui en est la polaire réciproque par rapport à une surface du second ordre, prise à volonté pour directrice. Cette discussion étant d'ailleurs entièrement analogue à celle que nous avons établie pour les figures planes, nous nous bornerons à quelques exemples généraux, relatifs aux polygones et aux polyèdres, en les choisissant de préférence parmi ceux qui peuvent nous servir à passer immédiatement aux relations de réciprocité qui concernent les courbes et les surfaces à double courbure, considérées comme limites de polygones et des polyèdres qui leurs sont inscrits ou circonscrits respectivement.

81. Soit d'abord un polygone rectiligne et gauche situé d'une manière quelconque dans l'espace, il y aura, dans ce polygone, plusieurs choses distinctes à considérer, telles que les sommets, les côtés, les angles aux sommets et les plans comprenant ces angles respectifs, qu'on peut nommer plans aux sommets ou au périmètre. Supposons qu'on prolonge indéfiniment les côtés de ce polygone, on pourra les considérer comme les arêtes d'une sorte de surface composée de faces planes angulaires et que nous nommerons, pour abréger, polyèdre angulaire ou indéfini. A son tour, le polygone proposé pourra être envisagé comme résultant de l'intersection mutuelle des arêtes consécutives de ce polyèdre.

Cela posé, si nous appliquons à ce système les considérations offertes par la théorie des polaires réciproques, deux arêtes ou côtés consécutifs quelconques auront pour polaires (78.) deux droites situées dans le plan polaire du sommet appartenant à ces côtés, et qui se rencontreront ainsi en un point, à son tour pôle du plan qui contient ces mêmes arêtes ou côtés. La suite des droites pareilles formera, par ses intersections successives, un nouveau polygone gauche, et celle des plans qui leur appartiennent formera un nouveau polyèdre indéfini, ayant ces droites pour arêtes; polygone et polyèdre qu'on pourra nommer les polaires réciproques des premiers à l'égard de la surface auxiliaire du second degré, attendu les relations de réciprocité qui les lie entr'eux d'après ce qui précède.

Remarquons d'ailleurs que, quand l'un des polygones est tout entier compris dans un plan, et que sa surface polyèdre s'évanouit en

quelque façon, l'autre se réduit à un point (78.) pôle de ce plan; de sorte que la surface polyèdre réciproque se change en un véritable angle solide, ayant ce même point pour sommet, et dont les faces ont réciproquement pour pôles les sommets du polygone plan proposé.

82. Si, revenant au cas général de deux polygones gauches quelconques polaires à l'égard d'une surface du second ordre donnée, nous passons aux courbes à double courbure, limites de l'un et de l'autre de ces polygones, de même que nous l'avons fait (63.) dans le cas du plan, il résultera de ce qui précède, que ces deux courbes jouissent entre-elles de cette propriété, que les tangentes de l'une sont les polaires de celles de l'autre, tandis que les points de la première sont les pôles des *plans osculateurs* de la seconde, et *vice versa.*

Mais, d'après ce qui vient d'être observé pour les simples polygones, il existe, dans le cas de l'espace, une autre considération essentielle qui n'a pas lieu dans le cas du plan, c'est que la suite des tangentes à une courbe à double courbure et dont elle peut être censée l'intersection continuelle, forme une véritable surface développable ayant cette courbe pour arête de rebroussement, et pour plans tangens les différens plans osculateurs de cette même courbe. Il en résulte, en effet, que l'enveloppe des plans polaires des différens points d'une courbe à double courbure n'est pas simplement la polaire de cette courbe, mais le système complet des tangentes à cette polaire, c'est-à-dire la développable osculatrice qui lui appartient: or cette propriété est réciproque entre les deux courbes dont il s'agit et leurs développables osculatrices.

Quant aux différens plans tangens à l'une de nos deux courbes, et il en existe une infinité passant par un même point ou une même tangente de cette courbe, ils ont évidemment pour pôles (77.) les différens points de la développable réciproque, appartenant a l'arête polaire de la tangente dont il s'agit.

83. Concluons de tout ce qui précède, qu'une courbe à double courbure et sa développable osculatrice étant données dans l'espace, ou, ce qui est aussi général et revient au même, une surface développable et son arête de rebroussement étant données, il correspondra à ce système un autre système pareil composé également d'une développable et de son

arête de rebroussement, système qu'on pourra nommer le réciproque polaire du premier, par rapport à la surface du second ordre prise pour auxiliaire, et dont les propriétés seront telles qu'il suit: „1) les droites génératrices de l'une des développables seront les réciproques polaires de celles de l'autre; 2) les plans tangens de l'une des développables, ou les plans osculateurs de son arête de rebroussement, seront les polaires des différens points de l'arête de rebroussement de l'autre; et vice versa les points de son arête de rebroussement seront les pôles des plans tangens de la développable réciproque ou des plans osculateurs de l'arête de rebroussement de cette développable; 3) tout plan passant par une génératrice de l'une des développables, c'est-à-dire par une tangente à son arête de rebroussement, aura pour pôle un point de la développable de l'autre système; et vice versa un point quelconque de l'une des surfaces développables aura pour plan polaire un plan passant par une génératrice de l'autre, c'est-à-dire qu'il sera simplement tangent à l'arête de rebroussement de cette surface etc." Il convient d'ajouter à tout ceci que, quand l'une des courbes que l'on considère est plane, auquel cas la développable osculatrice est elle-même comprise toute entière dans le plan qui lui appartient, la courbe de l'autre système se réduit simplement à un point (81.) pôle du plan dont il s'agit; de sorte que la développable correspondante est alors une véritable surface conique.

84. Proposons nous maintenant de rechercher directement le degré de la développable réciproque d'une courbe à double courbure donnée, aussi bien que celui de l'arête de rebroussement de cette développable. Soit, à cet effet, m le degré de la courbe donnée, et appelons n celui de sa développable osculatrice, nous verrons bientôt qu'il existe une relation nécessaire entre les nombres m et n.

Cela posé, le degré de la développable réciproque de la courbe (m) sera évidemment égal au nombre de points d'intersection d'une droite arbitraire avec cette développable: or d'après ce qui précède, cette droite a pour polaire réciproque dans le système proposé, une autre droite, et les plans polaires des points d'intersection qui s'y trouvent sont des plans passant (77.) par cette droite réciproque, et touchant (83.) simplement la courbe. D'un autre côté, par une droite donnée à volonté dans l'espace, on ne peut mener, en général et au plus, que $m(m-1)$ plans tangens à une courbe de degré m, puisque si l'on fait la projection ortho-

gonale de la figure sur un plan perpendiculaire à la droite, la question revient à demander (66.) le nombre des tangentes à la projection de la courbe, qui passent par le point unique de projection de la droite, et que le degré de cette courbe n'a pas cessé d'être m. Donc enfin le degré de la développable réciproque d'une courbe de degré m est, en général et au plus, $m(m-1)$.

Quant à l'arête de rebroussement de cette développable, son degré est marqué par le nombre des points suivant lesquels elle est rencontrée par un plan arbitraire; or ce plan a pour pôle, dans le système primitif, un point quelconque et ses intersections ont pour réciproques des plans passant par ce point, et touchant (83.) la développable (n) de (m). Mais le nombre des plans tangens que, d'un point quelconque donné, on peut, en général, mener à une développable de degré n, est égal au nombre des tangentes qui répondent à ce point et à une section plane quelconque faite par ce même point dans la surface, section qui est également du degré n; donc le nombre des plans tangens dont il s'agit, et par conséquent le degré cherché de l'arête de rebroussement de la développable réciproque est $n(n-1)$.

85. Nous avons dit qu'il existe une relation nécessaire entre les nombres m et n, qui expriment les degrés respectifs d'une courbe à double courbure et de la développable osculatrice, ou, ce qui revient au même, de l'arête de rebroussement d'une surface développable et de cette surface elle-même. Pour la découvrir, cherchons en combien de points une droite arbitraire rencontre la surface dont il s'agit, lorsque le degré de son arête de rebroussement est m; à chaque point pareil répondra une génératrice de la surface, tangente à la courbe (m), de sorte que le plan qui la renferme ainsi que la transversale arbitraire, sera lui-même tangent à cette courbe: le nombre des points d'intersection cherché sera donc égal à celui des plans tangens qu'on peut mener à la courbe (m), par la droite dont il s'agit; or nous avons fait voir ci-dessus que ce dernier est, en général, $m(m-1)$; donc tel est aussi, en général et au plus, le degré n de la développable osculatrice de la courbe (m).

Il suit de là évidemment que, dans la seconde des questions ci-dessus, il faudra remplacer le nombre n par celui $m(m-1)$ que nous venons de trouver, ce qui donneroit pour le degré de l'arête de rebroussement, polaire réciproque de la développable (n) de (m), $(m-1)[m(m-1)-1]$.

Mais cette première limite peut-être diminuée, quoique les raisonnemens que nous avons établis, pour le cas où n est immédiatement donné sans que l'on connaisse m, soient en eux mêmes très rigoureux et très concluans dans ce cas général; en effet, la connoissance du degré m de l'arête de rebroussement permet de modifier ainsi ces premiers raisonnemens.

86. Le degré de l'arête de rebroussement polaire réciproque de la développable (n) est égal, comme on l'a vu (84.), au nombre qui exprime combien, d'un point donné arbitrairement, on peut mener de plans tangens à cette développable (n), ou de plans osculateurs à l'arête de rebroussement (m) de cette développable. Or le système de tous les points de contact de ces plans tangens avec la développable (n) est lui-même sur une autre développable de degré $n-1$ *), laquelle rencontre bien la développable (n) en $n(n-1)$ génératrices en général, mais ne rencontre l'arête de rebroussement (m), qu'en $m(n-1)$ points au plus, dont les plans osculateurs remplissent seuls complètement les conditions de la question; donc $m(n-1) = m[m(m-1)-1]$ est, en général, le degré de l'arête de rebroussement, polaire réciproque de la surface (n) ou $m(m-1)$.

Nous pourrions faire, sur ces dernières considérations et en général sur toutes celles qui précèdent, relatives aux degrés des courbes et des surfaces, des réflexions analogues à celles que nous avons présentées dans les No. 67., 68. et suivans, sur les simples courbes planes et leurs réciproques; mais elles se présentent d'une manière trop facile, et elles nous écarteroient trop de notre sujet pour qu'il soit convenable de nous y arrêter.

87. Pour terminer ce que nous avions à dire sur les courbes à double courbure et les surfaces développables, nous remarquerons qu'une telle courbe n'a jamais qu'une seule développable osculatrice, mais qu'il en est une infinité qui lui sont simplement tangentes, c'est-à-dire dont les élémens plans la touchent en chaque point de son périmètre, de la même manière qu'une surface développable quelconque n'a qu'une arête de rebroussement unique, composée d'ailleurs d'une ou de plusieurs branches distinctes et pour laquelle les plans tangens de la surface sont des

*) Cette proposition qu'on démontre aisément par l'analyse algébrique, sera établie directement dans la suite de ces recherches, relative aux propriétés générales des courbes et des surfaces géométriques.

plans osculateurs, tandis que cette même surface renferme une infinité d'autres courbes à double courbure simplement touchées en chaque point par les plans tangens de la surface.

Or si l'on considère ce qui se passe par rapport à une surface du second ordre prise pour auxiliaire, il sera aisé de reconnoître (83.), qu'une surface développable (n) étant circonscrite à une courbe à double courbure quelconque (m), ou, ce qui est la même chose, passant par cette courbe, la suite des pôles des plans tangens à cette surface sera une courbe à double courbure (p) située elle-même sur la développable, enveloppe des plans polaires des points de la courbe proposée (m); si donc, pour fixer entièrement la position de la surface développable (n), on l'assujettit à passer par une seconde courbe à double courbure donnée (m'), la courbe (p) qui est la polaire réciproque de cette surface dans l'autre système, ou le lieu des pôles de ses plans tangens, sera à la fois sur la développable réciproque de la première (m) des deux courbes proposées, et sur la développable réciproque de la seconde (m') de ces courbes, c'est-à-dire qu'elle sera à l'intersection commune de ces développables. Mais, d'après ce que nous avons vu ci-dessus (84.), le degré de ces développables est en général $m(m-1)$, $m'(m'-1)$, m et m' étant ceux des courbes proposées; donc $mm'(m-1)(m'-1)$ est aussi celui de l'intersection dont il s'agit; d'où l'on conclut réciproquement (84.) que le degré de la développable circonscrite à nos deux courbes (m) et (m'), est, en général, $mm'(m-1)(m'-1)[mm'(m-1)(m'-1)-1]$ bien qu'on ne puisse lui mener, au plus, que $mm'(m-1)(m'-1)$ plans tangens d'un point quelconque donné.

88. Il seroit inutile de nous appesantir d'avantage sur ces applications particulières, relatives aux surfaces développables et aux courbes à double courbure; les principes et les exemples généraux qui précèdent doivent suffire pour montrer comment on doit s'y prendre dans chaque cas; en conséquence, nous allons passer immédiatement à ce qui concerne les surfaces quelconques; mais auparavant nous devons dire quelques mots touchant les figures polyédrales, dont ces surfaces peuvent être regardées comme les limites.

Considérons donc un polyèdre quelconque dans l'espace, et prenons à volonté une surface du second ordre pour auxiliaire; d'après ce qui a été établi, art. 76. et suivans, il est clair que la figure polaire de

ce polyèdre sera elle-même un autre polyèdre, dont les sommets, les faces et les arêtes seront respectivement les polaires réciproques des faces, des sommets et des arêtes du proposé; de telle sorte, par exemple, que les sommets de l'un seront les pôles des faces de l'autre et vice versa; ainsi l'on peut dire de ces polyèdres qu'ils sont polaires réciproques l'un de l'autre.

Considérons entre-autres un hexaëdre ordinaire quelconque, composé, comme on sait, de six faces et de huit sommets, son polaire réciproque aura donc, au contraire, six sommets et huit faces, de sorte que ce sera un octaëdre à faces triangulaires; car le nombre des sommets appartenans à chaque face sera égal au nombre des faces appartenant à chaque sommet de l'hexaëdre, c'est-à-dire trois. En général on voit que les angles solides de l'un des polyèdres seront toujours (81.) remplacés pas des polygones, plans de l'autre, contenant le même nombre d'arêtes que ces angles et autant de sommets qu'ils ont de faces planes.

89. On peut déduire de là plusieurs rapprochemens curieux entre les polyèdres de diverses espèces, et qu'il serait peut-être moins facile de saisir de toute autre manière: ainsi par exemple, un polyèdre d'une espèce quelconque étant donné, on peut toujours construire un autre polyèdre ayant autant de faces que le premier a de sommets, et autant de sommets que le premier a de faces; de telle sorte que ses angles solides seront de même espèce que les polygones, plans du premier et vice versa. Enfin on voit que deux polyèdres réciproques sont toujours tels que le nombre de leurs arêtes est le même de part et d'autre; mais nous ne saurions nous arêter ici d'avantage à ces corollaires particuliers de la théorie des polaires réciproques.

90. Pour completer ce que nous venons de dire sur les polyèdres polaires, nous ferons observer que la droite ou diagonale qui appartient à deux sommets quelconques de l'un d'eux, a pour réciproque la droite d'intersection des deux faces qui ont pour pôles ces mêmes sommets et vice versa; qu'en suite toute droite qui rencontre les faces de l'un des polyèdres ou leurs prolongemens, a pour polaire réciproque une autre droite (77.), intersection commune de plans passant par les sommets de l'autre polyèdre et qui ont pour pôles respectifs les intersections de la première; qu'enfin tout plan ren-

contrant les arêtes de l'un des polyèdres a pour réciproque (76.) le point d'intersection commune de plans passant par les arêtes de l'autre polyèdre.

91. En passant de ce qui précède aux surfaces, comme on l'a fait pour les simples polygones et les courbes, on en conclura que,

Une surface quelconque étant donnée et une surface du second ordre étant prise à volonté pour *auxiliaire*, il existe toujours une autre surface, polaire réciproque de la première, et qui est à la fois le lieu des pôles de ses plans tangens et l'enveloppe des plans polaires des différens points qui lui appartiennent.

Cette propriété est d'ailleurs réciproque entre les deux surfaces, c'est-à-dire que,

Si, en un point quelconque de l'une des surfaces, on mène le plan tangent correspondant, le plan polaire de ce point touchera l'autre surface en un point qui sera réciproquement le pôle de ce plan tangent.

D'après cela, on prouve aisément encore (77.) que toute tangente en un point de l'une des surfaces, a, pour polaire, une tangente à l'autre surface, en un point dont le plan tangent a réciproquement pour pôle le point de contact de la première.

92. Il est presqu'inutile de dire que tout polyèdre inscrit à l'une des deux surfaces a pour réciproque un polyèdre circonscrit à l'autre et vice versa. Quant aux polygones inscrits ou circonscrits, ils offrent des circonstances particulières que nous aurons occasion d'examiner plus loin.

Remarquons d'ailleurs que, quand l'une des surfaces est susceptible d'être engendrée en général par une droite mobile, c'est-à-dire lorsque c'est une surface réglée quelconque et non développable, l'autre en est nécessairement une aussi (77.); or il est aisé de prouver que la réciprocité observée ci-dessus pour les surfaces polaires en général, aura encore lieu dans le cas actuel, c'est-à-dire que chacune de ces surfaces sera à la fois l'enveloppe des plans polaires des points de l'autre, et le lieu des pôles des plans tangens à cette autre.

Au contraire, quand les génératrices de la surface proposée se rencontrent consécutivement, ou que cette surface est développable, les

choses se passent tout différemment, et la réciprocité n'a plus lieu, comme on en a déjà pu juger d'après ce qui a été dit (82.) à l'occasion des courbes à double courbure. Car, tandis que le lieu des pôles des plans tangens à une surface développable est simplement une courbe à double courbure, l'enveloppe des plans polaires de ses différens points, est, au contraire, une véritable surface développable comme la proposée, et qui est osculatrice de cette courbe; circonstances qui semblent tenir (82.) à ce que, sous certains rapports, il est comme impossible de distinguer une courbe à double courbure de sa développable osculatrice, ou, ce qui revient au même, une développable de son arête de rebroussement.

Revenons au cas général des surfaces quelconques à double courbure.

93. Supposons que, dans la vue de découvrir le degré de la surface réciproque polaire d'une surface de degré m donnée dans l'espace, on considère une droite transversale arbitraire de cette réciproque; chacun des points d'intersection de cette droite aura pour réciproque (91.) un plan tangent à la surface (m) passant (77.) par la droite polaire de celle dont il s'agit; donc le degré de la polaire réciproque d'une surface (m) est égal à celui qui exprime combien, d'une droite donnée à volonté dans l'espace, on peut mener de plans tangens à cette surface (m).

Pour découvrir ce dernier nombre, nous supposerons que, de deux points quelconques de la droite proposée, on mène deux cônes enveloppes de la surface (m), les courbes de contact de ces cônes se couperont en des points qui seront évidemment ceux des points de contact des plans tangens demandés, et leur nombre sera précisément égal à celui de ces plans; mais on démontre que la courbe de contact d'un cône circonscrit à une surface du degré m, est sur une autre surface du degré $m-1$, quoique ce cône soit lui-même du degré $m(m-1)$; donc les points de contact des plans tangens ci-dessus sont à l'intersection commune de la surface (m) et de deux autres surfaces du degré $m-1$, donc leur nombre ou celui des plans tangens est, en général et au plus $m(m-1)^2$; et par conséquent:

La polaire réciproque d'une surface de degré m, est, en général et au plus, du degré $m(m-1)^2$.

C'est évidement aussi, en général, le degré de toute section plane faite dans cette surface polaire.

94. On remarquera que tout cône circonscrit à l'une de nos deux surfaces, a pour polaire réciproque (83.) une section plane de l'autre, et vice versa; mais toute section plane faite dans une surface de degré m, est elle-même du degré m; donc (84.) tout cône, enveloppe de la polaire réciproque de (m), est du degré $m(m-1)$ seulement, bien que le degré de cette surface polaire soit, en général, $m(m-1)^2$, d'après ce qui précède. Supposons, par exemple, $m=2$, on aura à la fois $m(m-1)^2=2$ et $m(m-1)=2$, c'est-à-dire que

La polaire réciproque d'une surface du second degré est elle-même du second degré, et que toute surface conique circonscrite à cette polaire est pareillement de ce degré.

En se rappelant (75.) que le pôle et le plan polaire d'une surface du second degré, ne sont autre chose que le sommet et le plan de contact d'une surface conique quelconque circonscrite à cette même surface, on concluera en particulier, de ce qui précède, qu'un pareil système a pour polaire à l'égard de la surface auxiliaire, un nouveau point et un nouveau plan qui ont entr'eux la même corrélation par rapport à la surface du second degré réciproque de la proposée.

95. Considérons maintenant un polygone gauche quelconque inscrit à l'une (m) de nos deux surfaces réciproques (m) et (m'), il est évident (81.) que son réciproque polaire sera lui-même un autre polygone dont les différens angles aux sommets seront simplement compris dans des plans tangens (91.) à la seconde (m') de ces surfaces, formant ainsi un polyèdre indéfini (80.) circonscrit à cette surface suivant des points qui seront les pôles respectifs des plans tangens aux sommets du premier polygone. Or les intersections consécutives de ces derniers plans tangens donnent lieu a un autre solide indéfini circonscrit à la surface (m), et ayant, à son tour, pour réciproque le polygone formé par les points de contact déterminés sur (m'), pris pour sommets successifs de ce polygone; donc ces deux polygones inscrits, sans être réciproques polaires, sont néanmoins tels que les côtés de l'un sont les polaires des arêtes du solide indéfini circonscrit aux sommets de l'autre, et que ses sommets sont les pôles des faces planes de ce même solide.

Les choses se passent d'une manière différente pour le cas où l'on considère un polygone circonscrit à l'une (m) des surfaces: car son réci-

proque est évidemment (91.) lui-même circonscrit à l'autre (m'), et ses angles ne sont plus compris dans des plans tangens à cette autre surface. On appercevra encore mieux la différence qui existe entre les deux cas, en supposant qu'on inscrive aux surfaces (m) et (m'), les polygones qui ont pour sommets les points de contact des côtés des premiers; car les polyèdres circonscrits qui leur appartiennent, renfermeront simplement sur leurs surfaces, les contours des polygones circonscrits dont il s'agit, de telle sorte que les sommets de ceux-ci seront situés sur les arêtes respectives de ceux là.

96. Passant donc au cas où les polygones inscrits ou circonscrits aux surfaces proposées deviennent des courbes véritables qui se confondent en une seule pour chaque surface, les polyèdres circonscrits deviendront des surfaces développables elles-mêmes circonscrites aux proposées suivant ces courbes, et dont chacune sera l'enveloppe des plans polaires des points de la courbe de contact de l'autre; les arêtes de rebroussement de ces développables restant d'ailleurs distinctes de leurs courbes de contact, puisque les osculatrices développables de celles-ci, polaires réciproques (83.) de ces arêtes, sont supposées quelconques à l'égard des surfaces proposées. Quant aux degrés des développables et des courbes de contact de la figure réciproque, il se détermineroient aisément par des moyens analogues à ceux qui ont été mis en usage précédemment.

Enfin nous croyons devoir ajouter que, d'après les considérations précédentes et d'après la définition des tangentes conjuguées des surfaces, donnée par Mr. Dupin (Développemens de géométrie, page 41. et suiv.) le système de deux pareilles tangentes d'une surface a pour polaire, un autre système de deux tangentes conjuguées de la réciproque de cette surface.

97. Nous pourrions encore ici reproduire, sur les dépendances graphiques qui lient entre elles les surfaces polaires, des réfléxions et des remarques analogues à celles que nous avons établies (67. et suiv.) pour les simples courbes tracées dans un plan; car les surfaces présentent, aussi bien que les courbes, des modifications de forme tout à fait particulières dans certaines régions de leurs cours. Ainsi non seulement elles ont des points multiples et conjugués, des points de rebroussement et d'inflexion; mais elles ont aussi des lignes tout entières,

soit conjuguées, soit multiples, qu'on nomme aussi de striction, enfin des lignes d'inflexion et de rebroussement etc.; or ces lignes et ces points singuliers donnent lieu à des considérations importantes et qu'il ne faut pas négliger dans la recherche du degré et des affections des surfaces polaires; mais, comme elles conduiroient à une discussion qui n'a de difficulté que la longueur, d'après ce qui a été dit du cas simple des courbes, nous croyons devoir ne pas nous y arrêter pour le moment.

Ces observations s'appliquent d'ailleurs également aux points et aux courbes des surfaces polaires, qui sont à l'infini: ainsi, par exemple, tout point à l'infini de l'une de ces surfaces a pour polaire un plan tangent à l'autre, passant (75.) par le centre de la surface du second ordre auxiliaire et vice versa; or le plan tangent en un tel point, qu'on peut nommer asymptotique de la surface correspondante, a pour pôle le point de contact du premier plan. La suite des points à l'infini de l'une des surfaces est donc remplacée par la suite des plans tangens de l'autre, qui passent par le centre de la surface du second degré auxiliaire; et la suite des plans asymptotiques de cette même surface est remplacée par la courbe des points de contact des différens plans tangens dont il s'agit; d'où il résulte, en particulier, que la développable asymptotique de l'une des surfaces, est la polaire de la courbe de contact du cône circonscrit à l'autre, et qui a le sommet au centre de la surface du second ordre auxiliaire. Or c'est ce qu'on auroit pu conclure immédiatement des principes qui précèdent (94.), en observant que tous les points à l'infini de l'espace doivent être censés sur un plan qui a pour pôle (75.) le centre dont il s'agit.

Pour les raisons déjà déduites ci-dessus, nous ne nous arrêterons pas à discuter ce qui arrive dans le cas où le plan à l'infini touche une ou plusieurs nappes de l'une des deux surfaces, ni les diverses autres circonstances que peuvent présenter en général les nappes infinies de ces surfaces.

98. Après ce qui vient d'être dit sur les surfaces polaires réciproques à l'égard d'une surface du second ordre prise pour auxiliaire, il ne sera pas difficile de découvrir ce qui se passe dans le cas où l'on considère un système de deux ou de plusieurs surfaces quelconques et le système de leurs polaires réciproques.

Par exemple, si l'on considère deux surfaces de degrés m et n et leurs polaires réciproques de degrés (93.) $m(m-1)^2$, $n(n-1)^2$, il paroit évident 1) que la courbe d'intersection des deux premières surfaces, qui est du degré mn, aura pour réciproque une surface developpable circonscrite aux systèmes de deux dernières, et que cette développable sera (84.) du degré $mn(mn-1)$ au plus; 2) que la développable circonscrite aux surfaces (m) et (n), a aussi réciproquement pour polaire la courbe d'intersection des surfaces polaires $m(m-1)^2$, $n(n-1)^2$, laquelle est évidemment, en général, du degré $mn(m-1)^2(n-1)^2$; 3) que par conséquent (84.) la développable circonscrite aux surfaces m et n est elle-même au plus du degré $mn(m-1)^2(n-1)^2[mn(m-1)^2(n-1)^2-1]$, et que le nombre des plans tangens qu'on peut lui mener d'un point donné, lequel est aussi celui des plans tangens communs à la fois aux surfaces (m) et (n) et passant par le point en question, ne peut surpasser le nombre $mn(m-1)^2(n-1)^2$ inférieur à celui de cette développable etc. etc.

99. Supposons encore que les surfaces (m) et (n) se touchent en un point ou aient un plan tangent commun en ce point, il est clair (91.) que leurs réciproques se touchent pareillement en un autre point correspondant au premier; et, par suite, si ces mêmes surfaces (m) et (n) se touchent en s'enveloppant suivant une courbe toute entière, leurs polaires réciproques se touchent de même suivant une courbe toute entière, de telle sorte que chacune de ces courbes (96.) pourra être considérée réciproquement comme le lieu des pôles des plans tangens qui appartiennent à l'autre, et dont l'enveloppe est la développable circonscrite à la fois aux deux surfaces qui se touchent suivant cette autre.

Si d'ailleurs les deux surfaces (m) et (n), au lieu de se toucher suivant une courbe entière, ne se touchoient que suivant une portion de courbe; c'est-à-dire, si, au point commun à ces surfaces, deux courbes tracées sur elles avoient un contact d'un certain ordre, et que de plus les surfaces se touchassent simplement suivant la portion commune à ces courbes, il en seroit de même encore de leurs surfaces polaires. Enfin, si les différentes courbes tracées sur les surfaces (m) et (n), à partir d'un point commun et dans la même direction, avoient toutes un contact de l'ordre p entre-elles, c'est-à-dire si ces surfaces avoient, autour du point en question, un contact de l'ordre p, on

voit que leurs polaires réciproques auroient un contact du même ordre au point qui correspond au premier.

100. Mais il seroit fort inutile de pousser plus loin ce rapprochement entre les figures qui, dans l'espace, sont réciproques polaires l'une de l'autre à l'égard d'une surface du second ordre prise pour auxiliaire; la discussion, aidée des principes généraux qui précèdent, suffira pour faire découvrir, dans chaque cas particulier, l'espèce de relations graphiques ou descriptives qui lieront entre-elles la figure primitive et sa dérivée; de sorte qu'on sera toujours en état de traduire leurs propriétés de situation, et, par là, d'en découvrir de nouvelles si l'on en connoissoit déjà: c'est ainsi, par exemple, que, pour le cas de l'espace, les propriétés des polygones plans et de courbes planes se changeront (81. et 83.) en d'autres appartenant aux angles solides et aux surfaces coniques; que les propriétés des courbes à double courbure se changeront en d'autres des surfaces développables et réciproquement; qu'enfin celle des polygones et des polyèdres inscrits aux courbes et aux surfaces se changeront en d'autres propriétés des polygones et des polyèdres indéfinis ou définis, circonscrits, au contraire, à de telles lignes et surfaces.

Au surplus, il est essentiel de le rappeler ici sur de nouveaux frais, l'échange dont il s'agit ne sauroit avoir lieu pour toute espèce de propriétés ou de relations descriptives, mais seulement pour les propriétés de situation des figures, et qui étant ainsi indépendantes de toute relation particulière de grandeur, se trouvent comprises parmi celles que nous avons nommées ailleurs propriétés projectives.

101. Une autre remarque toute aussi importante, c'est que les propriétés des courbes et des surfaces ne pourront donner lieu à de nouvelles propriétés, lorsqu'on leur appliquera les considérations de la théorie des polaires réciproques, qu'autant qu'elles seront des propriétés de genre et non d'espèce, ou plutôt qu'autant qu'elles appartiendront à la fois à toutes les courbes et à toutes les surfaces quel qu'en soit le degré. Je vais m'expliquer plus clairement.

Concevons, sur un plan, une courbe quelconque du degré m, la polaire réciproque sera donc du degré $m(m-1)$; cela posé, si la courbe proposée (m) jouit d'une certaine propriété ou relation graphique et projective, on pourra, à coup sûr, traduire cette relation en une autre qui

appartiendra à sa réciproque $m(m-1)$. Mais celle-ci n'est que d'une espèce particulière (67.) parmi toutes celles du même degré; donc on ne sauroit affirmer que la propriété qu'on lui a découverte appartienne en effet à toutes les courbes de ce degré. Mais si la propriété qu'on suppose déjà comme pour la courbe (m), est une propriété commune à la fois à toutes les courbes quel qu'en soit le degré, c'est-à-dire si m est indéterminé, alors la polaire réciproque $m(m-1)$ en jouira en même temps que la primitive (m), et par conséquent celle-ci, dont le degré est dailleurs quelconque, jouira en même temps de la propriété réciproque et qui se déduit de l'autre par la théorie des pôles et polaires. Or, si la première propriété n'est pas elle-même sa réciproque, on en aura découvert une tout à fait différente et toute aussi générale, puisqu'elle appartiendra à la fois à toutes les courbes géométriques.

102. Néanmoins le cas des courbes et des surfaces du second degré fait exception à la règle que nous venons de poser: c'est-à-dire que toute propriété graphique et projective d'une telle ligne et surface peut se traduire immédiatement en une autre appartenant à toutes les courbes et surfaces de ce degré, sans que, pour cela, cette propriété appartienne à la fois à toutes les courbes et surfaces gèométriques en général. Or cela tient à ce que les polaires réciproques d'une courbe ou d'une surface du second degré sont elles-mêmes de ce degré (66. et 93.); de sorte que les propriétés qu'elles possèdent doivent aussi appartenir à ces réciproques.

Dans le supplément placé à la fin du Traité des propriétés projectives des figures, j'ai indiqué quelques unes des conséquences qu'on peut déduire de cette remarque particulière, pour les surfaces du second ordre: ce qui précède met en état d'en découvrir beaucoup d'autres. Mais ayant principalement pour objet, dans ce Mémoire, la théorie générale des polaires réciproques, je me bornerai à un petit nombre de nouveaux exemples, dans la simple vue de faciliter l'intelligence des principes, et de montrer le degré d'utilité ou d'importance qui peut leur être propre dans les recherches relatives aux figures.

103. Considérons deux surfaces quelconques du second ordre, leurs réciproques polaires seront elles-mêmes deux autres surfaces quelconques de cet ordre, dont l'intersection mutuelle sera une courbe à double courbure du 4me degré, polaire (98.) de la développable circonscrite à la fois aux surfaces proposées, la quelle est ainsi au plus du 12me de-

gré (84.). Mais nous avons prouvé dans l'ouvrage déjà cité ci-dessus (supplément, No. 611. et suiv.), que „les branches d'une telle courbe peuvent toujours être placées sur quatre surfaces coniques du second degré, dont les sommets respectifs ont, pour plans polaires communs à l'égard des surfaces auxquelles ils appartiennent, les plans qui renferment les trois autres sommets de cônes semblables;" et, d'un autre côté, chaque cône a pour polaire, dans le système proposé ou primitif, une ligne du second ordre (94.) dont les différens points appartiennent nécessairement (87.) à la développable circonscrite aux deux surfaces de ce système, et qui est la pénétration commune de deux de ses nappes, c'est-à-dire que c'est une des lignes de striction de ces nappes; donc en premier lieu,

La surface développable circonscrite à deux surfaces quelconques du second ordre offre, en général, quatre lignes de striction distinctes, planes et du second ordre seulement.

Et, comme les sommets des cônes qui les remplacent dans le système réciproque, ont mêmes plans polaires à l'égard des surfaces de ce système, il en résulte, en outre, que

Les plans de striction du système primitif ont aussi mêmes pôles dans les deux surfaces proposées. Donc, d'après les articles (612. et 615.) de l'ouvrage cité, ces pôles sont, à leur tour, les sommets des cônes du second ordre qui contiennent la courbe d'intersection des deux surfaces proposées; mais, selon ce que nous venons de rappeler, chacun d'eux est aussi le pôle du plan qui renferme les trois autres; donc enfin ces quatre pôles sont, trois par trois, situés sur les quatre plans de striction, c'est-à-dire qu'ils sont l'intersection mutuelle de ces quatre plans.

Quant aux deux courbes de contact de la surface développable circonscrite à la fois à deux surfaces quelconques du second ordre, il est facile de prouver qu'elles sont en général du 4me degré, et placées à l'intersection respective des surfaces proposées et de deux autres surfaces comme elles du second degré.

En effet, considérons, en particulier, la courbe de contact appartenant à l'une (m) des deux surfaces, et supposons que, prenant cette surface pour auxiliaire, on détermine (91.) celle qui est la polaire réciproque de l'autre (m'), cette polaire réciproque sera aussi du second degré; mais, d'après sa nature, elle est le lieu des pôles des plans tangens à la

surface (m') par rapport à la surface auxiliaire (m), et d'ailleurs le pôle de tout plan tangent à cette auxiliaire se confond nécessairement (75.) avec le point de contact même de ce plan; donc, si l'on recherche les points où la réciproque ci-dessus coupe la surface auxiliaire, les plans tangens à ces points seront en même tems tangens à la seconde (m') des surfaces proposées; et par conséquent la suite des points d'intersection pareils formera une courbe à double courbure du 4me degré, qui sera précisément, sur (m), la courbe de contact de la développable circonscrite aux deux surfaces du second ordre proposées (m) et (m'). On détermineroit, de la même manière, celle qui appartient à l'autre de ces deux surfaces.

On remarquera que la courbe de contact, qui vient d'être déterminée sur chacune des deux surfaces que l'on considère, est précisément celle qui sépare entre-elles, sur cette surface, l'ombre, la pénombre et la partie entièrement éclairée, quand on suppose l'autre surface lumineuse; or ce qui précède donneroit lieu à une construction assez simple de la courbe de séparation d'ombre et de lumière pour les surfaces du second degré, et qui n'exigeroit d'autres instrumens que la règle et le compas, lorsqu'une fois l'on auroit obtenu un seul point de la courbe dont il s'agit, ce qui est facile.

104. Considérons encore un système quelconque de surfaces du second ordre, ayant une même courbe d'intersection, on prouve aisément que les plans polaires qui répondent à ces surfaces et à un même point quelconque de l'espace concourent tous suivant une même droite. En effet, si, par le point donné, on conduit un plan quelconque, il rencontrera les surfaces proposées en autant de lignes du second ordre passant par les mêmes quatre points d'intersection du plan et de la courbe commune aux surfaces; or ce même plan ira déterminer, dans chacun des plans polaires du point donné, autant de droites qui seront évidement (75.), pour les courbes de ce plan, les polaires du point dont il s'agit; et, d'après le No. 388. du Traité des propriétés projectives des figures, ces polaires passent toutes par un même point distinct du premier; donc aussi les plans polaires auxquels elles appartiennent vont concourrir en une même droite comme il s'agissoit de le démontrer.

Cela posé, appliquons donc à ce système général les principes qui font l'objet de ce Mémoire, c'est-à-dire, recherchons ce qui se passe dans

le système des surfaces du second degré polaires réciproques des proposées à l'égard d'une dernière surface quelconque du même degré prise pour auxiliaire; il est évident que ces nouvelles surfaces auront (98.) une même développable circonscrite à la fois à tout leur système, et polaire réciproque de la courbe d'intersection commune à toutes celles du premier système. Or le point arbitraire de ce premier système sera remplacé par un plan, et ses différens plans polaires, par rapport aux surfaces proposées, le seront par des points pôles respectifs (94.) de ce plan à l'égard des nouvelles surfaces; enfin tous les points semblables seront situés (77.) sur une ligne droite réciproque de celle où concourent, d'après ce qui précède, les plans polaires dont il s'agit; donc, tout étant (109.) réciproque entre l'ancien et le nouveau système, on pourra en conclure la proposition générale qui suit:

Lorsque plusieurs surfaces du second degré ont une même développable circonscrite, un plan quelconque a pour pôles, dans ces surfaces respectives, une suite de points rangés sur une même droite, qui contient (75.) tous les centres de ces surfaces quand le plan est supposé à l'infini.

105. On démontre encore, par un genre de raisonnement analogue à celui que nous venons de mettre en usage précédemment, que,

Lorsque plusieurs surfaces du second ordre passent toutes par les mêmes huit points d'intersection, leurs plans polaires respectifs, par rapport à un point quelconque de l'espace, concourent tous en une seule et même droite.

Passant donc à la figure polaire, on aura à considérer un système de surfaces du second ordre à la fois tangentes aux huit mêmes plans, ce qui est le plus grand nombre de plans qui puissent toucher en même tems trois surfaces quelconques du second ordre. Or, par les mêmes raisons que ci-dessus, le point arbitraire du système primitif est remplacé par un plan dans le nouveau système, et les plans polaires qui lui appartiennent sont remplacés par les pôles de ce plan pris relativement aux surfaces dérivées; donc puisque ces plans polaires passent par une même droite, en vertu du théorême qui précède, les pôles qui les remplacent seront rèciproquement (77.) compris sur une même droite, proposition qu'on peut énoncer ainsi:

Lorsque plusieurs surfaces du second ordre ont les

huit mêmes plans tangens communs, un plan quelconque a pour pôles, dans ces surfaces respectives, une suite de points rangés sur une seule et même droite.

Huit plans quelconques peuvent toujours être censés former par leurs rencontres successives, et lorsqu'on les prend dans un certain ordre, un octaëdre indéfini (80.) ou à faces angulaires; on peut donc énoncer plus simplement encore le théorême qui précède en cette manière:

Le lieu des pôles d'un plan donné par rapport à une suite de surfaces de second ordre inscrites à un même octaëdre indéfini, est une ligne droite, qui contient à la fois (75.) tous les centres de ces surfaces, lorsque le plan est supposé à l'infini.

Les principes établis dans le Traité des propriétés projectives, pour le cas des sections coniques, conduiroient à plusieurs autres théorêmes sur les systèmes de surfaces du second ordre, au moyen desquels on en déduiroit d'autres tout aussi généraux à l'aide de la théorie des polaires réciproques; de là ensuite on seroit conduit à divers corollaires intéressans et utiles qui permettroient d'aborder d'une manière purement géométrique, plusieurs des cas généraux du problème très difficile et jusqu'ici non complettement résolu, de construire une surface du second ordre assujettie à passer par des points ou à toucher des plans et des droites en nombre suffisant pour la déterminer parfaitement de grandeur et de position; mais nous ne saurions nous arrêter ici sur ces conséquences et ces théories particulières, qui d'ailleurs méritent toute l'attention des géomètres.

106. Pour donner un dernier exemple propre, par l'étendue des conséquences qui en dérivent, à montrer les avantages que peuvent offrir les principes de la théorie des polaires réciproques, nous rappelerons que les propriétés projectives des surfaces du second degré, qui ont une section plane commune, réelle ou idéale, sont les mêmes (*Traité des propriétés projectives des figures, supplément* No. 637.) que celles qui appartiennent aux systèmes de sphères quelconques, propriétés nombreuses et bien connues des géomêtres. Or, si l'on applique à ces propriétés générales des surfaces du second ordre les principes qui font objet du présent paragraphe, on verra, sans peine, qu'elles se convertiront toutes en d'autres

propriétés des surfaces du second degré qui, au lieu d'avoir un plan de section commune, ont (94. et 99.) un cône enveloppe commun, ce cône pouvant d'ailleurs être imaginaire comme la section dont il s'agit, et n'ayant alors de réel que son sommet et le plan indéfini de son contact avec chaque surface individuelle, c'est-à-dire le plan polaire de ce sommet. Dans cette déformation d'ailleurs, les plans tangens communs deviennent des points communs, les sections planes deviennent des cônes enveloppes et réciproquement etc. etc.

Delà résulte donc une foule de propriétés nouvelles des surfaces du second degré assujetties à toucher un même cône, et des moyens de construire ces surfaces d'après des conditions données; enfin on voit qu'on seroit conduit pareillement aux propriétés générales des surfaces du second degré qui sont inscrites à la fois à deux cônes, ou qui se touchent suivant une courbe toute entière, réelle ou idéale, en partant simplement de celles, si bien connues, relatives aux sphères qui ont, à l'infini, une section plane commune de contact, ou qui sont concentriques (voyez l'ouvrage déjà cité No. 630.).

Mais nous laisserons là ces applications particulières, que nous nous contenterons d'avoir indiquées et qu'il seroit facile de multiplier, pour reprendre, dans le paragraphe suivant, l'exposition générale des principes de la théorie des polaires réciproques.

Des relations d'angles relatives aux figures polaires réciproques dans un plan ou dans l'espace.

107. J'usqu'ici nous nous sommes uniquement occupés des relations graphiques ou descriptives des figures, celles qui ne concernent que la direction indéfinie, l'intersection et le contact des lignes et des surfaces; il nous reste à examiner ce qui a lieu pour les relations purement métriques, ou qui n'ont trait qu'aux rapports généraux de grandeur des parties rectilignes des figures.

Pour faciliter cet examen, nous remarquerons, en premier lieu, qu'il n'est pas nécessaire, comme nous en avons agi précédemment, de prendre pour courbe ou surface auxiliaire des pôles ou polaires, une ligne ou surface quelconque du second ordre, et que, sans rien ôter à la généralité des raisonnemens et des conséquences, on peut tout aussi bien se contenter de prendre une circonférence de cercle ou une sur-

face de sphère, ce qui rend beaucoup plus simple la description des figures polaires de figures données, et l'étude de changemens qui s'opèrent dans leurs propriétés mêtriques par suite de cette espèce particulière de déformation.

Rappelons d'abord, en peu de mots, la relation particulière qui existe entre le pôle et la droite ou le plan polaire, dans le cas particulier dont il s'agit.

108. Puisque le pôle d'une droite située sur le plan d'un cercle est, en général (55), le sommet de l'angle circonscrit à ce cercle dont la corde de contact a pour direction indéfinie celle de cette droite, on en peut de suite conclure que, relativement à cette courbe particulière, la direction du diamêtre ou du rayon qui renferme le pôle d'une droite quelconque est nécessairement perpendiculaire à cette droite; mais c'est ce qu'on pourroit aussi établir directement et sans restriction, en s'appuyant simplement sur la définition générale du pôle et de la polaire, posée art. (55.).

Maintenant, si l'on remplace le cercle par une sphère quelconque, on arrive à la même conséquence pour le pôle et le plan polaire dans l'espace; c'est-à-dire que le rayon ou le diamêtre indéfini qui renferme le pôle d'un plan quelconque est perpendiculaire à ce plan.

Ce théorême se déduirait d'ailleurs du précédent, en considérant ce qui se passe dans les différens plans qui renferment à la fois le pôle et le centre de la sphère.

Le cas de l'espace donne encore lieu à la considération des droites réciproques polaires (77.); or il est également facile de reconnoître que, pour le cas de la sphère, le plan diamétral qui contient l'une de ces droites est perpendiculaire à l'autre; de sorte qu'il existe un diamêtre de cette sphère dont la direction est perpendiculaire à la fois sur ces droites, et qui se trouve divisé harmoniquement aux deux points où il les rencontre. Il seroit d'ailleurs inutile de rappeler ici les autres relations descriptives qui appartiennent aux polaires réciproques, et qui ont été exposées aux Nos. 77. et suiv.

109. Ces préliminaires étant établis, nous considérerons d'abord les relations de réciprocité qui peuvent avoir lieu entre les ouvertures d'angles dans la figure proposée et dans celle qui en est la po-

laire réciproque à l'égard d'un cercle ou d'une sphère auxiliaire quelconque.

Soit *ABC* (Fig. 23.) un angle quelconque situé sur le plan d'un cercle (*S*) de rayon arbitraire et dont le centre est *S*. Soient *A'* et *C'* les pôles respectifs des côtés *AB* et *BC* de cet angle; les rayons indéfinis *SA'* et *SC'* seront donc perpendiculaires à ces côtés, et l'angle en *S* ou *A'SC'* sera supplément de l'angle en *B*, qui comprend le centre *S* entre ses côtés, ou est égal à celui des angles en *B* qui, au contraire, ne comprend pas le centre *S* entre ses côtés; ces angles auront donc, dans tous les cas, mêmes sinus. Quant à la polaire du sommet *B*, elle devra passer par les pôles *A'* et *C'*; ce sera par conséquent la droite *A'C'* qui, soutendant l'angle au centre *S* ou *A'SC*, est perpendiculaire à celle *SB* qui joint ce centre au sommet *B*.

Si maintenant nous remplaçons le cercle (*S*) par une sphère, et les droites *AB* et *BC* par des plans quelconques, il arrivera pareille chose à l'égard des pôles *A'* et *C'* de ces plans, si ce n'est que la droite *A'C'* qui les joint, sera la polaire même de l'arête *B*, commune à ces plans ou à l'angle qu'ils forment.

Dans le cas actuel d'une sphère (*S*), on peut aussi avoir à considérer, au lieu de deux plans, deux droites *AB*, *BC* se rencontrant en *B*, et formant par conséquent un angle plan; alors les choses se passeront un peu différemment; car les réciproques de ces droites ne seront plus des points, mais des droites *A'B'*, *C'B'* situées elles-mêmes dans un plan (78.) polaire au sommet *B*, et dont l'intersection *B'* sera, à son tour, le pôle du plan *ABC*. Néanmoins les plans *SA'B'*, *SB'C'*, qui contiennent respectivement ces polaires et le centre de la sphère, étant (108.) perpendiculaires aux droites *AB* et *BC*, formeront encore entr'eux un angle supplément de celui *ABC* de ces droites, qui est tourné vers le centre *S*; proposition qui aura même lieu pour deux droites quelconques dans l'espace, c'est-à-dire qui ne se rencontreroient pas, et pour les polaires réciproques qui appartiennent à ces droites.

Quant à l'angle *A'B'C'* formé par les polaires, il n'a aucun rapport déterminé avec l'angle *ABC*; en effet, d'après ce qui précède, il est le supplément de l'angle formé par les deux plans *SAB*, *SBC* qui contiennent le centre de la sphère ainsi que les droites *AB*, *BC* et qui sont perpendiculaires aux réciproques *A'B'*, *B'C'* de ces droites; or cet

angle dèpend, comme on voit, non seulement de l'ouverture absolue de l'angle ABC, mais encore de sa position à l'égard du centre S de la surface auxiliaire.

Enfin on peut avoir à considérer, dans le cas de l'espace, l'angle formé par un plan AB avec une droite BC; alors la direction du rayon SA qui renferme le pôle A' de ce plan, et la direction du plan diamétral $SB'C'$ qui renferme la polaire $B'C'$ de cette droite, formeront encore un angle égal à celui des deux angles en B, dont le côté et l'èdre, ou la face, ne comprennent pas entr'eux le centre S, ou mieux ne sont pas dirigés vers ce centre.

En général, pour énoncer d'une manière simple les résultats qui précèdent et qui puisse les faire graver aisément dans la mémoire, on peut dire, que „l'angle de deux droites, ou de deux plans, ou d'un plan et d'une droite quelconques situés dans l'espace, est supplément de celui sous lequel on voit leurs pôles ou polaires réciproques du centre de la sphère, prise pour auxiliaire, ou est égal à ce même angle, selon que ce dernier comprend ou ne comprend pas ce centre entre ses èdres ou côtés."

110. D'après cela on voit que, „si deux figures quelconques sont polaires réciproques à l'égard d'un cercle ou d'une sphère, et qu'il existe entre les ouvertures d'angles de l'une une certaine relation donnée, on pourra, de suite, en conclure une relation semblable entre les angles formés, autour du centre de la sphère ou du cercle auxiliaire, par les diamètres ou plans diamètraux dont la direction contient les pôles ou polaires des côtés et des èdres des premiers angles." Et réciproquement, „si l'on connoissoit une telle relation d'angles au centre pour l'une des figures, on seroit en état d'en conclure, de suite, une autre semblable entre les angles mêmes des plans et des droites de la réciproque polaire."

Considérons, par exemple, un polygone équiangle sur un plan, son polaire réciproque (60.) par rapport à un cercle quelconque, sera tel que les droites ou rayons dirigés vers ses différens sommets, feront des angles consécutifs égaux entr'eux, pourvu qu'on les prolonge indéfiniment; ces angles d'ailleurs seront ceux sous lesquels on voit les différens côtés du polygone polaire, du centre du cercle directeur.

Considérons encore un angle solide dont les angles dièdres soient égaux entr'eux, le polygone plan qui est (81.) son polaire récipro-

que, jouira de la même propriété que ci-dessus relativement au centre de la sphère prise pour auxiliaire; et si, de plus, les angles plans du solide proposé étoient tous égaux entr'eux, non seulement les angles au centre, plans, sous lesquels on voit les différens côtés du polygone réciproque, seroient égaux entre-eux; mais il en seroit encore de même des angles dièdres sous lesquels on voit les angles au périmètre de ce polygone.

111. Ces remarques s'étendroient aisément à un polyèdre équiangle et à son polaire réciproque, en observant que les différens angles solides du premier ont, pour réciproques, les polygones plans du second et vice versa. En général, on traduira d'une manière semblable toutes les relations d'angles qui pourroient avoir lieu dans l'un de ces polyèdres; car si l'on considère, par exemple, un des angles solides qui le composent, le centre de la sphère auxiliaire étant compris dans l'intérieur de cet angle, il sera aisé de voir d'après ce qui précède (109.), qu'en menant de ce centre des droites vers les sommets du polygone polaire de l'angle solide proposé, on formera un nouveau solide dont les angles plans seront supplémens des angles dièdres respectifs du premier, et dont les angles dièdres seront, à leur tour, supplémens des angles plans de ce premier solide; de sorte que le nouveau et l'ancien angle solide seront proprement ce que les géomètres sont convenus d'appeler des angles solides supplémentaires.

La même chose ayant lieu entre les divers angles solides et les divers polygones plans des deux polyèdres réciproques, on voit quelle espèce de relation subsistera, en général, entre les angles propres de l'un et les angles au centre qui appartiennent à l'autre. Mais, sans nous arrêter aux conséquences qu'on pourrait déduire de là pour les polyèdres en général et pour certains polyèdres en particulier, nous allons donner quelques exemples simples et faciles qui montreront l'importance et l'utilité des remarques ci-dessus (109.), en même tems qu'elles serviront à en faire connoître l'esprit dans les applications à des propriétés données.

112. Supposons, en premier lieu, que la figure étant tout entière comprise dans le plan du cercle auxiliaire (S) (Fig. 23.), on considère un angle quelconque ABC, constant de grandeur et dont les côtés soient assujettis à se mouvoir autour de deux points quelconques A, C de leurs directions; les pôles A' et C' des côtés de cet angle devront

aussi rester sur les polaires $A'B'$, $A'C'$ des points fixes A et C', et l'angle au centre $A'SC'$ sera constant comme supplément de l'angle en B. A l'inverse, un point quelconque S et deux droites fixes $A'B'$, $A'C'$ étant donnés sur un plan, aussi bien qu'un angle constant $A'SC'$ mobile autour du point S, la figure polaire de ce système à l'égard d'un cercle quelconque dont le centre est en S, sera précisément composée d'un angle constant ABC mobile autour de points fixes A et C, comme celle d'où nous sommes partis. Mais le sommet B d'un tel angle se meut toujours sur un cercle passant par les points fixes A et B; donc la polaire $A'C'$ qui soustend l'angle $A'SC'$ roule ou glisse, de son côté, sur une section conique tangente aux droites fixes $A'B'$, $A'C'$; ce qui donne lieu au théorême que nous avons fait connaître No. 472. du Traité des propriétés projectives.

113. Si l'angle constant ABC, au lieu de pivoter autour des points fixes A, C, demeurait perpétuellement circonscrit à une section conique quelconque, on voit que la corde $A'C'$, polaire de son sommet, demeureroit au contraire sans cesse inscrite (63.) à une autre section conique, en soustendant un angle constant $A'SC'$ mobile autour du point S. Et réciproquement, on peut toujours regarder le système d'une section conique et d'un angle constant $A'SC'$ mobile autour d'un point quelconque S de son plan, pris pour sommet, comme le réciproque polaire du premier système. Toutes les fois donc que le sommet B décrira une section conique, la corde inscrite $A'C'$ roulera pareillement sur une autre section conique: or c'est ce qui aura lieu, en particulier, lorsque l'angle B ou son supplément S sera droit: ainsi les théorêmes des N°s 487. et 488. de l'ouvrage déjà cité sont réciproques l'un de l'autre.

Maintenant on remarquera que, quand la courbe à laquelle est circonscrit l'angle B est une parabole, ayant par conséquent une tangente à l'infini, sa polaire réciproque, circonscrite à toutes les cordes $A'C'$, passe (71.) par le centre S du cercle auxiliaire, c'est-à-dire par le sommet de l'angle S; et réciproquement, que si le sommet de l'angle constant et mobile S se trouve sur la courbe qui contient les extrémités des cordes $A'C'$ soutendantes de l'angle en S, la courbe sur laquelle roulera l'angle ABC sera une parabole. Mais alors le sommet B de cet angle se meut sur une section conique, qui devient une

ligne droite quand l'angle équivaut à un quadrant; donc pareillement la corde $A'C'$ roule sur une autre section conique, qui se réduit à un point, quand l'angle $A'SC'$ est droit, et par conséquent les théorêmes des N°s 452. et 481. de l'ouvrage cité sont les réciproques de ceux énoncés art. 482.

114. Ces considérations peuvent s'étendre à l'espace.

En effet, trois plans quelconques, formant un angle solide, auront pour réciproques polaires à l'égard d'une sphère quelconque, trois points compris dans le plan qui a pour pôle le sommet de l'angle solide, et qui, étant joints par des droites au centre de cette sphère, donneront lieu à un nouvel angle solide supplémentaire (111.) du premier. Si donc l'un de ces angles se meut en demeurant constant, il en ira de même de l'autre; et, d'après la théorie des polaires réciproques (91. et 93.), si le premier a ses faces perpétuellement tangentes à une même surface du second degré, les points ou pôles qui déterminent les arêtes du second, demeureront continuellement sur une autre surface du second degré quelconque, et vice versa, de telle sorte que le lieu des sommets du premier angle solide sera remplacé (91.) par la surface enveloppe des plans qui contiennent les trois points. Or Monge a démontré, en particulier, que, „quand trois plans rectangulaires tangens à une surface du second degré, se meuvent autour de cette surface, le sommet de l'angle trièdre rectangulaire qu'ils forment, décrit en général une sphère; donc aussi:"

Quand un angle trièdre rectangulaire est mobile sur son sommet, le plan qui joint trois quelconques des points d'intersection de ses arêtes avec une surface du second degré quelconque, ou, si l'on veut, le plan du triangle qui soutend l'angle trièdre dans cette surface, roule et glisse sur une autre surface qui est du second degré comme la première.

Quand le point qui sert de sommet commun à tous les angles trièdres rectangulaires est sur la surface proposée, on démontre directement, avec Mr. Frégier, que les plans mobiles correspondans pivotent sur un point unique; mais alors, en se reportant à la figure primitive polaire réciproque de celle dont il s'agit, on reconnaît que la surface à laquelle est sans cesse circonscrit l'angle trièdre rectangulaire, a un plan tangent à l'infini (97.) polaire du centre da la sphère auxi-

liaire ou du point qui sert de sommet à tous les angles de l'autre système; donc cette surface est alors l'un des paraboloïdes, et le lieu des sommets des angles trièdres rectangulaires qui lui sont circonscrit, à la place d'être une sphère comme dans le cas ci-dessus, est simplement le *plan directeur* polaire du point fixe de l'autre système; de la même manière que, pour la parabole, le lieu des sommets des angles droits circonscrits est une droite unique, directrice ordinaire ou polaire locale de cette parabole etc.

115. Sans entrer dans de plus grands détails sur les propositions qui précèdent, et sans discuter en particulier les relations qui peuvent lier entr'eux les divers objets qu'elles concernent, nous nous contenterons de remarquer, d'une manière générale, que

1) La réciproque polaire d'une circonférence de cercle, à l'égard d'un cercle quelconque de son plan pris pour auxiliaire, est une section conique ayant *pour foyer* le centre de ce dernier cercle, et pour *directrice* la polaire du centre du premier; 2) la réciproque polaire d'une sphère, à l'égard d'une autre sphère quelconque prise pour auxiliaire, est pareillement une surface du second ordre de *révolution* ayant pour *foyer principal* le centre de cette dernière sphère, et pour *plan directeur* le polaire du centre de la première: théorême dont les réciproques sont également vrais; c'est-à-dire que:

La polaire d'une section conique ou d'une surface du second ordre de révolution quelconque, qui a pour foyer le centre d'un cercle ou d'une sphère pris pour auxiliaire, est une autre sphère ou un autre cercle ayant pour centre le pôle du plan directeur ou de la directrice.

C'est, en effet, ce qu'il est aisé de reconnoître en rapprochant, par exemple, les remarques du No. 112. de cette propriété très anciennement connue des sections coniques: „l'angle sous lequel on voit, du foyer d'une section conique, la partie d'une tangente quelconque terminée aux deux tangentes qui répondent aux extrémités du grand axe de la courbe, est toujours constant et égal à un quadrant."

116. Il suit de là, en particulier, que les diverses propriétés angulaires et descriptives dont jouissent les cercles et les

sphères peuvent se traduire immédiatement en d'autres propriétés d'angles appartenant au foyer commun des sections coniques et des surfaces du second degré de révolution, ce dont nous avons déjà montré de beaux et de nombreux exemples, chap. 1. sect. IV. du Traité des propriétés projectives.

Remarquons, en outre, que puisqu'un système quelconque de cercles tracés dans un plan, ou un système quelconque de sphères dans l'espace, a toujours, à l'infini, soit une sécante, soit une section plane idéale commune (même ouvrage, sect. I. et supplément), les lignes et les surfaces du second ordre qui en sont les polaires réciproques par rapport à un autre cercle ou à une autre sphère pris pour auxiliaires, auront aussi idéalement (106.) pour points de concours des tangentes communes, ou pour sommet de cône enveloppe commun, le centre qui sert à la fois de foyer à tout leur système; de sorte qu'elles jouiront entr'elles, sous ce rapport, de propriétés descriptives analogues à celles qui appartiennent aux systèmes de cercles ou de sphères qui ont un centre de similitude commun ou plus généralement aux systèmes de lignes et de surfaces du second ordre, qui ont un centre d'homologie commun ou sont la projection, la perspective en relief, les uns des autres *).

De là résulteroit donc une foule de propositions et de rapprochemens curieux; mais nous ne saurions insister sur ces conséquences particulières et faciles, sans nous écarter du but général que nous cherchons à atteindre; c'est pourquoi nous allons passer à un dernier exemple relatif aux propriétés d'angles des figures dans l'espace.

117. MM. Hachette et J. Binet ont démontré, pag. 71. du II^{de} volume de la Correspondance polytechnique, que, „si, entre deux droites fixes quelconques, on fait mouvoir deux plans rectangulaires, la surface engendrée par la droite intersection de ces plans, est une hyperboloïde à une nappe ou surface gauche quelconque du second degré." Appliquant donc à cet énoncé les principes exposés plus haut (109.), on sera immédiatement conduit à cet autre théorême qu'on peut regarder comme le réciproque du premier:

Deux droites étant situées à volonté dans l'espace, si,

*) Traité des propriétés projectives, sect. III. chap. 1., sect. IV. chap. 1. et supplément.

entre ces droites on fait mouvoir un angle droit dont le sommet soit en un point fixe de l'espace, et dont les côtés s'appuyent respectivement sur ces droites, la suite de celles qui appartiennent à la fois aux paires de points de rencontre des droites fixes et des côtés de l'angle mobile, sera une surface gauche (92.) du second ordre, ou une hyperboloïde à une nappe.

118. En général on voit qu'il n'est, en quelque sorte, aucune propriété concernant les angles constans d'une certaine figure située dans l'espace ou dans un plan, de laquelle on n'en puisse déduire, à l'aide des principes qui précèdent, une autre toute aussi générale, quoiqu'essentiellement distincte de la proposée.

Parmi les diverses relations d'angles qui peuvent appartenir aux figures, et qui sont remarquables autant par leur utilité propre que par leur généralité, je me contenterai de citer celles qui concernent les normales, les développées et les lignes de courbure des courbes et des surfaces, qu'il seroit aisé de transformer, à l'aide de la théorie des polaires réciproques, en d'autres également générales quoique, sans contredit, d'un bien moindre intérêt. Je citerai encore la description organique par le moyen d'angles constans, que Newton a donnée pour les lignes du second degré, enfin toute la Géométrie organique du célèbre Mac-Laurin, fondée sur ce théorême de Newton, aussi bien que les recherches postérieures du même géomètre, imprimées dans les Transactions philosophiques de la Société royale de Londres pour 1735. Ces diverses propositions nous conduiroient, sur le champ, à d'autres entièrement nouvelles, et où, au lieu de décrire les courbes par le mouvement de certains points mobiles, on les construiroit par l'enveloppe de leurs tangentes etc. etc. Mais encore une fois, nous ne saurions nous arrêter à ces corollaires faciles de la théorie des polaires réciproques, et il doit nous suffire d'avoir montré, par quelques exemples simples, la nature et l'étendue des applications qu'on en peut faire.

119. Au surplus, tout ce qui précède ne concerne uniquement que les relations d'angles d'ouverture donnée et constante, mais il est évident qu'on peut traduire, d'une manière semblable, celles qui concerneroient des angles variables quelconques et dont on connoîtroit la

loi en fonction des lignes trigonométriques; car, à l'aide des principes établis au No. 109. et suivans, on pourra toujours traduire ces relations en d'autres concernant des angles supplémens des premiers, et qui auront pour sommet commun un point quelconque de l'espace, pris pour centre du cercle ou de la sphère auxiliaire.

Par exemple, si, au lieu des normales d'une surface ou d'une courbe quelconque, on considère des systèmes de droites ou de plans formant entr'eux et avec une courbe ou une surface donnée, des angles quelconques dont les sinus seroient assujettis à une loi déterminée, les réciproques de ces droites, à l'égard d'un cercle ou d'une sphère auxiliaire choisis à volonté, seront comprises (109.) dans des plans passant par le centre de cette sphère, et formant respectivement des angles dont les sinus devront avoir entr'eux précisément la relation donnée entre les premiers. Ainsi par exemple, les propriétés générales des faisceaux de droites réfléchies ou réfractées pourront se traduire immédiatement en d'autres d'une espèce toute différente et qui, sans être par elles-mêmes d'une égale importance, n'en seront pas moins utiles à considérer. On conçoit en effet, que la recherche des relations qui appartiennent à ce système dérivé, pourra, dans certains cas particuliers, être plus simple et plus facile, que pour la figure primitive elle-même. Nous n'en dirons pas d'avantage sur ce sujet, attendu que nous aurons occasion, dans le paragraphe suivant, de considérer une classe très étendue de relations entre les sinus des angles, et de démontrer ainsi, d'une manière plus particulière, le parti avantageux que l'on peut tirer des principes qui viennent d'être mis en avant dans ce qui précède.

Des relations projectives entre les lignes trigonométriques et les distances des figures polaires réciproques dans un plan.

120. Nous avons vu (58.) qu'un faisceau quelconque de droites VA, VB, VC, . . . VF (Fig. 24.) convergeant en un même point V sur un plan, et qu'on peut appeler simplement faisceau projetant, avoit pour réciproque, par rapport à une section conique quelconque (S) prise pour auxiliaire, un système pareil de points A', B', C', . . . F', rangés sur une même droite, et vice versa; donc, si l'on suppose, en particu-

lier, que (S) soit un cercle, toute relation existante entre les sinus des angles projetans formés autour du point V, aura lieu également (110.) entre les sinus des angles formés par les droites ou rayons vecteurs qui, du centre S, projetent les pôles respectifs de ces droites, c'est-à-dire entre les angles projetans des distances, rangées sur $D'E'$, qui ont pour extrémités respectives les pôles des côtés des premiers angles; et réciproquement toute relation entre les sinus des angles au centre S, aura lieu pareillement entre ceux des angles correspondans formés autour du pôle V de $D'E'$.

Cela posé, admettons qu'entre les distances des points donnés A', B', C', . . . F', il existe une ou plusieurs relations métriques projectives, de la nature de celles que nous avons définies art. 9. et suiv. du Traité des propriétés projectives, et qui ont été rappelées au No. 18. du précédent Mémoire; la même relation aura donc lieu entre les sinus des angles qui projeteroient ces distances du point quelconque S; et, par suite de ce qui précède, elle aura lieu égalemeut entre les sinus des angles du faisceau V. Donc toute droite AF, prise pour transversale de ce faisceau, y déterminera des points A, B, C, . . . F, qui auront entr'eux précisément la même relation projective que les points A', B', C', . . . F' qui leur correspondent. Et réciproquement, s'il existe entre les sinus des angles du faisceau V, ou entre les distances qui soutendent ces angles sur la transversale arbitraire AF, une relation de la nature de celles qui précèdent, cette même relation aura lieu aussi entre les distances correspondantes des pôles A', B', C', . . . F' des côtés de ces angles.

121. Tout ce qui suit se rapportant essentiellement aux relations métriques qui sont de la nature de celles dont nous venons de rappeler le caractère particulier, nous nous contenterons, pour la simplicité du langage, de les designer par l'épithète générale de relations projectives; on devra se rappeler en conséquence, que, non seulement de telles propriétés subsistent à la fois pour la figure donnée et pour toutes ses projections centrales ou perspectives sur un plan quelconque; mais qu'encore ces mêmes relations devront satisfaire aux conditions prescrites dans les endroits cités; de sorte qu'elles auront lieu également entre les sinus des angles projetans des diverses distances qui y entrent, c'est-à dire des angles dont les couples de côtés s'appuient respec-

tivement sur les extrémités de ces distances, et sur un point quelconque de l'espace, pris pour sommet ou pour centre de projection.

Pareillement, par relation projective entre les sinus d'angles d'un faisceau quelconque de droites convergeants en un même point, nous entendrons toujours parler d'une relation qui subsisteroit également entre les distances correspondantes d'une figure, sur les différens points de laquelle s'appuieroient les droites ou projetantes du faisceau, et qui seroit projective pour cette figure. Or il suit de cette définition, que, si l'on coupe un tel faisceau par un plan arbitraire, et que, dans la relation qui lui appartient, on remplace chaque sinus d'angle par la distance qui, sur le plan arbitraire, soutend cet angle, la nouvelle relation devra avoir lieu également entre toutes les distances pareilles, et sera d'ailleurs projective pour la figure à laquelle ces distances appartiennent.

En supposant qu'on voulût distinguer, de tous les autres, le faisceau de droites qui vient d'être défini en particulier, on pourroit le nommer faisceau projectif; il est visible en effet, qu'un pareil faisceau, mis en perspective, conservera toujours les mêmes propriétés (voyez le Traité des propriétés projectives, N°s 10. 576. et suiv.).

122. Soit maintenant une figure quelconque *AMBC*... (Fig. 25.) donnée sur le plan d'un cercle (*S*) pris pour auxiliaire, et supposons qu'il existe entre les distances *AM*, *AB*, *BN*, . . . de cette figure une relation métrique projective; ces propriétés seront donc telles que, si l'on mène d'un point quelconque *V* du plan de la figure, un faisceau de droites projetantes *VA*, *VM*, *VB*, . . . vers les extrémités *A*, *M*, *B*, . . . de ces diverses distances, il y aura entre les sinus des angles formés par ces droites, la même relation qu'entre les distances dont ils sont les angles projetans respectifs. Passant donc à la figure réciproque de la proposée à l'égard du cercle auxiliaire quelconque (*S*), et observant que les projetantes *VA*, *VM*, *VB*, . . . ont pour pôles une suite de points *A'*, *M'*, *B'*, . . . rangés sur la polaire de *V*, et situés aux intersections respectives de cette polaire et de celles qui appartiennent aux extrémités *A*, *M*, *B*, . . . des distances que l'on considère, on en concluera (120.) que la relation projective qui existe entre ces distances, a lieu également dans la figure réciproque, entre les distances des points ou pôles qui appartiennent à la polaire de *V*; mais le point *V* est arbitraire; donc on peut énoncer ce théorême général, dont le réciproque est également vrai:

Une figure quelconque étant donnée sur un plan, s'il existe entre les diverses distances de ses points une relation métrique projective, la même relation existera aussi, dans la polaire réciproque de cette figure, prise par rapport à un cercle auxiliaire quelconque de son plan, entre les distances correspondantes formées sur une droite arbitraire par les intersections de cette droite avec les polaires des extrémités respectives des premières.

Et réciproquement:

S'il existe une relation pareille entre les distances des points d'intersections d'une transversale arbitraire et des diverses droites de l'une de ces figures, la même relation aura lieu aussi entre les distances de sa réciproque, qui ont pour extrémités respectives les pôles des droites dont il s'agit, pourvu toute fois qu'elle soit de la nature projective, quand on l'applique à cette réciproque.

123. Mais ce n'est pas tout encore, la relation métrique que nous supposions exister entre les droites MA, MB, MN, ... de la figure proposée ayant lieu aussi, d'après sa nature (121.), entre les sinus des angles projetans de ces distances, formés autour de S, pris en particulier pour centre de projection; et, d'un autre côté, chacun de ces angles, tel que DSC par exemple, ayant même sinus (109.) que l'angle $D'cC'$ formé par les polaires cD', cC' des extrémités D et C de la distance correspondante CD, on voit que, dans la figure réciproque de la proposée $AMBD\ldots$, la relation ci-dessus entre les distances, se change en une relation pareille entre les sinus des angles formés par les polaires des extrémités de chacune d'elles; d'où ce nouveau théorême général:

S'il existe entre les distances d'une figure plane quelconque une relation métrique projective, la même relation aura lieu encore, dans la réciproque de cette figure prise par rapport à un cercle auxiliaire quelconque de son plan, entre les sinus des angles formés par les polaires des extrémités respectives de ces distances.

Et réciproquement:

S'il existe une certaine relation entre les sinus des angles de certaines droites de la figure primitive, la même

relation aura lieu aussi entre les distances de la réciproque dont les extrémités respectives sont les pôles de ces droites, pourvu que cette relation soit, de sa nature, projective quand on l'applique à cette réciproque.

124. On peut remarquer en passant, qu'attendu la nature particulière des relations que nous venons d'examiner, ces différens théorêmes auroient lieu, d'une manière analogue, dans le cas où, à la place d'une cercle, on prendroit une section conique quelconque pour directrice ou auxiliaire; car on peut toujours considérer l'un de ces systèmes comme la perspective ou projection centrale de l'autre, pourvu néanmoins que les figures auxquelles ils se rapportent, soient elles mêmes projectives de leur nature, et ne concernent par conséquent aucune grandeur constante et déterminée.

Au sur plus, je crois devoir le dire expressément, cette observation, qui s'applique également au cas de l'espace que nous aurons bientôt à examiner, n'ajoute rien à la généralité des conséquences qu'il est possible de déduire des théorêmes précédens (107.) quoique leur énoncé suppose que les figures polaires réciproques soient prises simplement par rapport à un cercle auxiliaire; les reflexions générales présentées art. 100. et suivans sont donc également applicables au cas particulier dont il s'agit.

125. Nous allons terminer l'exposition de ces principes relatifs aux figures planes, par quelques applications particulières à des propositions déjà connues, seulement pour en faire pressentir la fécondité et les rendre familiers à l'esprit du lecteur. Et d'abord nous ferons observer, d'une manière générale, que les propriétés nombreuses de la Géométrie de la règle et de la théorie des transversales peuvent toutes recevoir l'application de ces principes, de sorte qu'elles sont susceptibles d'être immédiatement traduites en d'autres également intéressantes, et dont la plupart sont encore peu connues ou même entièrement ignorées des géomètres. En effet, ces relations ou propriétés, comme nous l'avons montré ailleurs, se rapportent essentiellement à ce que nous venons d'appeler relations ou propriétés projectives; mais, pour n'en pas rester à ces assertions générales, nous allons examiner successivement quelques exemples fort simples, en abandonnant au lecteur le soin de faire de semblables applications aux autres relations de la théorie des transversales.

Soit un polygone plan quelconque coupé par une droite arbitraire prise pour transversale, chaque point d'intersection formera deux segmens sur le côté correspondant, et l'on sait que le produit de la moitié de ces segmens, qui n'ont pas d'extrémités communes, égale le produit de tous les autres segmens; or, en passant à la polaire réciproque de cette figure, on aura à considérer (61.) un nouveau polygone $ABCD...E$ (Fig. 26.), des sommets duquel on aurait mené des droites vers un point quelconque V de son plan, représentant le pôle de la transversale. Mais chaque segment du premir polygone doit être remplacé (123.) par le sinus de l'angle des polaires qui répondent à ses extrémités, c'est-à-dire (61.) par le sinus de l'angle de chaque nouveau côté AB avec l'un des rayons vecteurs AV ou BV, correspondans; donc le produit des sinus de la moitié de ces angles qui appartiennent à des sommets différens du polygone $ABCD...F$, égale le produit des sinus de tous les autres; c'est-à-dire qu'on a $\sin VAF.\sin VFE.\sin VED.\sin VDC....\sin VBA = \sin VEA.\sin VEF.\sin VDE.\sin VCD....\sin VAB$.

D'ailleurs le polygone dont il s'agit est quelconque, aussi bien que le polygone primitif ou son réciproque, et il en est de même encore du point V; donc le principe qui précède est général et s'applique à toute espèce de polygones plans.

126. Le même principe a été établi, d'une autre manière, par Mr. Carnot, page 301. de la Géométrie de position; mais ce savant géomètre n'a pas remarqué que, si à travers le système de toutes les droites, formé tant par les côtés du polygone $ABCD...F$, que par les rayons ou projetantes qui joignent ses sommets au point V, on mène une nouvelle droite quelconque $b'e'$, prise pour transversale, la relation qui existe entre les sinus des angles ci-dessus avait également lieu entre les segmens af', fe', ed', ... interceptés par ces mêmes angles ou leurs supplémens, sur cette transversale; or c'est ce qui résulte évidemment du principe de l'art. 122., appliqué au cas particulier dont il s'agit.

Cette nouvelle proposition est d'ailleurs une conséquence des remarques faites aux articles 174. et 175. du Traité des propriétés projectives des figures, puisque les segmens de la transversale $b'e'$ sont véritablement la projection faite, du point V, des paires de segmens formés sur les différens côtés du polygone $ABCD...F$, à compter de cette même transversale.

127. Considérons encore un triangle, des sommets duquel on auroit abaissé, par un point quelconque, des droites sur les côtés opposés; elles détermineront, sur chacun de ces derniers, deux segmens, et tous ces segmens auront entr'eux, comme on sait, une relation analogue à celle qui vient d'être définie précédemment. En passant donc à la figure réciproque, on concluera immédiatement des principes déjà cités, cette nouvelle proposition: „Un triangle ABC (Fig. 27.) étant coupé par une droite arbitraire $B'C'A'$, si l'on joint chacun de ses sommets avec le point d'intersection du côté opposé, par une nouvelle droite, cette droite partagera en deux autres l'angle correspondant du triangle ou son supplément; or si l'on multiple entr'eux les sinus de trois quelconques de ces angles qui n'appartiennent pas aux mêmes sommets, ce produit sera égal à celui des sinus des trois autres angles."

On voit, en outre, que le système des trois droites ainsi tracées et des côtés du triangle, sera coupé par une nouvelle transversale rectiligne arbitraire ab, en six points, dont les distances auront entr'elles la même relation que les sinus des angles correspondans. Ces deux propositions s'étendraient aisément d'ailleurs à des polygones d'un nombre quelconque de côtés, au moyen du théorême de l'art. 159. du Traité des propriétés projectives.

128. Les mêmes principes, appliqués aux propositions qui font le sujet des articles 515. et 527. de cet ouvrage, et qui sont relatives aux polygones inscrits et circonscrits à des sections coniques quelconques, feroient voir que ces propositions sont réciproques entr'elles; de telle manière que, l'une d'elles étant supposée établie, l'autre s'ensuit immédiatement.

On s'assurera pareillement que les propositions des No. 29., 44. et 45. de notre précédent Mémoire sur les centres de moyennes harmoniques, sont respectivement les réciproques de celles du No. 42., et des première et deuxième propositions du No. 49. etc. On pourroit même en énoncer plusieurs autres d'un genre analogue, et que nous avons négligé de faire connoître dans le Mémoire cité; mais nous nous contenterons d'indiquer ces diverses recherches comme des exercices propres à faciliter l'intelligence des principes de la théorie des polaires réciproques, et nous passerons de suite à quelques exemples entièrement neufs, concernant les sections coniques et les courbes géométriques en général.

129. Soit d'abord une section conique quelconque (Fig. 28.), coupée par un triangle abc, dont les directions (A), (B), (C) des côtés prolongés, sont prises pour transversales de la courbe; on aura, comme on sait, en nommant p et p' les intersections de ab avec cette courbe, q et q' celles de bc, enfin r et r' celles de ac, la relation projective suivante:

$$\frac{ap.ap'}{bp.bp'}\cdot\frac{bq.bq'}{cq.cq'}\cdot\frac{cr.cr'}{ar.ar'}=1.$$

Si, de là, nous passons à la figure réciproque à l'égard d'un cercle pris pour auxiliaire, nous aurons à considérer (60. et 65.) un nouveau triangle ABC (Fig. 29.), dont les sommets seront les pôles respectifs des côtés du premier et vice versa, et une nouvelle section conique pour laquelle les paires de points p, p', q, q', r, r', appartenans aux intersections de la première et des côtés du triangle abc, se seront changés en des paires de tangentes (p), (p'); (q), (q'); (r), (r') issues des sommets respectifs C, A, B du triangle polaire ABC; donc on aura (123.), d'après la relation ci-dessus, et en convenant d'exprimer par (a,p), (a,p') etc. les angles formés respectivement par les droites (a) et (p), (a) et (p') etc.

$$\frac{\sin(a,p).\sin(a,p')}{\sin(b,p).\sin(b,p')}\cdot\frac{\sin(b,q).\sin(b,q')}{\sin(c,q).\sin(c,q')}\cdot\frac{\sin(c,r).\sin(c,r')}{\sin(a,r).\sin(a,r')}=1,$$

relation qu'on peut se contenter d'écrire ainsi pour plus de simplicité:

$$\frac{[\sin(a,p)]\,[\sin(b,q)]\,[\sin(c,r)]}{[\sin(b,p)]\,[\sin(c,q)]\,[\sin(a,r)]}=1,$$

et qui donne lieu à cet énoncé:

Un triangle étant situé quelque part sur le plan d'une section conique quelconque, si, de ses différens sommets, on mène des paires de tangentes à la courbe, chacune d'elles divisera l'angle correspondant du triangle ou son supplément en deux autres; cela posé, si l'on forme les différens produits de sinus des paires d'angles compris entre chaque côté et les tangentes issues de l'un de ses sommets, puis qu'on multiplie entr'eux trois quelconques de ces produits relatifs à trois sommets différens du triangle, on obtiendra un résultat qui sera le même que celui qu'on auroit en multipliant entre-eux les trois autres produits restans.

Ajoutons (122.) que, si l'on trace à volonté une transversale rectiligne br' à travers le système de toutes ces tangentes et des trois côtés du triangle ABC, et qu'on nomme respectivement a, b, c ses intersections

avec les côtés (a), (b), (c); p, p' ses intersections avec les tangentes (p), (p'), et ainsi de suite, on aura également la nouvelle relation,

$$\frac{ap.ap'}{bp.bp'}\cdot\frac{bq.bq'}{cq.cq'}\cdot\frac{cr.cr'}{ar.ar'}=1,$$

entièrement analogue à celle d'où nous sommes partis, et qui est relative au triangle transversal abc de la figure 28.

130. Maintenant si l'on observe que cette dernière relation, mise pour abréger sous la forme

$$\frac{(ap).(bq).(cr)}{(bq).(cq).(ar)}=1,$$

s'applique ou s'étend à une courbe quelconque du degré m prise pour transversale du triangle abc (Fig. 28.), on en conclura facilement (101.), que les propositions inverses qui précèdent, auront lieu également pour un triangle quelconque ABC (Fig. 29.) tracé sur le plan d'une telle courbe, et pour les trois grouppes de $m(m-1)$ tangentes issues des sommets de ce triangle; tout consistera simplement à étendre, d'une manière convenable, la signification des produits de segmens et de sinus compris dans chaque parenthèse tels que (ap), $[\sin(a,p)]$, de la même manière qu'on l'a fait pour le cas simple d'une section conique.

Enfin, puisque la proposition du triangle transversal, d'où nous sommes partis précédemment, s'étend à un polygone d'un nombre de côtés quelconque, il en est de même aussi des propositions inverses que nous en avons déduites à l'aide de la théorie des polaires réciproques.

Nous terminerons ici ces exemples, qu'il seroit facile de multiplier, pour reprendre, dans le paragraphe suivant, la théorie que nous n'avons encore exposée que pour le cas où les figures sont dans un même plan.

Des relations projectives entre les lignes trigonométriques et les distances des figures polaires réciproques dans l'espace.

131. Prenons toujours une surface sphérique dont S (Fig. 24.) est le centre, pour servir d'auxiliaire ou de directrice aux pôles et polaires; et considérons, en premier lieu, une suite de plans VA, VB, VC, . . . passant par une même droite V; leurs pôles respectifs A', B', C', . . . seront, comme on sait (77.), situés sur une même droite $D'E'$ polaire de V; et, si l'on joint chacun de ces pôles avec le centre S de

la sphère auxiliaire, par des droites ou rayons vecteurs, les angles appartenant à ce faisceau de droites, auront mêmes sinus (109.) que les angles correspondans du système de plans convergens VA, VB, VC, . . .; si donc (121.) il existe une certaine relation projective entre les sinus des premiers, elle aura lieu également entre ceux des seconds et vice versa. Mais d'après sa nature particulière, une telle relation ne sauroit avoir lieu entre les sinus des angles du faisceau SA', SB', SC', . . ., sans avoir lieu également entre les distances correspondantes qui séparent les points ou pôles A', B', C', . . . de la droite $D'E'$, et vice versa, donc:

S'il existe une relation métrique projective entre les distances de points quelconques rangés en ligne droite, elle aura lieu, de même, entre les sinus des angles correspondans des plans polaires de ces points.

Et réciproquement:

S'il existe une pareille relation entre les sinus des angles d'un système de plans passant par une même droite, la même relation aura lieu aussi entre les distances correspondantes des pôles de ces plans rangés en ligne droite.

132. On remarquera à ce sujet que, d'après la nature particulière des propriétés métriques projectives (121.), „plusieurs points A, B, C, . . . F, rangés sur une même droite, ne sauroient avoir entr'eux une telle relation, sans que cette relation n'eût lieu également entre les sinus des angles correspondans formés par les plans VA, VB, VC, . . . qui passeroient par ces points respectifs et par une droite quelconque V," et réciproquement que, „si elle a lieu pour les sinus de tels plans, elle aura lieu également pour les distances comprises, entre ces plans, sur une transversale quelconque AF."

Plus généralement encore, „si une relation métrique projective a lieu entre les distances appartenants aux points d'une figure quelconque $ABMCN$. . . (Fig. 25.) située dans l'espace, cette relation existera pareillement entre les sinus des angles dièdres dont les plans passeroient par leurs extrémités respectives et par une droite quelconque V." En effet, si l'on fait la projection orthogonale de toute la figure sur un plan perpendiculaire à l'arête commune V, cette même relation aura lieu, soit entre les distances simples de la projection, soit entre les sinus des angles

qui mesurent, sur le nouveau plan, les angles du faisceau de plans que l'on considère dans l'espace.

Quant à la proposition réciproque, elle ne peut avoir lieu (121.) qu'autant que la relation qu'on supposeroit exister entre les sinus des plans convergens, transportée aux distances de la figure correspondante, rempliroit, pour cette figure, les conditions assignées aux relations métriques projectives que nous considérons en particulier.

D'après les raisons déjà spécifiées à la fin du No. 121., on pourra pour plus de simplicité, désigner un système de plans, tels que celui qui vient d'être défini, par l'épithète de faisceau projectif.

133. Concevons maintenant que les plans VA, VB, VC, ... (Fig. 24.), au lieu de passer par une même droite, comme précédemment, soient seulement assujettis à avoir un point commun V; leurs pôles A', B', C', . . . cesseront d'être en ligne droite et seront simplement (76.) placés dans le plan $D'E'$ polaire de V; quant aux rayons ou projetantes SA', SB', SC', . . ., les sinus de leurs angles seront toujours égaux à ceux des plans qui passent par V et leur correspondent respectivement. Mais, lorsqu'il existe entre les distances d'une figure plane $A'B'C'D'$... une relation projective de la nature de celle que nous avons envisagées jusqu'à présent, elle doit aussi avoir lieu (121.) entre les sinus des angles projetans de ces distances, formés autour d'un point quelconque S, pris pour centre de projection, et réciproquement; donc une semblable relation ne sauroit avoir lieu, soit entre les angles dièdres des plans V, soit entre les angles plans des rayons S qui joignent leurs pôles au centre S, soit enfin entre les distances correspondantes de ces différens pôles, sans qu'elle n'eût lieu, de la même manière, pour les deux autres systèmes; principe qu'on peut énoncer ainsi:

S'il existe entre les distances des points d'une figure plane quelconque $D'E'$, une relation métrique projective, la même relation aura lieu aussi entre les sinus des angles dièdres formés par les plans polaires respectifs de ces points, plans qui convergent en un même point V.

Et réciproquement:

S'il existe une certaine relation entre les sinus des angles dièdres d'un faisceau V de plans convergens en un même point, elle aura lieu également entre les distances

des paires de points qui sont les pôles de ces plans; pourvu toute fois qu'elle satisfasse aux conditions de projectibilité (121.) dans la nouvelle figure.

134. Supposons, en outre, que, d'une droite quelconque X, on dirige des plans vers tous les points A', B', C', . . . du plan $D'E'$; la relation projective qui est censée avoir lieu entre les distances de ces points, aura lieu également entre les sinus des angles dièdres qui comprennent leurs extrémités respectives (132.); donc les pôles de ces plans, rangés sur une droite AF polaire de X, et situés à la rencontre de cette droite et des plans VA, VB, . . ., seront tels (131.) qu'il existera, entre leurs distances mutuelles, la même relation projective qu'entre les sinus des angles dièdres des plans qui en renferment les extrémités, ou qu'entre les distances de la figure plane A', B', C', . . .; c'est-à-dire que

Le système des plans qui convergent en V est tel que toute droite AF, prise pour transversale, y détermine des points dont les distances respectives ont, entr'elles, la même relation projective que celle qui existe entre les sinus des angles dièdres correspondans.

La réciproque de cette proposition s'établiroit de la même manière: c'est-à-dire que,

Si un faisceau de plans, convergent en un même point V, est tel que toute droite, prise pour transversale, y détermine un système de points jouissant d'une relation projective, la même relation aura lieu aussi entre les sinus des angles dièdres correspondans.

N'oublions pas toute fois que cette dernière relation doit satisfaire aux conditions de projectibilité, dans la figure formée par le système des pôles des plans, ainsi qu'il a été spécifié expressément à la fin de l'art. 133.

Par les raisons déjà déduites également dans le No. 121., pour les simples faisceaux de lignes droites, on pourrait nommer le faisceau de plans dont il s'agit, faisceau projectif, et la relation de sinus qui lui appartient, relation projective.

Enfin, si l'on coupe un tel faisceau de plans par un dernier plan arbitraire, il en résultera un système de lignes droites jouissant évidemment de la même propriété que ce faisceau à l'égard d'une transversale rectiligne quelconque: or un tel système de droites est très remarquable

en général, et nous avons déjà eu l'occasion d'en étudier les propriétés réciproques aux N°s 122. et 123.

135. Au lieu d'un système de plans VA, VB, VC, . . . (Fig. 24.), considérons maintenant un système de droites convergens en un point unique V de l'espace, et réprésentées par les mêmes lettres; les polaires réciproques A', B', C, . . . de ces droites seront situées (78.) dans un plan unique $D'E'$, polaire de V. Cela posé, admettons que le faisceau des droites V soit un faisceau projectif (121.); en le coupant par un plan arbitraire AF, il en résultera un certain nombre des points dont les distances respectives auront entr'elles la relation métrique projective qui appartient aux sinus des angles de ce faisceau. Mais en passant à la figure A', B', C', . . . polaire réciproque de celle dont il s'agit, à l'égard de la sphère (S), le plan AF sera remplacé par un point X pôle de ce plan, et ses différentes intersections A, B, C, . . ., avec les droites du faisceau, le seront par des plans passant par le point X et les différentes droites A', B', C', . . . réciproques de celles VA, AB, VC du même faisceau; donc, d'après les théorêmes ci-dessus (133.), les relations projectives qui ont lieu entre les sinus des angles de ces dernières droites appartiendront aux angles dièdres correspondans des plans XA', XB', XC', . . . qui, du point arbitraire X, projettent les droites réciproques A', B', C, . . . de celles là.

Ainsi le faisceau X des plans projetans sera analogue à celui qui a été défini ci-dessus (134.); il devra donc aussi jouir des mêmes propriétés; et, par exemple, „si on le coupe par une droite transversale arbitraire, il existera entre les distances respectives des points d'intersection, les mêmes relations projectives qu'entre les sinus des angles dièdres qui comprennent ces distances par leurs extrémités;" c'est ce que, au surplus, on pourroit établir directement à l'aide de la théorie de polaires réciproques, et par l'examen de ce qui se passe dans le faisceau primitif des projetantes V. Remarquons seulement que si, dans le plan des droites A', B', C', . . ., on trace une autre transversale rectiligne, les points où elle ira rencontrer ces droites devront jouir de la propriété dont il s'agit: en effet tout revient évidemment à prouver (131. et 77.) que si, „d'une droite arbitraire passant par le sommet du faisceau V, on mène des plans vers les différentes droites de ce faisceau, les sinus des angles de ces plans auront entr'eux les mêmes relations projectives que ceux

des angles formés respectivement par ces droites;" „or c'est ce qui a nécessairement lieu (132.) puisque ces plans et ces droites s'appuient sur les différens points d'une figure A, B, C, . . . dont les distances ont entr'elles, par hypothèse, les relations projectives dont il s'agit. Concluons donc de tout ce qui précède, que,

Etant donné, dans l'espace, un faisceau projectif de droites convergens en un même point, c'est-à-dire (121.) qui s'appuient sur les différens points d'une figure jouissant d'une certaine relation métrique projective, 1) la même relation aura lieu entre les sinus des angles correspondans des faisceaux; 2) le système *plan* des polaires réciproques des droites qui le composent, sera tel qu'en le coupant par une droite arbitraire, les distances respectives des intersections auront entr'elles la relation projective dont il s'agit; 3) si, d'un point quelconque de l'espace, on mène des plans vers ces mêmes polaires, les sinus de leurs angles auront encore entr'eux la même relation.

Il est d'ailleurs entendu que, dans ces diverses figures et relations, on a soin de prendre toujours les angles et les distances qui se correspondent directement. Quant à la proposition réciproque, elle est assez évidente par elle-même pour qu'il soit superflu de l'énoncer.

136. On tire, de ce qui précède, une nouvelle propriété du système de droites que nous avons considéré (art. 134.), laquelle peut s'énoncer ainsi:

Quand un système de droites quelconques A', B', C', . . . situées dans un plan, est tel qu'en le projetant d'un certain point X de l'espace, par de nouveaux plans, les angles dièdres qu'ils forment ont entre leurs sinus une certaine relation métrique projective (134.). La même relation a lieu également pour tout autre faisceau de plans projetans, déterminés par un point quelconque de l'espace.

J'ajouterai pour dernière remarque que, quand les droites du faisceau V sont dans un même plan, non seulement il en est ainsi de leurs réciproques A', B', C', . . ., mais qu'encore celles-ci concourent également en un point uniquo, pôle du plan des premières; de plus, il est visible que les relations projectives de l'un de ces faisceaux appartien-

dront aussi à l'autre, en sorte qu'ils seront parfaitement réciproques entr'eux.

137. Ces préliminaires nous mettent en état d'aborder directement le cas général où l'on a à considérer des relations métriques projectives appartenants à une figure quelconque dans l'espace, ou à la polaire réciproque à l'égard d'une sphère prise à volonté pour auxiliaire.

Soit en effet A, M, B, N, C, . . . (Fig. 25.) le système des points proposés, S le centre de la sphère prise pour auxiliaire; supposons qu'il existe une certaine relation métrique projective entre les distances AM, MB; . . . CP, PD, appartenant à ces points; par un raisonnement analogue à celui du No. 123. et qu'il est inutile de reproduire, on concluera que la même relation devra avoir lieu entre les sinus des angles dièdres correspondans des plans aA', aM', . . . cP', cC' polaires des extrémités de ces distances respectives. On pourra donc énoncer, pour le cas de l'espace, ce théorême entièrement analogue à celui de l'endroit cité:

S'il existe entre les diverses distances d'une figure donnée dans l'espace, une relatiion métrique projective, la même relation aura lieu également entre les sinus des angles dièdres formés par les plans polaires des extrémités respectives de ces distances, par rapport à une sphère auxiliaire quelconque.

Et réciproquement:

S'il existe une certaine relation entre les sinus des angles dièdres des plans d'une figure quelconque, la même relation aura lieu aussi entre les distances de la réciproque, dont les extrémités respectives sont les pôles de ces paires de plans; pourvu que cette relation soit, de sa nature, projective quand on l'applique à cette réciproque.

138. Supposons maintenant que, d'une droite quelconque V de l'espace, on mène des plans vers les différens points de la figure $AMBC$... considérée ci-dessus, le faisceau de ces plans sera projectif (132.) puisque, par hypothèse, les distances de cette figure ont entr'elles une relation projective; donc on concluera immédiatement ce théorème du principe de l'art. 131., en observant que les plans VA, VB, VM, . . . dont il s'agit et qui renferment les différens points de la figure proposée,

ont leurs pôles situés à la rencontre de la polaire de la droite quelconque V et des plans polaires des points respectifs A, B, M, . . .:

S'il existe, entre les diverses distances d'une figure donnée dans l'espace, une relation métrique projective, la même relation existera pareillement dans la figure réciproque, entre les distances correspondantes formées, sur une droite arbitraire, par les intersections de cette droite avec les plans polaires des extrémités respectives des premières distances.

Et réciproquement:

S'il existe une semblable relation entre les distances des points d'intersection d'une droite arbitraire et des divers plans d'une figure donnée dans l'espace, la même relation aura lieu aussi entre les distances de la figure réciproque, qui ont pour extrémités respectives les pôles des plans dont il s'agit; pourvu toute fois (132.) que cette relation soit, de sa nature, projective quand on l'applique à cette réciproque.

Autrement en effet, la relation auroit simplement lieu (131.) entre les sinus des angles dièdres formés par un faisceau de plans menés, d'une droite arbitraire, vers les différens points de cette même réciproque.

139. Les principes des N°s 133., 134. et suivans, concernant les faisceaux de droites et de plans, conduisent à plusieurs autres théorêmes analogues relatifs aux figures polaires dans l'espace; mais il seroit superflu de s'y arrêter, vu qu'ils sont faciles à deviner et à saisir, lorsqu'on s'est bien pénétré de ces principes, et en général de ceux qui appartiennent a la théorie des polaires réciproques dans l'espace.

Au surplus, dans les applications de ces divers principes à des figures données, il ne faudra pas dédaigner la remarque suivante, très propre à faciliter les moyens de traduire les énoncés des relations qui leurs sont applicables.

„Ayant marqué à l'ordinaire, par des lettres quelconques les différens points de la figure proposée, on en placera d'autres entièrement différentes sur les droites, les plans, les lignes et les surfaces qui y entrent, c'est-à-dire que chacune de ces lignes et surfaces se trouvera représentée par une lettre distincte dans la figure proposée."

„Cela fait, on affectera des mêmes lettres les points, les plans, les droites, les lignes et les surfaces de la figure polaire, qui sont respectivement réciproques de ceux de la figure primitive; on n'aura plus alors qu'à remplacer, dans les relations métriques qui leur appartiennent respectivement, chaque distance qui y entre par le sinus de l'angle des deux droites ou des deux plans représentés par les lettres de ses extrémités; et réciproquement à remplacer chaque sinus d'angle par la distance des deux points représentés par les lettres qui désignent ses èdres ou côtés: par exemple, les distances ab, bc se changeront en $\sin(a,b)$, $\sin(b,c)$ et vice versa etc." Du reste, pour éviter la confusion, on pourra mettre entre parenthèses les lettres qui appartiennent aux lignes et aux surfaces, en réservant les lettres simples pour les points."

140. On a déjà eu occasion de voir, à la fin du paragraphe précédent (129.), l'usage que l'on peut faire de cette notation très simple, et les avantages qui en résultent pour la traduction des relations métriques des figures qui sont polaires réciproques sur le plan d'un cercle pris pour auxiliaire. Les considérations et les principes qui précèdent mettent en état d'étendre les conséquences auxquelles nous sommes parvenus alors, au cas où les figures que l'on considère sont situées dans l'espace, et où les courbes sont remplacées par des surfaces quelconques du même ordre: c'est à indiquer rapidement quelques unes de ces applications particulières, que je vais consacrer les dernières pages de ce Mémoire, afin de ne pas m'écarter de la marche que j'ai constamment suivie j'usqu'à présent.

Sans m'occuper d'ailleurs du cas, en quelque sorte élémentaire, des figures rectilignes et polyèdrales dans l'espace, coupées simplement par des droites ou de plans arbitraires, lequel conduiroit, sans peine, à plusieurs propositions intéressantes et que je dois me borner à recommander à l'attention des géomètres, je ferai de suite observer, d'après Carnot, que le principe (129.) du triangle et du polygone plan, coupés par une courbe géométrique du degré m, s'applique également à un polygone gauche coupé par une surface géométrique du même ordre, prise pour transversale de ce polygone. Or de là résulte, pour l'espace, un principe entièrement analogue à celui de l'art. 130. est qui est tout aussi général.

141. En effet, le polygone gauche dont il s'agit, aura pour réciproque à l'égard d'une sphère, un polyèdre indéfini (81.) dont les

arêtes seront réciproques des côtés de ce polygone; de sorte que les plans tangens, menés, de ces arêtes, à la surface polaire de la proposée, auront pour pôles respectifs (77. et 91.) les intersections de celle-ci avec les côtés correspondans du polygone gauche: tout consistera donc (101., 137. et 138.) à substituer, pour le cas actuel de l'espaee, un polyèdre indéfini au triangle des théorêmes énoncés en particulier (129.), pour la section conique, une surface de l'ordre m à cette section conique, les arêtes du polyèdre aux sommets du triangle, les plans tangens passant par ces arêtes respectives aux tangentes relatives à ces sommets, enfin les angles dièdres formés par chaque plan tangent et l'une des faces correspondantes du polyèdre, à l'angle formé par chaque tangente et par l'un des côtés correspondans du triangle.

L'énoncé des deux théorêmes auxquels on arrive ainsi, se simplifie un peu dans le cas où le polygone primitif se réduit à un triangle, et dans celui où il se trouve compris tout entier dans un plan; car alors le polyèdre réciproque se réduit lui-même (81.) à un angle solide trièdre ou à un angle solide d'un nombre quelconque de faces ou d'arêtes passant par un même point.

Au surplus les principes des N°s 133. et suivans, appliqués de même à la proposition du polygone gauche coupé par une surface quelconque de l'ordre m, conduiroient à d'autres conséquences non moins intéressantes et non moins étendues que celles qui viennent de nous occuper; mais il nous suffit, pour le moment, d'indiquer, d'une manière générale, ces corollaires faciles de la théorie des polaires réciproques.

142. Pour terminer, nous considérerons encore une courbe à double courbure quelconque de l'ordre m; l'enveloppe des plans polaires de ses points sera (82. et 84.) une surface développable de l'ordre $m(m-1)$, à laquelle le théorême du polygone transversal demeurera applicable directement en vertu de la loi de continuité. Or tout point d'intersection d'une certaine droite avec cette développable, sera remplacé (83.) par un plan tangent de la courbe primitive, passant par la réciproque de cette droite; donc le théorême qui précède, relatif à un polyèdre indéfini, des arêtes duquel on a mené des plans tangens à une surface géométrique, subsiste également pour le cas où l'on substitue une courbe à double courbure quelconque à cette surface.

Il seroit inutile d'étendre davantage ces exemples et ces applications de nos principes, et je crois en avoir assez dit pour montrer tout le parti qu'on en peut tirer dans le besoin et pour lever toute espèce de difficultés. Je crois, en outre, avoir prouvé que le nombre des propositions de la Théorie des transversales et de la Géométrie de la règle, ou pour m'exprimer plus généralement, le nombre des relations et des propriétés projectives des figures peut, dès à présent, être doublé et même triplé, sans qu'on éprouve d'autres embarras que de modifier leur énoncé d'après des règles bien connues et bien établies.

Dans la suite de ces recherches je m'occuperai uniquement des propriétés générales des courbes et des surfaces géométriques, et j'aurai souvent occasion d'employer les principes de la théorie des polaires réciproques, et d'en montrer ainsi l'utilité et la fécondité d'une manière plus positive. Je ne doute pas d'ailleurs que les géomètres ne s'empressent d'adopter une théorie qui offre autant de ressources, et dont les principes seroient, peut-être, difficilement supplées par d'autres, dans certaines recherches générales relatives aux figures.

Post-scriptum. Il n'a paru jusqu'ici, de ce Mémoire, que l'analyse que j'en ai adressée, à la fin de 1826, à M. le rédacteur des Annales de mathématiques, et le rapport de MM. les commissaires de l'Institut, inséré, en avril dernier, dans le Bulletin des sciences de M. le Baron de Férussac. Mais, comme la matière dont il traite a fait récemment l'objet des recherches de plusieurs géomètres, je crois devoir déclarer qu'il paraît ici conforme au manuscrit déposé, en 1824, à l'académie des sciences, et qui a été paraphé, dans toutes ses parties, par M. le Baron Fourier, secrétaire perpétuel. Je crois aussi devoir prévenir que lors de la lecture que je fis, au sujet de ce Mémoire, dans la séance du 12. avril de 1824, je développai et fis ressortir plusieurs des applications générales qui s'y trouvent simplement indiquées et qui ont été depuis mentionnées dans l'analyse ci-dessus. Telles sont, en particulier, les propriétés angulaires et descriptives concernant les lignes et surfaces du second ordre que je nommai homofocales ou confocales, parcequ'elles ont un foyer commun, propriétés qui sont, en général (166.), les polaires réciproques de celles qui appartien-

nent à un système de cercles ou de sphères quelconques situés dans un plan ou dans l'espace, et qui deviennent les réciproques de celles des cercles ou des sphères concentriques (115.), quand les lignes et les surfaces ont même polaire ou même plan polaire focal, c'est-à-dire même directrice ou même plan directeur. Je montrai, par des exemples, comment ces propriétés sont, quant aux relations de situation, entièrement analogues à celles des lignes et surfaces du second degré qui, étant inscrites dans un même angle ou dans un même cône, peuvent être envisagées comme la perspective, dans un plan ou en relief, les unes des autres, propriétés développées dans mon grand ouvrage et qui, dans le cas actuel, résultent de ce que le foyer commun est, en effet, idéalement pour toutes les surfaces, le sommet d'un tel angle ou d'une tel cône circonscrit, ou plus généralement, ce que j'ai nommé un centre de projection, un centre d'homologie *).

Parmi les propriétés particulières du foyer général des surfaces du second degré, je signalai comme les plus importantes, celles des sections planes de ces surfaces, qui, d'un tel foyer, sont vues sous l'aspect de cercles qui appartiendraient tous à une sphère ayant ce foyer pour centre, et celles qu'ont les tangentes conjuguées de ces surfaces, d'être vues, de ce même foyer, sous un angle droit formé par les plans qui contiennent ces tangentes, propriétés qui ont servi à M. Dupin (Applications de Géométrie, 4me Mémoire, pag. 210. et suiv.) pour établir sa belle théorie des faisceaux lumineux réfléchis à leur rencontre avec une surface quelconque. Je fis voir encore „qu'un système quelconque de surfaces du second ordre, confocales, lequel peut comprendre aussi des sphères ayant le foyer commun pour centre, s'entrecoupent, deux à deux, suivant des sections coniques dont les plans concourent trois à trois en une même

*) Dans le cas particulier où les lignes et surfaces ont, en outre, même directrice et même plan directeur, c'est-à-dire même droite ou même plan polaire focal, leur système a cette droite et ce plan pour corde idéale commune ou plan idéal commun de contact, ce qui entraine, comme j'en ai déjà fait la remarque au No. 456. du Traité des propriétés projectives, une foule de propriétés dont celles qui concernent simplement les sections coniques, ont été étudiées spécialement dans le dernier chapitre de la sect. III. de ce Traité, et qui d'ailleurs sont tout à fait analogues à celles qui appartiennent aux cercles et aux sphères concentriques, l'un de ces systèmes étant la projection ou perspective de l'autre.

droite, et quatre à quatre en un même point; que les développables circonscrites à ces surfaces, prises deux à deux, sont des cônes du second degré qui s'entrecoupent suivant des courbes du même degré et dont les sommets sont, trois par trois, en ligne droite et quatre par quatre en un même plan; que les pôles de tout plan passant par le foyer commun, pris par rapport à ces surfaces respectives, sont situés sur un même rayon vecteur perpendiculaire à ce plan; que les cônes, circonscrits à ces surfaces suivant les sections déterminées par ce même plan, s'entrecoupent, deux à deux, suivant des lignes du second degré, dont les plans sont aussi les plans de section des surfaces auxquels ils appartiennent etc. etc.; qu'enfin ces diverses relations permettent de construire très simplement et sous des conditions données, toute surface du second degré dont le foyer général est assigné ou doit être commun à cette surface et à d'autres surfaces données, et qu'elles permettent aussi de construire les plans de section commune à un système de surfaces confocales etc. etc.;" ce à quoi revient en dernière analyse, comme on sait, la recherche du centre de la sphère tangente à quatre autres dans l'espace, puisque ce centre doit se trouver à l'intersection mutuelle de surfaces du second degré de révolution qui ont pour foyer commun le centre de l'une quelconque des sphères données.

Metz le 20. Août 1828.

Poncelet.

2.

Beobachtungen über die Schwere, welche in den Häfen von Europa, America und Asien, auf dem stillen Meere und in Neuholland, während Malaspina's Weltumsegelung, mit dem unveränderlichen Pendel angestellt worden sind.

(Mitgetheilt vom Herrn Professor *Oltmanns* zu Berlin.)

Seitdem man in Frankreich (so heifst es in dem Berichte) damit umgeht, ein System von Maafs und Gewicht auf die Länge des Pendels, welches unter dem 45sten Grade der Breite Secunden schlägt, zu gründen, hat der König für zweckdienlich gehalten, während Malaspina's Weltumsegelung, auch Beobachtungen über diesen interessanten Gegenstand an schicklichen Puncten anstellen zu lassen, damit man aus ihrer Vergleichung die wahre Gestalt der Erde herleiten, und bestimmen könne, ob die südliche Halbkugel mehr abgeplattet sei, als die nördliche, auch wie grofs dieser Unterschied sei.

Da diese verschiedenen Fragen blofs aufgelöst werden konnten durch Messung verschiedener Breitengrade in verschiedenen Gegenden, oder durch Pendelbeobachtungen, welche an verschiedenen Orten gemacht worden, so gab der König von Spanien Befehl, solche Beobachtungen durch die Schiffscapitaine Don Josef de Espinosa und Don Ciriaco Cevallos anstellen zu lassen.

Da ferner, um zur Kenntnifs der Gestalt der Meridiane zu gelangen, Pendelbeobachtungen, welche an zwei schicklich gelegenen Orten gemacht worden, die besten Mittel darbieten, so beschlofs der König, unter dem 45sten Grade südlicher Breite diejenigen Beobachtungen anstellen zu lassen, welche die französischen Academiker unter gleicher nördlicher Breite machten.

Die Beobachtungen, welche die spanischen Officiere von Malaspina's Geschwader angestellt haben, sind, sammt den von ihnen daraus abgeleiteten Resultaten, folgende:

Tafel I.

Vergleichung der Pendelbeobachtungen mit der Rechnung; unter Voraussetzung einer Abplattung von $\frac{1}{313}$ und dafs das unveränderliche Pendel 3607 Schwingungen in einer Stunde unter dem Aequator mache, so wie solche aus sechs ihm zunächst gelegenen Beobachtungen abgeleitet worden sind.

Oerter	Breite	Schwingungen: berechnete	Schwingungen: beobachtete	Unterschiede: positive	Unterschiede: negative
In der nördlichen Halbkugel					
Mulgrave . . .	59° 33′	3614,63	3614,85	0,22	. . .
Nutka	49° 53′	3612,95	3612,21	. . .	0,74
Monterey . . .	36° 36′	3610,65	3609,75	. . .	0,90
Cadiz	36° 32′	3610,64	3610,24	. . .	0,40
Macao	23° 12′	3608,59	3607,58	. . .	1,01
Acapulco . . .	16° 50′	3607,86	3607,83	. . .	0,03
Manila	14° 36′	3607,65	3608,06	0,41	. . .
Umatag	13° 18′	3607,54	3607,07	. . .	0,47
Zamboanga . .	6° 55′	3607,15	3607,25	0,10	. . .
Equador	0° 0′	3607,00	3607,00	. . .	. . .
In der südlichen Halbkugel					
Puerto Egmont .	51° 21′	3613,26	3612,73	. . .	0,53
Santa Elena . .	44° 30′	3612,04	3612,37	0,33	. . .
Concepcion . .	36° 42′	3610,66	3610,29	. . .	0,37
Montevideo . .	34° 55′	3610,30	3610,38	0,02	. . .
Puerto Jakson .	33° 51′	3610,18	3610,20	0,02	. . .
Isla Babao . . .	18° 39′	3608,05	3608,12	0,07	. . .
Lima	12° 5′	3607,45	3607,39	. . .	0,06
Equador	0° 0′	3607,00	3607,00	. . .	. . .

Tafel II.

Vergleichung der Pendelbeobachtungen mit der Rechnung, unter Voraussetzung einer Abplattung von $\frac{1}{321}$ und dafs das unveränderliche Pendel 3607 Schwingungen in einer Secunde unter dem Aequator mache, so wie solche aus sechs ihm zunächst gelegenen Beobachtungen abgeleitet worden sind.

Oerter	Breite	berechnete Schwingungen	beobachtete Schwingungen	positive Unterschiede	negative Unterschiede
In der nördlichen Halbkugel					
Mulgrave . . .	59° 33′	3614,47	3614,85	0,38	. . .
Nutka	49° 35′	3612,83	3612,21	. . .	0,62
Monterey . . .	36° 36′	3610,58	3609,75	. . .	0,83
Cadiz	36° 32′	3610,57	3610,24	. . .	0,33
Macao	23° 12′	3608,57	3607,58	. . .	0,99
Acapulco . . .	16° 50′	3607,86	3607,83	. . .	0,03
Manila	14° 36′	3607,66	3608,06	0,40	. . .
Umatag	13° 18′	3607,55	3607,07	. . .	0,48
Zamboanga . .	6° 5′	3607,17	3607,25	0,08	. . .
Equador	0° 0′	3607,02	3607,02	. . .	. . .
In der südlichen Halbkugel					
Puerto Egmont .	51° 21′	3613,13	3612,73	. . .	0,40
Santa Elena . .	44° 30′	3611,94	3612,37	0,43	. . .
Concepcion . .	36° 42′	3610,60	3610,29	. . .	0,31
Montevideo . .	34° 55′	3610,30	3610,38	0,08	. . .
Puerto Jakson .	33° 51′	3610,13	3610,20	0,07	. . .
Isla Babao . . .	18° 39′	3608,04	3608,12	0,08	. . .
Lima	12° 5′	3607,46	3607,39	. . .	0,07
Equador	0° 0′	3607,02	3607,02	. . .	. . .

Tafel III.

Länge des einfachen Secundenpendels, so wie solche für die Abplattung von $\frac{1}{330}$ berechnet und nach den Beobachtungen mit dem unveränderlichen Pendel gefunden worden, unter der Annahme, dafs die Länge des Secundenpendels am Aequator nach Bouguer's Beobachtungen 439,21 pariser Linien ist.

Oerter	Breite	berechnete Schwingungen	beobachtete Schwingungen	positive Unterschiede	negative Unterschiede
In der nördlichen Halbkugel					
Mulgrave . . .	59° 33′	441,07	441,12	0,05	. . .
Nutka	49° 35′	440,66	440,48	. . .	0,18
Monterey . . .	36° 36′	440,10	439,88	. . .	0,22
Cadiz	36° 32′	440,09	440,00	. . .	0,09
Macao	23° 12′	439,60	439,35	. . .	0,25
Acapulco . . .	16° 50′	439,42	439,41	. . .	0,01
Manila	14° 36′	439,37	439,47	0,10	. . .
Umatag	13° 18′	439,34	439,23	. . .	0,11
Zamboanga . .	6° 55′	439,25	439,27	0,02	. . .
Equador	0° 0′	439,21	439,21	. . .	. . .
In der südlichen Halbkugel					
Puerto Egmont .	51° 21′	440,74	440,61	. . .	0,13
Santa Elena . .	54° 30′	440,44	440,52	0,08	. . .
Concepcion . .	36° 42′	440,10	440,01	. . .	0,09
Montevideo . .	34° 55′	440,03	440,03	. . .	. . .
Puerto Jakson .	33° 51′	439,98	439,99	0,01	. . .
Isla Babao . . .	18° 39′	439,47	439,48	0,01	. . .
Lima	12° 5′	439,32	439,31	. . .	0,01
Equador	0° 0′	439,21	439,21	. . .	. . .

Tafel IV.

Länge des einfachen Secundenpendels, so wie solche für die Abplattung von $\frac{1}{321}$ berechnet und nach den Beobachtungen mit dem unveränderlichen Pendel gefunden worden, in der Annahme, dafs das Secundenpendel unter dem Aequator nach Bouguer's Beobachtungen 439,21 pariser Linien lang ist.

Oerter	Breite	berechnete Schwingungen	beobachtete Schwingungen	positive Unterschiede	negative Unterschiede
In der nördlichen Halbkugel					
Mulgrave . . .	59° 33′	441,03	441,12	0,09	. . .
Nutka	49° 35′	440,63	440,47	. . .	0,16
Monterey . . .	36° 36′	440,08	439,88	. . .	0,20
Cadiz	36° 32′	440,08	439,99	. . .	0,09
Macao	23° 12′	439,59	439,35	. . .	0,24
Acapulco . . .	16° 50′	439,41	439,41	. . .	. . .
Manila	14° 36′	439,37	439,46	0,09	. . .
Umatag	13° 18′	439,34	439,22	. . .	0,12
Zamboanga . .	6° 55′	439,25	439,27	0,02	. . .
Equador	0° 0′	439,21	439,21	. . .	. . .
In der südlichen Halbkugel					
Puerto Egmont .	51° 21′	440,70	440,60	. . .	0,10
Santa Elena . .	44° 30′	440,41	440,51	0,10	. . .
Concepcion . .	36° 42′	440,08	440,01	. . .	0,07
Montevideo . . .	34° 55′	440,01	440,03	0,02	. . .
Puerto Jakson .	33° 51′	439,97	439,99	0,02	. . .
Isla Babao . . .	18° 39′	439,46	439,48	0,02	. . .
Lima	12° 5′	439,32	439,30	. . .	0,02
Equador	0° 0′	439,21	439,21	. . .	. . .

Tafel V.

Vergleichung der Schwere, welche der berechneten Abplattung von $\frac{1}{230}$ entspricht, mit derjenigen, welche das unveränderliche Pendel angegeben hat, wenn man dabei die Länge zur Einheit annimmt, welche unter dem Aequator beobachtet worden ist.

In der nördlichen Halbkugel

Oerter	Breite	berechnete Schwingungen	beobachtete Schwingungen	positive Unterschiede	negative Unterschiede
Mulgrave . . .	59° 33′	1,00423	1,00436	0,00013	. . .
Nutka	49° 35′	1,00330	1,00289	. . .	0,00041
Monterey . . .	36° 36′	1,00203	1,00153	. . .	0,00050
Cadiz	36° 32′	1,00202	1,00180	. . .	0,00022
Macao	23° 12′	1,00088	1,00032	. . .	0,00056
Acapulco . . .	16° 50′	1,00048	1,00046	. . .	0,00002
Manila	14° 36′	1,00036	1,00059	0,00023	. . .
Umatag	13° 18′	1,00030	1,00004	. . .	0,00026
Zamboanga . .	6° 55′	1,00008	1,00014	0,00006	. . .
Equador	0° 0′	1,00000	1,00000	. . .	. . .

In der südlichen Halbkugel

Puerto Egmont .	51° 21′	1,00347	1,00318	. . .	0,00029
Santa Elena . .	44° 30′	1,00280	1,00298	0,00018	. . .
Concepcion . .	36° 42′	1,00203	1,00183	. . .	0,00020
Montevideo . .	34° 55′	1,00186	1,00188	0,00002	. . .
Puerto Jakson .	33° 51′	1,00176	1,00178	0,00002	. . .
Isla Babao . . .	18° 39′	1,00058	1,00062	0,00004	. . .
Lima	12° 5′	1,00025	1,00022	. . .	0,00003
Equador	0° 0′	1,00000	1,00000	. . .	. . .

Tafel VI.

Vergleichung der Schwere, welche der berechneten Abplattung $\frac{1}{321}$ entspricht, mit derjenigen, welche das unveränderliche Pendel angegeben hat, wenn dabei die unter dem Aequator beobachtete Länge als Einheit angenommen wird.

In der nördlichen Halbkugel

Oerter	Breite	berechnete Schwingungen	beobachtete Schwingungen	positive Unterschiede	negative Unterschiede
Mulgrave . . .	59° 33′	1,00414	1,00435	0,00021	. . .
Nutka	49° 35′	1,00322	1,00288	. . .	0,00034
Monterey . . .	36° 36′	1,00198	1,00151	. . .	0,00047
Cadiz	36° 32′	1,00197	1,00179	. . .	0,00018
Macao	23° 12′	1,00086	1,00031	. . .	0,00055
Acapulco . . .	16° 50′	1,00047	1,00045	. . .	0,00002
Manila	14° 36′	1,00036	1,00058	0,00022	. . .
Umatag	13° 18′	1,00029	1,00003	. . .	0,00026
Zamboanga . .	6° 55′	1,00008	1,00013	0,00005	. . .
Equador	0° 0′	1,00000	1,00000	. . .	. . .

In der südlichen Halbkugel

Puerto Egmont .	51° 21′	1,00339	1,00317	. . .	0,00022
Santa Elena . .	44° 30′	1,00273	1,00297	0,00024	. . .
Concepcion . .	36° 42′	1,00199	1,00181	. . .	0,00018
Montevideo . .	34° 55′	1,00182	1,00186	0,00004	. . .
Puerto Jakson .	33° 51′	1,00173	1,00176	0,00003	. . .
Isla Babao . . .	18° 39′	1,00057	1,00061	0,00004	. . .
Lima	12° 5′	1,00024	1,00021	. . .	0,00003
Equador. . . .	0° 0′	1,00000	1,00000	. . .	. . .

Die letzten Colonnen der ersten und zweiten Tafel zeigen, dafs die verschiedenen Annahmen der Erdplattung einen nur geringen Einfluſs auf die Bestimmung der Schwingungen des unveränderlichen Pendels unter dem Aequator gehabt haben. Vergleichen wir in beiden Tafeln die Beobachtung zu Umatag mit der zu Manila, die zu Nutka und Mulgrave und die von St. Helena mit der in Puerto Egmont angestellten, so finden wir Unterschiede von 10 Schwingungen in einem Tage, bei einem Systeme der Abplattung wie bei dem andern. Diese Unregelmäfsigkeiten müssen der Heterogeneität der Erde zugeschrieben werden. Die Beobachtungen, welche sich zur Bestimmung der Erdabplattung vorzüglich eignen, sind die unter dem Aequator und in hohen Breiten angestellten.

Wenden wir also zu diesem Endzwecke die in Mulgrave und Nutka angestellten Beobachtungen an, welche am weitesten vom Aequator in der nördlichen Halbkugel entfernt sind, so finden wir die Erdabplattung $\frac{1}{310}$.

Die zu Mulgrave, Nutka, Monterey und Cadiz angestellten Beobachtungen geben die Abplattung $\frac{1}{283}$. Die in Puerto Egmont und St. Helena angestellten, geben die Abplattung der südlichen Halbkugel $\frac{1}{323}$; Puerto Egmont, St. Helena, Concepcion, Montevideo und Puerto Jakson geben $\frac{1}{318}$. Die sechste Tafel zeigt bei Manila eine unregelmäfsige Zunahme der Schwere.

Darstellung der Prinzipien, wonach die Beobachtungen mit dem unveränderlichen Pendel berechnet worden sind.

Die Länge des einfachen Pendels, welches unter dem Aequator Secunden schlägt, verhält sich zu der unter einer andern Breite, wie eine constante Gröfse z zu dieser + einer andern constanten Gröfse y, multiplicirt mit dem Quadrat des Sinus der Breite, welche wir l nennen wollen.

Die Schwingungen verhalten sich wie die Quadratwurzeln dieser Zahlen.

Nennt man n die Zahl der Schwingungen eines Pendels unter dem Aequator, und x diejenige, welche einer andern Breite entspricht, so haben wir

$$z^{\frac{1}{2}} : (z + y \sin^2 l)^{\frac{1}{2}} = n : x, \text{ also } x = \frac{(z + y \sin^2 l)^{\frac{1}{2}}}{z^{\frac{1}{2}}} . n.$$

Vermöge des binomischen Lehrsatzes ist

$$(z+y\sin^2 l)^{\frac{1}{2}} = z^{\frac{1}{2}} + \frac{y\sin^2 l}{2z^{\frac{1}{2}}},$$

wobei die folgenden Glieder der Reihe vernachläfsiget werden durften, weil z viel gröfser ist als $y\sin^2 l$, woraus sich ergiebt

$$x = \frac{z^{\frac{1}{2}} + \frac{y\sin^2 l}{2z^{\frac{1}{2}}}}{z^{\frac{1}{2}}}.n = n + \frac{y}{2z}n.\sin^2 l.$$

Diese Formel zeigt, dafs man, wenn man den Logarithmus von y zum arithmetischen Complemente des Logarithmus von $2z$ hinzufügt, und dazu den Logarithmus von n und den doppelten Logarithmus des Sinus der Breite setzt, den Logarithmus der Zahl findet, welcher zu n hinzugefügt werden mufs, um durch die Schwingungen unter dem Aequator die Zahl der Schwingungen unter einer andern Breite zu erhalten.

Dies vorausgesetzt ist nach Laplace *Mec. cel. Tom. II. p.* 149. für eine Abplattung von $\frac{1}{321}$, $z = 0{,}99687$, $y = 0{,}00554$, wenn man die zehn Millionen Theile vernachläfsiget, und da nun $n = 3607{,}02$ angenommen wird, so rechnet man im gegenwärtigen Falle wie folgt:

log. compl. $2z$ = 4,7003315
log. y = 2,7435098
log. n = 3,5571461 + 24
also const. log. ..... 1,0009898.

Beispiel 1. Const. log. 1,000990
Breite von Mulgrave 59° 33′ log sin² 9,935543 + 9,935543
0,872076.
Dazu gehörige Zahl 7,4486,
Zahl der Schwingungen oder n = . . . 3607,0200,
folglich Zahl der Schwingungen in Mulgrave 3614,47 nach der Rechnung.

Beispiel 2. Const. log. 1,000990
Breite von Zamboanga 6° 55′ log sin² 9,080719 + 9,080719
9,162428.

Zugehörige Zahl 0,1454,
Zahl der Schwingungen unter dem Aequator . . 3607,0200,
folglich Zahl der Schwingung in Zamboanga 3607,17 nach der Rechnung.

Die Schwingungen, welche das unveränderliche Pendel unter dem Aequator haben müfste, sind durch eine Art von Regula Falsi berechnet worden, um nemlich zu sehen, wie man sie annehmen müfste; damit aus der Vergleichung der sechs Beobachtungen mit der Rechnung, die Summe der positiven Unterschiede eben so grofs als die Summe der negativen sei.

Für $\frac{1}{330}$ der Abplattung giebt Laplace auf der 150sten Seite seines Werkes die Werthe von $z = 0{,}996760$, $y = 0{,}005672$ und nach der Regula Falsi ergiebt sich $n = 3607{,}00$. Hieraus finden wir ferner das logarithmische Complement von . . . . . $2z = 3{,}7003794$
$\log y = 3{,}7537362$
$\log n = 3{,}5571461$

Also constanter Logarithmus für $\frac{1}{330}$ der Abplattung . . 1,0112617

Breite von Mulgrave 59° 33′ log sin² 9,935543
9,935543
0,882348.

Zugehörige Zahl 7,6270,
Zahl der Schwingungen unter dem Aequator . . 3607,0000
folglich Zahl der Schwingungen in Mulgrave 3614,63 nach der Rechnung.

Berechnung der Schwere und der Länge des einfachen, Secunden schlagenden Pendels.

Wir haben gesehen, dafs das Quadrat der Schwingungen des unveränderlichen Pendels unter dem Aequator sich verhält zur Einheit wie das Quadrat der Schwingungen unter jeglicher Breite zu der ihr entsprechenden Schwere.

Wir haben ferner gesehen, dafs die Einheit sich verhält zur Länge des einfachen unter dem Aequator Secunden schlagenden Pendels, wie die jeglicher Breite entsprechende Schwere zur Länge des einfachen Pendels, welches unter dieser Breite Secunden schwingt. Nach diesen

Prinzipien ist die Schwere und die Länge des Pendels, welche den Beobachtungen entspricht, für jede Breite berechnet worden. Diese Rechnung läfst sich aber auf folgende Art sehr abkürzen: die Zahl der Schwingungen unter dem Aequator ist für die Abplattung $\frac{1}{321}$ . . 3607,02

deren Logarithmus . . . . . { 3,5571485 / 3,5571485 } 7,1142990,

dessen arithmetische Ergänzung 2,8857030,

Pendellänge unter dem Aequator nach den Beobachtungen des Herrn Bouguer 439,21, deren Logarithmus . . . . 2,6426722.

Beispiel für die Berechnung der Schwere und Pendellänge zu Mulgrave.

Erster constanter Logarithmus . . . . . 2,8857030.

Berechnete Schwingungen 3614,47 . . . . . { 3,5580362 / 3,5580362 } 168

Schwere 1,00414 0,0017922

zweiter constanter Logarithmus 2,6426722

Länge des einfachen Pendels 441,03 . . . . . 2,6444644.

Für $\frac{1}{336}$ Abplattung ist der Logarithmus von 3607 . . . { 3,5571461 / 3,5571461 } 7,1142922.

Arithmetische Ergänzung, oder der erste constante Logarithmus 2,8857078,

der zweite constante Logarithmus 2,6426722,

wie für $\frac{1}{321}$

Bestimmung der Abplattung, welche den Beobachtungen entspricht.

Man nenne A', A'', A''' etc. die Uberschüsse der für die Breiten l', l'', l''' berechneten Schwingungen, in Beziehung auf diejenigen unter dem Aequator mit n bezeichneten, und a', a'', a''' etc. die correspondirenden, beobachteten Ueberschüsse.

Es bezeichne y die Constante, welche der angenommenen Erdabplattung entspricht, und y', y'', y''' etc. diejenigen, welche den Beobachtungen a', a'', a''' etc. Genüge leisten.

Wir haben im Eingang gesehen, dafs

$$\frac{\gamma}{2z}.n\sin^2 l' = A', \text{ und } \frac{\gamma}{2z}.n\sin^2 l'' = A'' \text{ etc.}$$

Weil n und z sich wenig ändern, so kann man sie ohne merklichen Fehler für alle Abplattungen als beständig ansehen, wodurch

$$\frac{\gamma'}{2z}.n\sin^2 l' = a'; \quad \frac{\gamma''}{2z}.n\sin^2 l'' = a'' \text{ etc.}$$

Hieraus folgt

$$\gamma = \frac{2z}{n.\sin^2 l'}.A',$$

$$\gamma' = \frac{2z}{n.\sin^2 l'}.a'.$$

Ferner

$$\gamma.\frac{\gamma-\gamma'}{\gamma} = \gamma-\gamma' = \gamma.\frac{A'-a'}{A'}.$$

Ueberhaupt:

$$\gamma-\gamma' = \gamma.\frac{A'-a'}{A'},$$

$$\gamma-\gamma'' = \gamma.\frac{A''-a''}{A''},$$

$$\gamma-\gamma''' = \gamma.\frac{A'''-a'''}{A'''},$$

und aus diesen Gleichungen folgt.

$$\frac{\gamma}{2z}.n.\sin^2 l' = A',$$

$$\frac{\gamma}{2z}.n.\sin^2 l'' = A'',$$

$$\frac{\gamma}{2z}.n.\sin^2 l''' = A'''.$$

Solchemnach verhalten sich die Gröfsen A', A'', A''' wie die Quadrate der Sinusse der Breiten. Multiplicirt man also den Werth von $\gamma'-\gamma''$ mit A', von $\gamma-\gamma''$ mit A'' und von $\gamma-\gamma'''$ mit A''' etc. und dividirt die Summe durch $A'+A''+A'''$ etc., so erhält man den Werth von $d\gamma$, welcher für die Unterschiede $\gamma-\gamma'$; $\gamma-\gamma''$ den Einflufs zeigt, der dem Quadrate der Breite des Beobachtungs-Ortes proportional ist.

Diesem zufolge ist

$$d\gamma = \gamma.\frac{(A'-a')+(A''-a'')+(A'''-a''') \text{ etc.}}{A'+A''+A''' \text{ etc.}}.$$

Da nun $A'-a'$, $A''-a''$ etc. die Unterschiede zwischen den berechneten und beobachteten Schwingungen bezeichnen, welche wir d', d'',

d''' nennen wollen, so ist überhaupt genommen, die Veränderung von y, welche wir dy nennen, $= \frac{d'+d''+d''' \text{ etc.}}{A'+A''+A''' \text{ etc.}} y$.

Ferner ist für $\frac{1}{3\,2\,1}$ Abplattung $y = 0{,}00554$. Für diesen Fall nehmen wir die Unterschiede a', a'', etc. aus der zweiten Tafel mit dem Zeichen + oder —, je nachdem sie positiv oder negativ sind, so folgt daraus

$$dy = 0{,}00554 \frac{d'+d''+d''' \text{ etc.}}{A'+A''+A''' \text{ etc.}}.$$

Nach Laplace *Mécan. cél.* ist die Abplattung $0{,}00865 - y$; die wahre Abplattung also

$$0{,}00865 - 0{,}00554 - dy = 0{,}00311 - 0{,}00554 . \frac{d'+d''+d''' \text{ etc.}}{A'+A''+A''' \text{ etc}}.$$

Hierbei mufs aber bemerkt werden, dafs wenn die neue Abplattung von der angenommenen stark abweicht, dann auch die Werthe von n und z sich ändern.

In solchen Fällen mufs man eine kleine Verbesserung der durch die approximirte Formel gefundenen Abplattung anbringen. Wenn daher die neue Abplattung sich $\frac{1}{3\,3\,6}$, mehr als $\frac{1}{3\,2\,1}$ nähern sollte, so kann man besser die Unterschiede d', d'', d''' etc. und die Werthe von A', A'' etc. aus der ersten Tafel nehmen und $y = 0{,}005672$ setzen, wodurch die Abplattung

$$= 0{,}002978 - 0{,}005672 . \frac{d'+d''+d''' \text{ etc.}}{A'+A''+A''' \text{ etc.}}$$

wird.

Beispiel. In der zweiten Tafel haben wir für Mulgrave $A' = 7{,}45$; $d' = 0{,}38$, für Nutka $A'' = 5{,}81$, $d'' = 0{,}62$. Hieraus die Abplattung $0{,}00311 - 0{,}00554 . \frac{-24}{1\,3\,2\,6} = 0{,}00311 + 0{,}00103 = 0{,}003213 = \frac{1}{3\,1\,1}$, welche vermöge der so eben angedeuteten kleinen Verbesserungen zu $\frac{1}{3\,1\,3}$ angenommen werden kann.

Die in der südlichen Hemisphäre angestellten Beobachtungen erfordern übrigens dieser Verbesserung nicht, weil die dort beobachteten Abplattungen nur sehr wenig von den angenommenen abweichen. Für diese Beobachtungen wird also die Abplatung

$$0{,}00311 - 0{,}00554 . \frac{-40+43-31+8+7}{611+492+358+328+311} = 0{,}00311 + 0{,}00554 . \frac{13}{2100}$$

$$= 0{,}003144 = \frac{1}{318}.$$

3.
Note sur quelques formules elliptiques.

(Par Mr. *N. H. Abel.*)

J'ai presenté dans le second tome de ce journal plusieurs formules qui tiennent au développement des fonctions elliptiques $\varphi\alpha$, $f\alpha$, $F\alpha$, dans le cas où les modules e et c sont réels. Il sera facile de tirer de ces formules d'autres formules analogues pour le cas où e^2 est une quantité négative. C'est ce que nous ferons voir.

Soit pour plus de simplicité $c = 1$. Cela posé, si l'on fait

$$1.\quad \lambda\alpha = f\left(\frac{\omega}{2} - b\alpha\right), \quad \text{où} \quad b = \frac{1}{\sqrt{(1+e^2)}},$$

on trouvera aisément, en vertu de la définition de la fonction f, que

$$2.\quad \alpha = \int_0 \frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}},$$

en faisant

$$x = \lambda\alpha \quad \text{et} \quad c = \frac{e}{\sqrt{(1+e^2)}}.$$

Donc le module c est plus petit que l'unité, et comme on a $b = \sqrt{(1-c^2)}$, b sera son complément.

On trouvera aussi

$$3.\quad \begin{cases} \frac{\omega}{2} = b\int_0^1 \frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}} = b\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial\theta}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\theta)}}, \\ \frac{\varpi}{2} = b\int_0^1 \frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^2)(1-b^2x^2)}} = b\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial\theta}{\sqrt{(1-b^2\sin^2\theta)}}, \end{cases}$$

Si l'on fait

$$4.\quad \lambda'\alpha = \sqrt{(1-\lambda^2\alpha)}; \quad \lambda''\alpha = \sqrt{(1-c^2\lambda^2\alpha)},$$

on aura encore

$$5.\quad \lambda'\alpha = \varphi\left(\frac{\omega}{2} - b\alpha\right); \quad \lambda''\alpha = bF\left(\frac{\omega}{2} - b\alpha\right),$$

et en faisant

$$6.\quad \frac{\omega'}{2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial\theta}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\theta)}}; \quad \frac{\varpi'}{2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial\theta}{\sqrt{(1-b^2\sin^2\theta)}},$$

on a, en vertu de (3.)

$$7.\quad \frac{\omega'}{\varpi'} = \frac{\omega}{\varpi}, \quad \omega = b\omega', \quad \varpi = b\varpi'.$$

Considérons maintenant d'abord la formule (185.) pag. 176., qui donne la valeur de $f\alpha$. Pour en tirer celle de la fonction $\lambda\alpha$, il suffit de mettre $\frac{\omega}{2} - b.\alpha$ à la place de α. Faisons $\alpha = \frac{\omega}{2} - b.\theta$ et pour abreger,

$$8. \quad \varrho = e^{-\frac{\theta\pi}{\omega'}}, \quad r = e^{-\frac{\varpi'}{\omega'}\pi};$$

alors la formule (185.) donne sur le champ:

$$\lambda\theta = A.\prod_0^\infty{}_m \frac{(1-r^{2m+1})^2 - (\varrho r^m - \varrho^{-1}.r^{m+1})^2}{(1+r^{2m+1})^2 + (\varrho r^m - \varrho^{-1}.r^{m+1})^2},$$

où

$$7'. \quad A^{\frac{1}{4}} = \frac{(1+r)(1+r^3)\ldots.}{(1-r)(1-r^3)\ldots.}.$$

Or on a

$$(1-r^{2m+1})^2 - (\varrho r^m - \varrho^{-1}.r^{m+1})^2 = (1-\varrho^2.r^{2m})(1-\varrho^{-2}.r^{2m+2})$$

et

$$(1+r^{2m+1})^2 + (\varrho r^m - \varrho^{-1}.r^{m+1})^2 = (1+\varrho^2.r^{2m})(1+\varrho^{-2}.r^{2m+2}),$$

par conséquent l'expression de $\lambda\theta$ deviendra en développant:

$$9. \quad \lambda\theta = A.\frac{1-\varrho^2}{1+\varrho^2}.\frac{1-\varrho^2 r^2}{1+\varrho^2 r^2}.\frac{1-\varrho^{-2}.r^2}{1+\varrho^{-2}.r^2}.\frac{1-\varrho^2.r^4}{1+\varrho^2.r^4}.\frac{1-\varrho^{-2}.r^4}{1+\varrho^{-2}.r^4}\ldots.$$

Avec la même facilité on tirera des deux formules (184.) et (186.), en y faisant $\alpha = \frac{\omega}{2} - b.\theta$:

$$10. \quad \lambda'\theta = A'.\frac{2\varrho}{1+\varrho^2}.\frac{(1-\varrho^2.r)(1-\varrho^{-2}.r^2)(1-\varrho^2.r^3)(1-\varrho^{-2}.r^3)}{(1+\varrho^2.r^2)(1+\varrho^{-2}.r^2)(1+\varrho^2.r^4)(1+\varrho^{-2}.r^4)}\ldots.$$

$$11. \quad \lambda''\theta = A''.\frac{2\varrho}{1+\varrho^2}.\frac{(1+\varrho^2.r)(1+\varrho^{-2}.r)(1+\varrho^2.r^3)(1+\varrho^{-2}.r^3)}{(1+\varrho^2.r^2)(1+\varrho^{-2}.r^2)(1+\varrho^2.r^4)(1+\varrho^{-2}.r^4)}\ldots.$$

où A', A'' sont données par les formules

$$12. \quad \sqrt{A'} = \frac{(1+r^2)(1+r^4)(1+r^6)\ldots.}{(1-r)(1-r^3)(1-r^5)\ldots.},$$

$$13. \quad \sqrt{A''} = \frac{(1+r^2)(1+r^4)(1+r^6)\ldots.}{(1+r)(1+r^3)(1+r^5)\ldots.}.$$

On pourra trouver d'autres expressions pour A, A', A'' encore beaucoup plus simples et qui donnerons des formules très remarquables.

Si l'on fait dans la formule (9.):

$$\theta = \frac{\omega'}{2} + \frac{\varpi'}{2}i,$$

on aura:

$$\lambda\theta = f\left(\frac{\varpi}{2}i\right) = \frac{\sqrt{(1+e^2)}}{e} = \frac{1}{c}$$

et

$$\varrho^2 = e^{-\pi i + \frac{\omega'}{\varpi'}\pi} = -r,$$

donc, en substituant,

$$\frac{1}{c} = A.\left(\frac{1+r}{1-r}.\frac{1+r^3}{1-r^3}.\frac{1+r^5}{1-r^5}\ldots.\right)^2,$$

c'est-à-dire, en vertu de la formule (7'.)

$$\frac{1}{c} = A^2,$$

d'où

$$A = \frac{1}{\sqrt{c}}.$$

En faisant dans l'expression de $\lambda'\theta$:

$$\theta = \frac{\omega'}{2} + \frac{\varpi'}{2}i,$$

on a

$$\lambda'\theta = \varphi\left(\frac{\varpi i}{2}\right) = \frac{i}{e} = i\frac{\sqrt{(1-c^2)}}{c},$$

et

$$\varrho^2 = -r,$$

donc:

$$i.\frac{b}{c} = 4A'i\sqrt{r}\left(\frac{1+r^2}{1-r}.\frac{1+r^4}{1-r^3}\ldots.\right)^2,$$

d'où l'on tire en vertu de (12.):

$$A' = \frac{1}{2\sqrt[4]{r}}.\sqrt{\frac{b}{c}}.$$

Enfin si l'on fait dans la formule (11.) $\theta = \frac{\omega'}{2}$, on trouvera:

$$\lambda''\theta = \sqrt{(1-c^2)} = b, \quad \varrho^2 = r,$$

donc

$$b = 4A''.\sqrt{r}.\left(\frac{1+r^2}{1+r}.\frac{1+r^4}{1+r^3}\ldots.\right)^2 = 4A''\sqrt{r}.A'',$$

et par suite

$$A'' = \frac{\sqrt{b}}{2\sqrt[4]{r}}.$$

En comparant ces valeurs de A, A', A'' à celles plus haut, on en déduira ces formules:

$$14.\quad \sqrt[4]{c} = \frac{1-r}{1+r}.\frac{1-r^3}{1+r^3}.\frac{1-r^5}{1+r^5}\ldots.,$$

$$15.\quad \sqrt[4]{\frac{b}{c}} = \sqrt{2}.\sqrt[8]{r}.\frac{1+r^2}{1-r}.\frac{1+r^4}{1-r^3}.\frac{1+r^6}{1-r^5}\ldots.,$$

$$16.\quad \sqrt[4]{b} = \sqrt{2}.\sqrt[8]{r}.\frac{1+r^2}{1+r}.\frac{1+r^4}{1+r^3}.\frac{1+r^6}{1+r^5}\ldots.,$$

dont l'une est une suite des deux autres.

Si dans l'expression de $\lambda\theta$, après avoir divisé les deux membres par

$$1-\varrho^2 = 2.\frac{\theta\pi}{\varpi'} + \ldots,$$

on fait $\theta = 0$, et qu'on remarque que

$$\frac{\lambda\theta}{\theta} = 1, \text{ pour } \theta = 0,$$

on obtiendra

$$17.\quad \sqrt[4]{c}.\sqrt{\frac{\varpi'}{\pi}} = \frac{(1-r^2)(1-r^4)(1-r^6)\ldots.}{(1+r^2)(1+r^4)(1+r^6)\ldots.}.$$

De là on tire, en substituant la valeur de $\sqrt[4]{c}$:

$$18.\quad \sqrt{\frac{\varpi'}{\pi}} = \frac{(1+r)(1-r^2)(1+r^3)(1-r^4)\ldots.}{(1-r)(1+r^2)(1-r^3)(1+r^4)\ldots.}$$

$$= (1+r)^2(1+r^3)^2(1+r^5)^2\ldots. \times (1-r^2)(1-r^4)(1-r^6)\ldots.$$

$$= [(1+r)(1+r^3)\ldots(1+r^5)\ldots.]^2.(1+r)(1+r^2)(1+r^3)\ldots. \times (1-r)(1-r^2)(1-r^3)\ldots.$$

A l'aide des formules (16., 14., 18.) il est facile de trouver l'expression des produits infinis

$$(1+r)(1+r^2)(1+r^3)\ldots., \quad (1-r)(1-r^2)(1-r^3)\ldots.$$

En effet, si pour abréger on fait

$$19.\quad \begin{cases} P = (1+r)(1+r^3)(1+r^5)\ldots. \\ P' = (1+r^2)(1+r^4)(1+r^6)\ldots. \end{cases}$$

et qu'on ait égard à la formule

$$\frac{1}{(1-r)(1-r^3)(1-r^5)} = (1+r)(1+r^2)(1+r^3)\ldots. = P.P',$$

les formules (14., 16.) donneront sur le champ:

$$\sqrt[4]{c} = \frac{1}{P^2.P'}, \quad \sqrt[4]{b} = \sqrt{2}.\sqrt[8]{r}.\frac{P'}{P},$$

d'où l'on tire:

$$20.\quad P = \sqrt[6]{2}.\sqrt[24]{\left(\frac{r}{b^2c^2}\right)}, \quad P' = \frac{\sqrt[6]{b}.\sqrt[24]{r}}{\sqrt[3]{2}.\sqrt[12]{c}\,\sqrt[8]{r}}.$$

Cela donne les produits P et P'. En les multipliant entre eux, il viendra:

$$21.\quad (1+r)(1+r^2)(1+r^3)(1+r^4)\ldots. = \frac{\sqrt[12]{b}}{\sqrt[6]{2c}.\sqrt[24]{r}}.$$

De même la formule (18.) donne, en substituant les valeurs de P, P':

$$\sqrt{\frac{\varpi'}{\pi}} = P^3.P'.(1-r)(1-r^2)(1-r^3)\ldots.,$$

et de là:

$$22.\quad (1-r)(1-r^2)(1-r^4)\ldots. = \frac{\sqrt[12]{b}.\sqrt[3]{c}}{\sqrt[6]{2}.\sqrt[24]{r}}.\sqrt{\frac{\varpi'}{\pi}},$$

formule dûe à M. Jacobi (Tome III. pag. 193., où ce géomètre en présente plusieurs autres très remarquables et très élégantes).

Des formules démontrés précédemment on peut tirer aisément un grand nombre d'autres.

En voici quelques unes de plus remarquables.

Si l'on fait pour abréger

$$23.\quad q = e^{-\frac{\varpi'}{\omega'}\pi},$$

on aura

$$24.\quad \lambda\left(\frac{\omega'}{\pi}x\right) = \frac{2}{\sqrt{c}}\cdot\sqrt[4]{q}\cdot\sin x\cdot\frac{1-2q^2\cos 2x+q^4}{1-2q\cos 2x+q^2}\cdot\frac{1-2q^4\cos 2x+q^8}{1-2q^3\cos 2x+q^6}\cdot\ldots.$$

$$25.\quad \lambda'\left(\frac{\omega'}{\pi}x\right) = 2\sqrt[4]{\frac{b}{c}}\cdot\sqrt[4]{q}\cdot\cos x\cdot\frac{1+2q^2\cos 2x+q^4}{1-2q\cos 2x+q^2}\cdot\frac{1+2q^4\cos 2x+q^8}{1-2q^3\cos 2x+q^6}\cdot\ldots.$$

$$26.\quad \lambda''\left(\frac{\omega'}{\pi}x\right) = \sqrt{b}\cdot\frac{1+2q\cos 2x+q^2}{1-2q\cos 2x+q^2}\cdot\frac{1+2q^3\cos 2x+q^6}{1-2q^3\cos 2x+q^6}\cdot\ldots.$$

Ces formules ont été déduites respectivement des formules 10., 9., 11., en changeant c en b, et en faisant ensuite

$$\theta = \frac{\varpi'}{2}+\frac{\omega'}{2}\cdot\sqrt{-1}+\frac{\omega'}{\pi}x\sqrt{-1}.$$

En comparant ces valeurs avec celles que M. Jacobi a données pour les mêmes fonctions à l'endroit cité, on parviendra à des résultats remarquables. Savoir, en faisant dans la formule (3.) de M. Jacobi, $k = c$, on aura:

$$27.\quad \left\{\begin{array}{l}\dfrac{1+2q\cos 2x+2q^4\cos 4x+2q^9\cos 6x+\ldots..}{1-2q\cos 2x+2q^4\cos 4x-2q^9\cos 6x+\ldots..} \\ = \dfrac{(1+2q\cos 2x+q^2)(1+2q^3\cos 2x+q^6)(1+2q^5\cos 2x+q^{10})\ldots.}{(1-2q\cos 2x+q^2)(1-2q^3\cos 2x+q^6)(1-2q^5\cos 2x+q^{10})\ldots.},\end{array}\right.$$

formule qui doit avoir lieu pour des valeurs quelconques réelles de x et q, en supposant q moindre que l'unité.

En prenant les logarithmes des valeurs de $\lambda\left(\frac{\omega'}{\pi}x\right)$ etc., on trouvera quelques réductions faciles:

$$28.\quad \log\lambda\left(\frac{\omega'}{\pi}x\right) = \log 2-\tfrac{1}{2}\log c-\tfrac{1}{4}\cdot\frac{\varpi'}{\omega'}\pi+\log\sin x$$
$$+2\left\{\cos 2x\cdot\frac{q}{1-q}+\tfrac{1}{2}\cos 4x\cdot\frac{q^2}{1-q^2}+\tfrac{1}{3}\cos 6x\cdot\frac{q^3}{1-q^3}+\ldots.\right\},$$

$$29.\quad \log\lambda'\left(\frac{\omega'}{\pi}x\right) = \log 2+\tfrac{1}{2}\log b-\tfrac{1}{2}\log c-\tfrac{1}{4}\frac{\varpi'}{\omega'}\pi+\log\cos x$$
$$+2\left\{\cos 2x\cdot\frac{q}{1+q}+\tfrac{1}{2}\cos 4x\cdot\frac{q^2}{1-q^2}+\tfrac{1}{3}\cos 6x\cdot\frac{q^3}{1+q^3}+\ldots.\right\},$$

$$30.\quad \log\lambda''\left(\frac{\omega'}{\pi}x\right) = \tfrac{1}{2}\log b+4\cdot\left\{\cos 2x\cdot\frac{q}{1-q^2}+\tfrac{1}{3}\cos 6x\cdot\frac{q^3}{1-q^6}+\ldots.\right\}.$$

En faisant $x = 0$, on trouvera:

$$31.\quad \log\left(\frac{1}{b}\right) = 8.\left\{\frac{q}{1-q^2} + \tfrac{1}{3}.\frac{q^3}{1-q^6} + \tfrac{1}{5}.\frac{q^5}{1-q^{10}} + \ldots.\right\},$$

$$32.\quad \log\left(\frac{1}{c}\right) = \tfrac{1}{2}.\frac{\varpi'}{\omega'}\pi - 2\log 2 + 2\left\{\frac{q}{1-q} + \tfrac{1}{2}.\frac{q^2}{1-q^2} + \tfrac{1}{3}.\frac{q^3}{1-q^3} + \ldots.\right\}$$

$$= 8.\left\{\frac{r}{1-r^2} + \tfrac{1}{3}.\frac{r^3}{1-r^6} + \tfrac{1}{5}.\frac{r^5}{1-r^{10}} + \ldots.\right\}.$$

En posant dans les formules (206.) et (207.) Tome II. p. 180.: $x = 1 - \frac{2x}{\pi}$, on trouvera les expressions suivantes:

$$33.\quad \lambda\left(\frac{\omega'}{\pi}x\right) = \frac{4\pi}{c\,\omega'}.\sqrt{q}.\left\{\sin x.\frac{1}{1-q} + \sin 3x.\frac{q}{1-q^3} + \sin 5x.\frac{q^2}{1-q^5} + \ldots.\right\},$$

$$34.\quad \lambda'\left(\frac{\omega'}{\pi}x\right) = \frac{4\pi}{c\,\omega'}.\sqrt{q}.\left\{\cos x.\frac{1}{1+q} + \cos 3x.\frac{q}{1+q^3} + \cos 5x.\frac{q^2}{1+q^5} + \ldots.\right\}.$$

Ces formules offrent peut-être les plus simples expressions des fonctions elliptiques en quantités connues.

Voici encore deux autres formules, qu'on déduira des équations (204.) et (206.) Tome II. pag. 179., en y faisant $\alpha = \frac{\omega}{2} - \omega x$:

$$35.\quad \lambda'(\omega' x) = \frac{2\pi}{c\,\varpi'}.\left\{\frac{r^x - r^{1-x}}{1+r} - \frac{r^{3x} - r^{3-3x}}{1+r^3} + \frac{r^{5x} - r^{5-5x}}{1+r^5} - \ldots.\right\},$$

$$36.\quad \lambda''(\omega' x) = \frac{2\pi}{c\,\varpi'}.\left\{\frac{r^x + r^{1-x}}{1-r} - \frac{r^{3x} + r^{3-3x}}{1-r^3} + \frac{r^{5x} + r^{5-5x}}{1-r^5} - \ldots.\right\}.$$

où r signifie la même chose que précédemment.

Il y a à remarquer que les quantités r et q sont liées entre elles par l'équation:

$$37.\quad \log r.\log q = \pi^2.$$

A l'aide des expressions des modules c et b données plus haut, on pourra trouver une relation générale entre les modules de deux fonctions elliptiques qui sont réductibles l'une à l'autre. En effet on pourra démontrer, comme je l'ai fait dans un des derniers numeros des „*Astronomische Nachrichten*," que si deux fonctions elliptiques réelles:

$$83.\quad F(c,\theta) = \int_0 \frac{\partial\theta}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\theta)}};\quad F(c',\theta') = \int_0 \frac{\partial\theta'}{\sqrt{(1-c'^2\sin^2\theta')}},$$

dont les modules c et c' sont moindres que l'unité, peuvent être réduites l'une à l'autre à l'aide d'une relation algébrique entre $\sin\theta$ et $\sin\theta'$, on peut trouver deux nombres entiers m et n, tels que l'équation

$$39.\quad n.\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\partial\theta}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\theta)}}:\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\partial\theta}{\sqrt{(1-b'^2\sin^2\theta)}}$$
$$= m.\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\partial\theta}{\sqrt{(1-b^2\sin^2\theta)}}:\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\partial\theta}{\sqrt{(1-c'^2\sin^2\theta)}}$$

soit satisfaite. b' est le complément de c', savoir $b'=\sqrt{(1-c'^2)}$.

Si cette condition est satisfaite on pourra toujours déterminer $\sin\theta'$ algébriquement en $\sin\theta$ de manière que

$$40.\quad F(c',\theta')=a.F(c,\theta),$$

où a est un coëfficient constant.

Cela posé, désignons par ω'', ϖ'', r', q', les valeurs de ω', ϖ', r, q, qui répondent au module c', on aura en vertu de la formule (14.):

$$\sqrt[4]{c'}=\frac{(1-r')(1-r'^3)(1-r'^5)\ldots.}{(1+r')(1+r'^3)(1+r'^5)\ldots.},$$

où $r'=e^{-\frac{\omega''}{\varpi''}\pi}$. Mais l'équation (39.) donne:

$$\frac{\omega''}{\varpi''}=\frac{n}{m}.\frac{\omega'}{\varpi'},$$

donc

$$r'=e^{-\frac{n}{m}.\frac{\omega'}{\varpi'}\pi},$$

c'est-à-dire:

$$r'=r^{\frac{n}{m}}.$$

Donc on a ce théorème:

Une fonction elliptique réelle étant proposée, si son module c est donné par la formule:

$$41.\quad \sqrt[4]{c}=\frac{(1-r)(1-r^3)(1-r^5)}{(1+r)(1+r^3)(1+r^5)}\ldots.,$$

on aura le module de toute autre fonction elliptique réelle, réductible à la première, en mettant au lieu de r la puissance $r^{\frac{n}{m}}$, où n et m sont deux nombres entiers et positifs quelconques, cest-à-dire, on aura, en désignant par c' le module de la nouvelle fonction:

$$42.\quad \sqrt[4]{c'}=\frac{(1-r^{\frac{n}{m}})(1-r^{3\frac{n}{m}})(1-r^{5\frac{n}{m}})\ldots.}{(1+r^{\frac{n}{m}})(1+r^{3\frac{n}{m}})(1+r^{5\frac{n}{m}})\ldots.}.$$

En faisant

$$43.\quad \sqrt[4]{c}=\sqrt{2}.\sqrt[8]{q}.\frac{1+q^2}{1+q}.\frac{1+q^4}{1+q^3}.\frac{1+q^6}{1+q^5}\ldots.$$

on aura encore la formule suivante:

$$44.\quad \sqrt[4]{c'} = \sqrt{2}.\sqrt[8]{q^{\frac{m}{n}}}.\frac{1+q^{2\frac{m}{n}}}{1+q^{\frac{m}{n}}}.\frac{1+q^{4\frac{m}{n}}}{1+q^{3\frac{m}{n}}}.\frac{1+q^{6\frac{m}{n}}}{1+q^{5\frac{m}{n}}}.$$

Dans le cas particulier où le module c est $\sqrt{\frac{1}{2}}$, on a $\varpi' = \omega'$, donc:

$$r = e^{-\pi} = q.$$

De là il suit
que le module c de toute fonction elliptique réelle, qui est réductible à la fonction $\int_0 \frac{\frac{1}{2}\partial\theta}{\sqrt{(1-\frac{1}{2}.\sin^2\theta)}}$, est donné par la formule:

$$45.\quad \sqrt[4]{c} = \frac{1-e^{-\mu\pi}}{1+e^{-\mu\pi}}.\frac{1-e^{-3\mu\pi}}{1+e^{-3\mu\pi}}.\frac{1-e^{-5\mu\pi}}{1+e^{-5\mu\pi}}\ldots.$$

$$= \sqrt{2}.e^{-\frac{\pi}{8\mu}}.\frac{1+e^{-\frac{2\pi}{\mu}}}{1+e^{-\frac{\pi}{\mu}}}.\frac{1+e^{-\frac{4\pi}{\mu}}}{1+e^{-\frac{3\pi}{\mu}}}.\frac{1+e^{-\frac{6\pi}{\mu}}}{1+e^{-\frac{5\pi}{\mu}}}\ldots.$$

où μ est un nombre *rationnel* quelconque.

Au reste c pourra toujours être exprimé dans ce cas en termes finis à l'aide de radicaux.

Si l'on suppose $b' = c$, on a $c' = b$, $\omega'' = \varpi'$, $\varpi'' = \omega'$, mais:

$$\frac{\omega''}{\omega''} = \frac{n}{m}.\frac{\omega'}{\varpi'} = \frac{\varpi'}{\omega'},$$

donc:

$$\frac{\omega'}{\varpi'} = \sqrt{\frac{n}{m}} = \sqrt{\mu}.$$

De là nous concluons:

Si deux fonctions elliptiques réelles, dont les modules sont leurs complémens réciproques, peuvent être réduites l'une à l'autre le module sera donné par la formule:

$$46.\quad \sqrt[4]{c} = \frac{1-e^{-\pi\sqrt{\mu}}}{1+e^{-\pi\sqrt{\mu}}}.\frac{1-e^{-3\pi\sqrt{\mu}}}{1+e^{-3\pi\sqrt{\mu}}}.\frac{1-e^{-5\pi\sqrt{\mu}}}{1+e^{-5\pi\sqrt{\mu}}}\ldots.$$

et son complément b par celle-ci:

$$47.\quad \sqrt[4]{b} = \frac{1-e^{-\frac{\pi}{\sqrt{\mu}}}}{1+e^{-\frac{\pi}{\sqrt{\mu}}}}.\frac{1-e^{-\frac{3\pi}{\sqrt{\mu}}}}{1+e^{-\frac{3\pi}{\sqrt{\mu}}}}.\frac{1-e^{-\frac{5\pi}{\sqrt{\mu}}}}{1+e^{-\frac{5\pi}{\sqrt{\mu}}}}\ldots.;$$

où μ est un nombre rationnel quelconque.

Nous ajouterons qu'on a en même tems:

$$48.\quad F(b, \theta') = k\sqrt{\mu}.F(c, \theta),$$

où k est un autre nombre rationnel.

Cela donne immédiatement le théorème suivant:

Si l'équation différentielle

$$49.\quad \frac{\partial y}{\sqrt{(A-By^2+Cy^4)}} = a.\frac{\partial x}{\sqrt{(A+Bx^2+Cx^4)}}$$

est intégrable algébriquement, il faut nécessairement que le coëfficient a soit égal *à la racine carrée d'un nombre rationnel et positif*, en supposant que les quantités A, B, C, et a soient réelles; et si a a cette forme, on pourra trouver une infinité de valeurs convenables pour A, B, C.

Nous terminerons ces remarques par la démonstration d'une formule curieuse, qu'on tire de l'équation (20.): savoir de la formule

$$(1+r)(1+r^3)(1+r^5)\ldots. = \sqrt[6]{2}.\frac{\sqrt[24]{r}}{\sqrt[12]{(bc)}}.$$

En y changeant c en b, b se changera en c, et r en q, donc:

$$(1+q)(1+q^3)(1+q^5)\ldots. = \sqrt[6]{2}.\frac{\sqrt[24]{q}}{\sqrt[12]{(bc)}}.$$

En comparant ces formules, on voit que l'équation

$$50.\quad \frac{1}{\sqrt[24]{r}}.(1+r)(1+r^3)(1+r^5)\ldots. = \frac{1}{\sqrt[24]{q}}(1+q)(1+q^3)(1+q^5)\ldots.,$$

a lieu toutes les fois que les quantités r et q sont moindres que l'unité et qu'elles sont liées entre elles par l'équation

$$\log r.\log q = \pi^2.$$

Il existe un grand nombre de relations semblables entre q et r, par exemple la suivante:

$$\sqrt[4]{\left[\log\left(\frac{1}{r}\right)\right]}.(\tfrac{1}{2}+r+r^4+r^9+r^{16}\ldots.) = \sqrt[4]{\left[\log\left(\frac{1}{q}\right)\right]}.(\tfrac{1}{2}+q+q^4+q^9+q^{16}\ldots.),$$

qui est due à Mr. Cauchy (*Exercices des mathématiques*). On pourra la déduire de la formule

$$\sqrt{\frac{\omega'}{\pi}} = 1+2q+2q^4+2q^9+\ldots.,$$

donnée par Mr. Jacobi, en y changeant c en b.

4.
Note sur les intégrales définies.

(Par Mr. *Lejeune-Dirichlet*, prof. de mathém.)

Quoique les intégrales qui font l'objet de cette note, soient comprises en grande partie parmi celles dont Mrs. Poisson et Cauchy et d'autres savans ont déterminé les valeurs dans ces derniers temps, je me flatte que cette nouvelle manière d'y parvenir pourra interesser les géomètres par son extrême simplicité. Le procédé dont je fais usage, est fondé sur la propriété connue des intégrales doubles, d'être indépendantes de l'ordre dans lequel les deux intégrations sont effectuées. C'est une extension de la méthode dont Mrs. Laplace et Poisson ont fait un emploi si heureux dans la théorie des intégrales définies. Mais si l'on doit convenir que la méthode dont il s'agit a acquis son importance principale par les applications ingénieuses que les géomètres cités en ont faites, la justice exige aussi d'attribuer à Euler la première idée de faire servir la propriété enoncée des intégrales doubles à l'évaluation des intégrales définies simples *).

Si l'on désigne par k et m deux constantes positives, et que l'on adopte la notation de Mr. Legendre, on aura par le simple changement de ky en y,

$$(1.)\quad \int e^{-ky} y^{m-1} \partial y = \frac{\int e^{-y} y^{m-1} \partial y}{k^m} = \frac{\Gamma(m)}{k^m},$$

les limites étant zéro et l'infini positif. Euler a été conduit par l'induction à remplacer la constante réelle k par une quantité de la forme $k + \theta\sqrt{-1}$, la partie réelle étant toujours positive, sans quoi l'intégrale deviendrait infinie. Il a obtenu de cette manière l'équation suivante

$$\int_0^\infty e^{-(k+\theta\sqrt{-1})y} y^{m-1} \partial y = \frac{\Gamma(m)}{(k+\theta\sqrt{-1})^m},$$

qui a été verifiée depuis par M. Poisson **). L'équation précédente a

*) *Novi Comment. acad. Petrop. tom. XVI.*

**) Pour éviter toute ambiguité, il convient de fixer le sens de quelques signes. Les lettres k et θ désignent deux quantités réelles et la première de plus positive, la notation $l(k+\theta\sqrt{-1})$ servira a remplacer l'expression $l(r)+\varphi\sqrt{-1}$, r étant la quantité positive $\sqrt{(k^2+\theta^2)}$ et φ l'arc

non seulement lieu pour des valeurs réelles et positives de m, mais elle subsiste encore quand même m serait imaginaire, pourvu qu'alors la partie réelle de m fût toujours positive. C'est ce qu'on peut démontrer facilement par le même procédé qui a servi a la vérifier dans le cas de m réelle. Si donc nous désignons par p une quantité soumise à la seule restriction d'avoir sa partie réelle positive, nous avons

$$(2.)\quad \int_0^\infty e^{-(k+\theta\sqrt{-1})y}\, y^{p-1}\,\partial y = \frac{\Gamma(p)}{(k+\theta\sqrt{-1})^p}.$$

Si l'on remplace dans cette dernière formule la quantité réelle quelconque θ par $x+l$, x et l étant des quantités réelles quelconques, et qu'on écrive ensuite simplement k à la place de $k+l\sqrt{-1}$, il viendra celle-ci

$$(3.)\quad \int_0^\infty e^{-(k+x\sqrt{-1})y}\, y^{p-1}\,\partial y = \frac{\Gamma(p)}{(k+x\sqrt{-1})^p},$$

où x désigne une quantité réelle et k et p sont deux quantités soumises à la restriction d'avoir leurs parties réelles positives.

Outre la formule précédente, nous aurons encore besoin d'une autre formule dont on est redevable à Mr. Laplace. La constante α étant réelle et positive et b désignant une quantité soumise à la restriction d'avoir sa partie réelle positive, la formule dont nous parlons, est celle-ci:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\alpha x}{b^2+x^2}\,\partial x = \frac{\pi}{b}\, e^{-ab}.$$

Nous l'écrirons d'une manière un peu différente, en remplaçant $\cos\alpha x$ par $e^{-\alpha x\sqrt{-1}}$, ce qui est permis, l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\alpha x}{b^2+x^2}\,\partial x$, qui est composée d'élémens égaux deux à deux, mais de signes opposés, étant évidemment nulle. Nous avons donc

$$(4.)\quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\alpha x\sqrt{-1}}}{b^2+x^2}\,\partial x = \frac{\pi}{b}\, e^{-b\alpha}.$$

L'équation (3.) subsistant pour toutes les valeurs réelles de x, on peut intégrer ses deux membres par rapport à cette quantité entre des limites quelconques, après les avoir multipliés par ∂x et par une fonction quelconque de x.

---

compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ déterminé par l'équation $\mathrm{tg}(\varphi) = \frac{\theta}{k}$. Les suppositions précédentes étant conservées, et q désignant une quantité quelconque réelle ou imaginaire, $(k+\theta\sqrt{-1})^q$ indiquera la quantité $e^{ql(k+\theta\sqrt{-1})} = e^{ql(r)+q\varphi\sqrt{-1}}$. En vérifiant l'équation (2.), on trouve que cette équation n'a lieu qu'autant qu'on attache à la notation $(k+\theta\sqrt{-1})^{-m}$ le sens que je vais de définir.

Si l'on multiplie les deux membres par $\frac{e^{-cx\sqrt{-1}}}{b^2+x^2}\partial x$ (c étant réelle et positive et b conservant sa signification précédente) et qu'on intègre ensuite depuis $x=-\infty$ jusqu'à $x=\infty$, on aura:

$$\int_0^\infty e^{-ky}y^{p-1}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-(c+y)x\sqrt{-1}}}{b^2+x^2}\partial x\right)\partial y = \Gamma(p)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-cx\sqrt{-1}}}{(k+x\sqrt{-1})^p}\cdot\frac{\partial x}{b^2+x^2}.$$

Comme $c+y$ est positive (y ne devant recevoir que des valeurs positives dans l'intégation relative à cette variable), on aura en vertu de la formule (4.):

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-(c+y)x\sqrt{-1}}}{b^2+x^2}\partial x = \frac{\pi}{b}e^{-bc}e^{-by}.$$

La substitution de cette valeur dans le premier membre le réduira à cette quantité:

$$\frac{\pi e^{-bc}}{b}\int_0^\infty e^{-(b+k)y}y^{p-1}\partial y,$$

ou ce qui est la même chose d'après l'équation (2.), la partie réelle de $b+k$ étant évidemment positive:

$$\frac{\pi\,\Gamma(p)\,e^{-bc}}{b(b+k)^p}.$$

Egalant cette quantité au second membre et effaçant le facteur $\Gamma(p)$ qui se trouvera commun aux deux membres l'on aura définitivement

$$(5.)\quad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-cx\sqrt{-1}}}{(k+x\sqrt{-1})^p}\cdot\frac{\partial x}{b^2+x^2} = \frac{\pi e^{-bc}}{b(b+k)^p}.$$

En particularisant les constantes de cette formule, on obtiendra toutes celles dont il est question dans le Mémoire sur les intégrales définies que M. Poisson a inséré dans le 18ième cahier du journal de l'école polytechnique.

J'accentue maintenant les lettres k et p dans l'équation (3.), je multiplie ses deux membres par la quantité qui se trouve sous le signe somme dans la formule (5.) et je les intègre ensuite depuis $x=-\infty$ jusqu'à $x=\infty$.

On effectuera la double intégration comme on l'a fait pour obtenir l'équation (5.) avec la seule différence qu'au lieu de s'appuyer sur la formule (4.), il faudra s'appuyer sur l'équation (5.).

Tout calcul fait, on trouvera

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-cx\sqrt{-1}}}{b^2+x^2}\cdot\frac{1}{(k+x\sqrt{-1})^p}\cdot\frac{1}{(k'+x\sqrt{-1})^{p'}}\partial x = \frac{\pi e^{-bc}}{b}\cdot\frac{1}{(b+k)^p}\cdot\frac{1}{(b+k')^{p'}}.$$

En continuant de procéder ainsi, on arrivera à cette formule

$$(6.)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-cx\sqrt{-1}}}{b^2+x^2}\cdot\frac{1}{(k+x\sqrt{-1})^p}\cdot\frac{1}{(k'+x\sqrt{-1})^{p'}}\cdot\frac{1}{(k''+x\sqrt{-1})^{p''}}\cdot\ldots\partial x$$
$$=\frac{\pi e^{-bc}}{b}\cdot\frac{1}{(b+k)^p}\cdot\frac{1}{(b+k')^{p'}}\cdot\frac{1}{(b+k'')^{p''}}\cdot\ldots$$

dans laquelle les facteurs de la forme $\frac{1}{(k'''+x\sqrt{-1})^{p'''}}$ sont en nombre quelconque. Il faut se rappeler, que c désigne une quantité positive et que b, k, p, k', p', k'', p'', ... ou du moins les parties réelles de ces quantités sont également positives.

La formule (6.) fournit un grand nombre de conséquences; je me contenterai d'en indiquer une seule.

Si l'on désigne par h une quantité positive supérieure à l'unité, ou une quantité imaginaire ayant pour partie réelle une telle quantité, et par x une quantité réelle quelconque, la partie réelle de la quantité

$$l(h+x\sqrt{-1})$$

sera positive *).

On pourra parconsequent mettre cette expression à la place de $k+\theta\sqrt{-1}$ dans la formule (2.). On aura ainsi, en remplaçant de plus p par q (q étant une quantité du même genre, c'est-à-dire soumise aux mêmes restrictions que p)

$$(7.)\int_0^{\infty}e^{-yl(h+x\sqrt{-1})}y^{q-1}\partial y=\frac{\Gamma(q)}{[l(h+x\sqrt{-1})]^q},$$

ou si l'on écrit simplement $\frac{1}{(h+x\sqrt{-1})^y}$ à la place de $e^{-yl(h+x\sqrt{-1})}$

$$\int_0^{\infty}\frac{y^{q-1}}{(h+x\sqrt{-1})^y}\partial y=\frac{\Gamma(q)}{[l(h+x\sqrt{-1})]^q}.$$

Je multiplie les deux membres de cette dernière équation par la quantité qui se trouve sous le signe somme dans l'équation (9.) et je les intègre ensuite depuis $x=-\infty$ jusqu'à $x=\infty$

$$\int_0^{\infty}y^{q-1}\partial y\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-cx\sqrt{-1}}}{b^2+x^2}\cdot\frac{1}{(h+x\sqrt{-1})^y}\cdot\frac{1}{(k+x\sqrt{-1})^p}\cdot\frac{1}{(k'+x\sqrt{-1})^{p'}}\cdot\ldots\partial x\right)$$
$$=\Gamma(q)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-cx\sqrt{-1}}}{b^2+x^2}\left(\frac{1}{(k+x\sqrt{-1})^p}\cdot\frac{1}{(k'+x\sqrt{-1})^{p'}}\cdot\ldots\right)\frac{\partial x}{[l(h+x\sqrt{-1})]^q}$$

l'intégrale relative à x du premier membre s'obtient au moyen de la formule (6.), y étant positive. En l'effectuant, le premier membre se reduira à

*) Soit $h=m+n\sqrt{-1}$, m et n étant réelles et m de plus positive et >1, la partie réelle de $l(h+x\sqrt{-1})$ ou ce qui revient au même, de $l[m+(n+x)\sqrt{-1}]$ sera $\frac{1}{2}l[m^2+(n+x)^2]$, valeur qui sera toujours positive, attendu que la quantité $m^2+(n+x)^2$ ne pourra jamais s'abaisser ou dessous de la quantité positive m^2, et à fortiori pas au dessous de l'unité, m étant >1.

$$\frac{\pi e^{-bc}}{b}\cdot\frac{1}{(b+k)^p}\cdot\frac{1}{(b+k')^{p'}}\cdot\frac{1}{(b+k'')^{p''}}\cdots\int_0^\infty\frac{y^{q-1}}{(b+h)^y}\partial y.$$

Si l'on met dans cette quantité à la place de l'intégrale, qui y entre, sa valeur $\frac{\Gamma(q)}{[l(b+h)]^q}$, qu'on l'égale au second membre de l'équation précédente et qu'on efface le facteur commun $\Gamma(q)$, on aura

$$(8.)\quad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-cx\sqrt{-1}}}{b^2+x^2}\left(\frac{1}{(k+x\sqrt{-1})^p}\cdot\frac{1}{(k'+x\sqrt{-1})^{p'}}\cdots\right)\frac{\partial x}{[l(h+x\sqrt{-1})]^q}$$
$$=\frac{\pi e^{-bc}}{b}\left(\frac{1}{(b+k)^p}\cdot\frac{1}{(b+k')^{p'}}\cdots\right)\frac{1}{[l(b+h)]^q}.$$

Si l'on accentue les lettres h et q dans la formule (7.), qu'on multiplie les deux membres par la quantité qui se trouve sous le signe somme dans l'équation (8.) et qu'on les intégre ensuite depuis $x=-\infty$ jusqu'à $x=\infty$, on arrivera à une formule semblable à la formule (8.), dans laquelle il y aura sous le signe $\int$ deux facteurs de la forme

$$\frac{1}{[l(h+x\sqrt{-1})]^q},\quad\frac{1}{[l(k'+x\sqrt{-1})]^{q'}}.$$

On pourra introduire de cette manière un nombre quelconque de ces facteurs, ce qui donnera la formule

$$(9.)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-cx\sqrt{-1}}}{b^2+x^2}\left(\frac{1}{(k+x\sqrt{-1})^p}\cdot\frac{1}{(k'+x\sqrt{-1})^{p'}}\cdots\right)\left(\frac{1}{[l(h+x\sqrt{-1})]^q}\cdot\frac{1}{[l(h'+x\sqrt{-1})]^{q'}}\cdots\right)\partial x$$
$$=\frac{\pi e^{-bc}}{b}\left(\frac{1}{(b+k)^p}\cdot\frac{1}{(b+k')^{p'}}\cdots\right)\left(\frac{1}{[l(h+b)]^q}\cdot\frac{1}{[l(b+h')]^{q'}}\cdots\right)$$

dans laquelle on suppose c positive, les parties réelles des quantités b; k, k', k'', ...; p, p', p'', ...; q, q', q'', ...; h, h', h'', ... également positives, et les parties réelles des quantités de la dernière série h, h', h'', ... de plus supérieures à l'unité.

GENERAL LIBRARY University of MICHIGAN

5.

Auflösung einer analytischen Aufgabe.

(In Folge der Aufgabe 7. S. 99. des dritten Bandes dieses Journals.)

(Von Herrn *Th. Clausen* zu Altona.)

Die Gleichung einer krummen Fläche zwischen rechtwinkligen Coordinaten sei gegeben:

$$1. \quad p\partial x + q\partial y + r\partial z = 0,$$

man soll in der Fläche eine Curve so ziehn, dafs die z für gleich lange Bogenstücke der Curve, gleich viel von einander verschieden sind, oder dafs

$$2. \quad \int\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2)} = \varkappa + \lambda z,$$

wo $\varkappa$ und λ Constanten bedeuten, und λ nicht gröfser als 1 ist.

Erhebt man die erste dieser Gleichnngen und das Differential der zweiten ins Quadrat, so hat man folgende:

$$p^2\partial x^2 + 2pq\,\partial x\,\partial y + q^2\partial y^2 = r^2\partial z^2,$$
$$\partial x^2 + \partial y^2 = (\lambda^2 - 1)\partial z^2,$$

die letztere mit p^2+q^2 multiplicirt und von dem Producte die erste abgezogen giebt:

$$q^2\partial x^2 - 2pq\,\partial x\,\partial y + p^2\partial y^2 = (\lambda^2-1)(p^2+q^2)\partial z^2,$$

oder

$$3. \quad q\partial x - p\partial y - \sqrt{[(\lambda^2-1)(p^2+q^2)]}\,\partial z = 0.$$

Eliminirt man nun zwischen den Gleichungen 1. und 3. ∂z und substituirt in die daraus entspringende den aus dem Integral der Gleichung 1. folgenden Werth von z, so erhält man eine Differentialgleichung zwischen x und y, deren Integral die Gleichung der auf der Ebene der x und y projicirten Curve giebt.

6.

Lehrsatz (zu beweisen).

(Vom Herrn Prof. *Gudermann* zu Cleve.)

Sind zwei eckige Körper (Polyëder) K, K' (die Anzahl der Ecken eines jeden sei e) symmetrisch (symmetrisch gleich), so kann jeder in eine Menge m von kleineren Körpern so getheilt werden, dafs die des einen einzeln congruent sind denen des andern. Die Menge m, die beliebig vergröfsert werden kann, ist z. B.

$$m = 24(e - 2).$$

Bezeichnet ferner ε die Menge der an einem solchen Körper um irgend einer Ecke E herum, ihr zunächst liegenden Ecken (jede von ihnen mufs mit der Ecke E immer zu einer und derselben Grenzfläche gehören), so ist auch

$$m = 12(2e - \varepsilon - 4).$$

Dieser Ausdruck ist offenbar ein Minimum, wenn die Ecke E unter allen Ecken des Körpers K eine solche ist, für welche ε nicht gröfser sein kann. Für eine Pyramide ist z. B. $\varepsilon = e - 1$ und also $m = 12(e - 3)$. Ist K ein prismatischer Körper mit nicht parallelen Kanten, so ist $\varepsilon = \frac{1}{2}e + 2$ und also $m = 18(e - 4)$. Das vorhin bezeichnete Minimum ist indessen nicht immer ein solches. Es leidet Ausnahmen bei Körpern von besonderer Beschaffenheit.

7.

Von den metrischen Relationen im Gebiete der Lineal-Geometrie.

(Vom Herrn Prof. *Möbius* zu Leipzig.)

Die Geometrie der geraden Linie oder die Lineal-Geometrie, ein Ausdruck, dessen sich zuerst der scharfsinnige Lambert*) bedient zu haben scheint, enthält alle diejenigen geometrischen Aufgaben, die sich blofs mit Hülfe des Lineals, ohne Anwendung des Zirkels, lösen lassen, und beschränkt sich eben so nur auf diejenigen Eigenschaften einer Figur, welche aus den Bedingungen hervorgehen, dafs drei oder mehrere gewisse Puncte der Figur in Einer Geraden liegen, oder dafs drei oder mehrere gewisse Gerade sich in Einem Puncte schneiden; auf Eigenschaften also, welche eine Figur unverändert beibehält, wie auch ihre Theile die Lage gegen einander ändern mögen, nur dafs jede drei oder mehrere Puncte, welche Anfangs in einer Geraden lagen, auch fortwährend in einer Geraden bleiben. Die Beziehung, welche zwischen der so geänderten Figur und der anfänglichen statt findet, habe ich in meinem *Barycentrischen Calcul* Collineations-Verwandtschaft genannt und von ihr im 2ten Abschnitt, 5. — 8. Cap. gehandelt.

Es ist diese Beziehung oder Verwandtschaft, so lange nur von ebenen Figuren die Rede ist, einerlei mit derjenigen, welche zwischen einer ebenen Figur und ihrer perspectivischen Projection auf eine andere Ebene obwaltet. Liegen nemlich drei Puncte der erstern Figur in einer Graden, so sind immer auch ihre Projectionen in einer Geraden enthalten, in derjenigen, worin die letztere Ebene von einer durch das Auge und die erstere Grade gelegten Ebene geschnitten wird. Und umgekehrt läfst sich zeigen, dafs von zwei ebenen Figuren, welche in jener Verwandtschaft zu einander stehen, die eine immer als perspectivische Projection der andern angesehen werden kann (*Bar. Calc.* §. 230. Anmerk.). Doch habe ich von dieser an sich sehr fruchtbaren Ansicht in genannter Schrift

*) Lamberts freie Perspective. Anmerkungen und Zusätze S. 162.

keinen Gebrauch gemacht, da mir theils der Hülfsbegriff des Augenpunctes zu fremdartig schien, theils diese Ansicht bei Figuren im Raume nicht füglich mehr anwendbar ist. Ich bin daher a. a. O. von der gegenseitigen Beziehung der Figuren nach der geraden Linie unmittelbar ausgegangen, habe damit die hierhergehörigen Relationen, die graphischen, so wie die metrischen, entwickelt, und habe, was insbesondere die metrischen anlangt, den allgemeinen Character derselben, ihre verschiedenen Formen und gegenseitige Abhängigkeit zu bestimmen gesucht.

Da ich mich aber bei diesen Entwickelungen der barycentrischen Rechnung bedient habe, und hierdurch, so wie durch die neuen dabei gebrauchten Ausdrücke, Mancher von einem näheren Eingehen in meine Untersuchungen zurückgehalten werden mag, gleichwohl aber die gefundenen Resultate für die Geometrie nicht ohne einigen Werth sein dürften, so hat es mir zweckmäfsig geschienen, die gedachten Gegenstände im Vorliegenden mittelst der gewöhnlichen Coordinatenmethode, und somit allgemein verständlich, von Neuem zu behandeln, und dieses um so mehr, da die linealgeometrischen Untersuchungen in neuester Zeit, besonders von französischen Mathematikern, mit einer Art Vorliebe betrieben zu werden scheinen.

Aufserdem aber, dafs hier nur die gewöhnliche Coordinatenmethode zum Grunde gelegt ist, unterscheidet sich gegenwärtiger Aufsatz von dem, was oben erwähnte Schrift über diese Gegenstände enthält, durch mehrere neu hinzugekommene Bemerkungen, besonders aber durch die am Schlusse aufgestellten metrischen Relationen bei Kegelschnitten, die ich erst neuerdings gefunden habe. Um übrigens diesem Aufsatze einen nicht zu grofsen Umfang zu geben, habe ich mich blofs auf ebene Figuren beschränkt. — Die citirten §§. beziehen sich auf den *Baryc. Calcul.*

1) Von zwei Ebenen, deren gegenseitige Lage hierbei nicht in Rücksicht kommt, entspreche jedem Puncte der einen Ebene ein Punct in der andern so, dafs für jede drei Puncte der einen Ebene, welche in einer Geraden liegen, die entsprechenden drei Puncte der andern ebenfalls in einer Geraden enthalten sind; dafs folglich, wenn man in der einen Ebene eine Gerade zieht, die den Puncten dieser Geraden in der andern Ebene entsprechenden Puncte gleichfalls eine Gerade bilden; oder kürzer, dafs jeder Geraden in der einen eine Gerade in der andern (folglich auch jeder krummen Linie in der einen eine krumme, nicht gerade Linie in der anderen) entspricht.

2) Um dieses gegenseitige Entsprechen der Puncte beider Ebenen analytisch auszudrücken, ziehe man in jeder derselben zwei sich unter beliebigem Winkel schneidende Coordinatenaxen, und nenne x, y die Coordinaten irgend eines Punctes der einen Ebene; t, u die Coordinaten des entsprechenden Punctes der andern. Hiernach müssen t sowohl als u Functionen von x und y sein:

$$t = F(x, y), \quad u = G(x, y).$$

Um die Formen dieser Functionen auszumitteln, nehme man an, es sei in der Ebene der t, u irgend eine gerade Linie gezogen, deren Gleichung:

$$\alpha t + \beta u + \gamma = 0.$$

Die Gleichung für die entsprechende Linie in der Ebene der x, y wird sein:

$$(1.) \quad \alpha F(x, y) + \beta G(x, y) + \gamma = 0.$$

Da nun diese Linie ebenfalls gerade sein soll, so mufs die Gleichung (1.), so wie sie nach α, β, γ linear ist, auch nach x und y linear sein. Die allgemeinste Form einer solchen Gleichung ist aber:

$$(2.) \quad \alpha(ax + by + c) + \beta(fx + gy + h) + \gamma(x + my + n) = 0,$$

wo in dem letzten Gliede der Coefficient von x weggelassen ist, indem man sich mit demselben alle übrigen Coefficienten a, b, . . m, n dividirt vorstellen kann. Aus der Identität der Gleichungen (1.) und (2.) für alle Werthe, welche man den Constanten α, β, γ ertheilen mag, folgt aber:

$$(3.) \quad F(x, y) = t = \frac{ax + by + c}{x + my + n}, \quad G(x, y) = u = \frac{Fx + gy + h}{x + my + n},$$

und hiermit sind die Formen der Functionen, welche t und u von x, y sein müssen, vollkommen bestimmt.

3) Drückt man mittelst der Gleichungen (3.) umgekehrt x und y durch t, u aus, so wird man Ausdrücke von derselben Form wie die vorigen erhalten, nemlich Brüche, deren Zähler und Nenner lineare Functionen von t und u, und deren Nenner überdies einander gleich sind; woraus zu schliefsen, dafs wenn jeder Geraden in der Ebene der t, u eine Gerade in der Ebene der x, y entspricht, auch umgekehrt jede Gerade der letztern Ebene eine Gerade in der erstern zur entprechenden Linie hat.

Eben so erhellet, dafs die Gleichungen (3.) ihre Form nicht ändern, wenn statt x und y oder statt t und u Ausdrücke von der Form $\delta x + \varepsilon y + \zeta$ oder $\lambda t + \mu u + \nu$ gesetzt werden, d. h. wenn man statt der an-

fänglichen Coordinatenaxen beliebige andere Linien zu Axen wählt; wie dies auch schon aus der Natur der Sache folgt.

Aus der Gleichung (3.) geht weiter hervor, dafs einem in endlicher Entfernung vom Anfangspuncte der Coordinaten gelegenen Puncte der einen Ebene, in der andern auch ein unendlich entfernter Punct entsprechen kann, und dafs einem unendlich entfernten Puncte der einen Ebene im Allgemeinen ein endlich gelegener in der andern entspricht. Ueberhaupt nemlich werden alle unendlich entfernten Puncte der Ebene der t, u, in der Ebene der x, y durch die Puncte der Geraden vorgestellt, deren Gleichung $x+my+n=0$ ist; und eben so giebt es eine gewisse Gerade in der Ebene der t, u von der Beschaffenheit, dafs jeder Punct der Ebene der x, y, welcher einem Puncte dieser Geraden entspricht, unendlich entfernt ist. — Bei der perspectivischen Projection ist diese Gerade einerlei mit derjenigen, in welcher eine durch das Auge, parallel mit der abzubildenden Ebene, gelegte Ebene die Tafelebene schneidet.

Von zwei oder mehreren Linien, welche mit einander parallel laufen, sind daher die entsprechenden Linien nicht ebenfalls einander parallel, sondern schneiden sich in einem Puncte. Jedem Systeme paralleler Linien in der einen Ebene gehört daher in der andern Ebene ein Punct zu: der Durchschnittspunct der den Parallelen des jedesmaligen Systems entsprechenden Geraden. Alle diese Puncte aber sind in einer und derselben Geraden enthalten, in der Geraden, deren Puncte den unendlich entfernten Puncten der erstern Ebene entsprechen.

4) In den zwei Gleichungen (3.) kommen acht von einander unabhängige Constanten a, b, c, f, g, h, m, n vor. Sie lassen sich bestimmen, wenn man von vier Puncten in der einen und den vier ihnen entsprechenden Puncten in der andern Ebene die Coordinaten kennt. Substituirt man diese der Reihe nach für x, y, t, u in den Gleichungen (3.), so erhält man 4 solcher Paare von Gleichungen, woraus sich die 8 Constanten, durch die Coordinaten der vier Paare sich entsprechender Puncte ausgedrückt, ableiten lassen. Auch können nunmehr für jeden fünften durch seine Coordinaten gegebenen Punct der einen Ebene die Coordinaten des entprechenden Punctes in der andern gefunden werden. Man bemerke nur noch, dafs, wenn jene Bestimmung der 8 Constanten ausführbar sein soll, von den anfänglichen vier Puncten in der einen, und folglich auch von den

vier ihnen entsprechenden in der andern Ebene, keine drei in gerader Linie liegen dürfen.

Wenn daher die Puncte zweier Ebenen in die jetzt in Rede stehende lineare Beziehung zu einandar gesetzt werden sollen, so nehme man irgend 4 Puncte A, B, C, D in der einen und beliebige 4 Puncte A', B', C', D' in der andern Ebene, — nur dafs weder von den 4 erstern, noch von den 4 letztern irgend 3 in einer Geraden sind, — und setze sie einander entsprechend: A' dem A, . . . D' dem D. Hiermit ist für jeden fünften Punct E der einen Ebene der Ort des entsprechenden fünften E' in der andern vollkommen bestimmt. Zwischen je vier Puncten, — dies folgt daraus schlüfslich, — und den ihnen entsprechenden, wo weder von jenen noch von diesen vier Puncten irgend drei in einer Geraden sind, kann daher keine hierhergehörige metrische Relation noch nicht statt finden, wohl aber wenn ein fünftes oder noch mehrere Paare sich entsprechender Puncte hinzu kommen.

5) Um jetzt diese Relationen zu entwickeln, wollen wir von dem speciellen Falle ausgehen, wo die in Betracht zu ziehenden Puncte der einen, und folglich auch die entsprechenden in der andern Ebene, in gerader Linie liegen. Heifsen X, X', X'', . . . die Puncte in der Ebene der x, y, und T, T', T'', . . . die ihnen entsprechenden in der Ebene der t, u. Weil in jeder der beiden Ebenen die Coordinatenaxen nach Willkühr gelegt werden können, so werde die Axe der x durch die Puncte X, X', . . . und die Axe der t durch die Puncte T, T', . . . gezogen. Seien hiernach die Abscissen von X, X', . . . resp. $= x$, x', . . .; und von T, T', . . . resp. $= t$, t', . . ., so hat man, weil die Ordinaten (y und u) für die einen sowohl als die andern Puncte null sind, folgende Gleichungen:

$$t = \frac{ax+c}{x+n}, \quad t' = \frac{ax'+c}{x'+n}, \quad t'' = \frac{ax''+c}{x''+n}, \text{ etc.}$$

Da in jeder derselben von den obigen acht Constanten nur drei noch vorkommen, so wird man durch Verbindung irgend vier solcher Gleichungen eine Gleichung zwischen den Abscissen von vier Paaren sich entsprechender Puncte allein erhalten können. Da ferner durch Annahme anderer Anfangspuncte in den Axen der x und t jene Gleichungen zwischen t und x ihrer Form nach offenbar unverändert bleiben und nur die darin vorkommenden Constanten a, c, n andere Werthe erhalten, so

wird auch die durch Elimination dieser Constanten hervorgehende Gleichung von den Anfangspuncten der Abscissen unabhängig sein und nur solche Gröfsen enthalten, wodurch die gegenseitige Lage der Puncte X, X', . . . und T, T', . . . selbst bestimmt wird.

Liegen daher die in Betracht gezogenen Puncte der einen und folglich auch die entsprechenden Puncte der andern Ebene in gerader Linie, so wird zwischen je vier Paaren derselben eine metrische Relation obwalten. Die zu ihrer Herleitung erforderliche Elimination von a, c, n läfst sich durch folgende Rechnung bewerkstelligen.

Zuerst hat man:

$$t'-t=\frac{(an-c)(x'-x)}{(x+n)(x'+n)},\quad t''-t'=\frac{(an-c)(x''-x')}{(x'+n)(x''+n)},$$

und daher

$$\frac{t'-t}{t''-t'}=\frac{x''+n}{x+n}\cdot\frac{x'-x}{x''-x'},$$

und eben so

$$\frac{t'''-t}{t''-t'''}=\frac{x''+n}{x+n}\cdot\frac{x'''-x}{x''-x'''},$$

folglich

$$\frac{t'-t}{t''-t'}:\frac{t'''-t}{t''-t'''}=\frac{x'-x}{x''-x'}:\frac{x'''-x}{x''-x'''}.$$

Ist nun M der Anfangspunct in der Axe der t, so hat man $t=MT$, $t'=MT'$, $t''=MT''$, etc., von welchen Linien je zwei, wie MT und MT', einerlei oder entgegengesetzte Zeichen haben, je nachdem die Puncte T und T' auf einerlei oder verschiedenen Seiten von M liegen. Hierdurch wird $t'-t=TT'$, $t''-t'=T'T''$, etc., von denen man daher wiederum je zwei, wie TT' und $T'T''$, mit einerlei oder verschiedenen Zeichen zu nehmen hat, je nachdem die durch die Stellung der Buchstaben zugleich angedeuteten Richtungen, von T nach T' und von T' nach T'', in der Axe der t einerlei oder einander entgegengesetzt sind. Auf gleiche Art ist $x'-x=XX'$, etc. in der Axe der x; die gefundene Proportion aber erhält die Gestalt:

$$\frac{TT'}{T'T''}:\frac{TT'''}{T'''T''}=\frac{XX'}{X'X''}:\frac{XX'''}{X'''X''}.$$

6) Für drei Puncte A, B, C der einen Ebene, welche in einer Geraden liegen, können daher, — so lange noch keine andere Paare sich entsprechender Puncte angenommen worden, — die entsprechenden Puncte A', B', C' in der andern Ebene nach Belieben gewählt werden, nur dafs

sie ebenfalls in einer Geraden sind. Für jeden vierten Punct D in der Geraden ABC ist alsdann der entsprechende Punct D' in der Geraden $A'B'C'$ durch die Proportion bestimmt:

$$\frac{AB}{BC} : \frac{AD}{DC} = \frac{A'B'}{B'C'} : \frac{A'D'}{D'C'},$$

wo nur die vorigen T, T', X, X', mit A, B, . . . A', B', . . . vertauscht sind.

Das erste Glied $\frac{AB}{BC}$ ist, wie aus dem vorhin Gesagten erhellet, positiv oder negativ, nachdem B zwischen oder aufserhalb A und C liegt, und drückt das Verhältnifs aus, nach welchem die Linie AC im Puncte B geschnitten wird. Dasselbe ist auch auf die drei übrigen Glieder der Proportion anzuwenden.

Das Verhältnifs $\frac{AB}{BC} : \frac{AD}{DC}$ ist daher nichts anderes, als das Verhältnifs zwischen den Verhältnissen, nach welchen die Gerade AC das eine Mal in B und das andere Mal in D geschnitten wird. Ein solches aus vier Puncten in einer Geraden sich bildende Verhältnifs habe ich (§. 182.) Doppelschnitts-Verhältnifs genannt.

Da, wie die Folge zeigen wird, alle bei der Lineal-Geometrie vorkommenden metrischen Relationen aus D. Verhältnissen (Doppelschnitts-Verhältnissen) zusammengesetzt sind, oder sich doch auf solche zurückführen lassen, so sah ich mich zur Einführung einer abgekürzten Schreibart veranlafst. Zu dem Ende drückte ich ein D. Verhältnifs blofs dadurch aus, dafs ich die vier Puncte, als den ersten und zweiten Grenzpunct der geschnittenen Linie, den ersten und zweiten Schneidepunct in der genannten Ordnung neben einander setzte, sie durch Commata unterschied und mit Haken einschlofs (§. 183.) und hiernach das vorige D. Verhältnifs also darstellte: (A, C, B, D).

Das einfachste Beispiel eines D. Verhältnisses giebt die bekannte harmonische Theilung. Eine Linie AB wird in C und D harmonisch getheilt, wenn sie in C und D nach gleichen Verhältnissen getheilt wird, nur dafs die Exponenten dieser Verhältnisse entgegengesetzte Zeichen haben, dafs mithin von den zwei Puncten C und D der eine innerhalb, der andere aufserhalb A und B liegt; also in Zeichen, wenn

$$AC : CB = -(AD : DB), \text{ d. i. } \frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB} = -1;$$

oder, nach der kürzeren Schreibart, wenn

$$(A, B, C, D) = -1.$$

7) Das in Nr. 5. erhaltene Resultat können wir jetzt kürzlich so ausdrücken: Jedes *D.*Verhältnifs zwischen vier Puncten einer Geraden in der einen Ebene ist dem aus den entsprechenden Puncten der andern gebildeten *D.*Verhältnisse gleich. Haben daher $A, B, \ldots, A', B', \ldots$ dieselbe Bedeutung wie in Nr. 6., so ist:

$$(A, B, C, D) = (A', B', C', D').$$

Hiemit kann, wie schon dort bemerkt wurde, wenn von diesen 8 Puncten 7 gegeben sind, der 8te gefunden werden. Auf eben die Art mufs nun auch sein:

$(A, C, B, D) = (A', C', B', D')$, $(B, A, C, D) = (B', A', C', D')$ etc.,

wie auch die Buchstaben in jedem der zwei einander gleichen *D.*Verhältnisse mit einander vertauscht werden, wenn es nur in beiden auf gleiche Art geschieht. Da aber hierdurch keine neuen Bestimmungen für den achten Punct hervorgehen können, so müssen die *D.*Verhältnisse (A, C, B, D), (B, A, C, D) etc., und wie auch sonst noch die vier Elemente $A, \ldots D$ permutirt werden mögen, insgesammt Functionen von (A, B, C, D), also auch von einander abhängig sein. Und in der That findet sich leicht, dafs wenn man $(A, B, C, D) = a$ setzt:

I. $(B, A, C, D) = \frac{1}{a}$, II. $(A, C, B, D) = 1 - a$, III. $(A, B, D, C) = \frac{1}{a}$

ist, woraus man alle übrigen Permutationen berechnen kann. Denn von irgend einer der 24 Permutationen, welche aus 4 Elementen sich bilden lassen, kann man schrittweise zu jeder andern von ihnen gelangen, indem man nach und nach bald die zwei ersten, bald die zwei mittleren, bald die zwei letzten Elemente mit einander vertauscht. Durch Vertauschung der zwei ersten (I.) oder der zwei letzten (III.) erhält man aber den reciproken Werth des vorhergehenden, und durch Vertauschung der zwei mittleren Elemente (II.) die Ergänzung des vorhergehenden Werthes zur Einheit. Auf diese Weise ergiebt sich, dafs jedes der 24 *D.*Verhältnisse, welche sich aus den 4 Puncten bilden lassen, einen der 6 Werthe hat:

1) a, 2) $\frac{1}{a}$, 3) $\frac{a-1}{a}$, 4) $\frac{a}{a-1}$, 5) $\frac{1}{1-a}$, 6) $1-a$. (§. 184.)

NB. Setzt man diese 6 Werthe in ihrer Folge $= a, b, c, d, e, f$, so ist: $ab = cd = ef = 1$ und $b + c = d + e = f + a = 1$. Eine unend-

liche Reihe, deren erstes Glied $= a$, und wo das Product aus jedem ungeraden Gliede in das nächtsfolgende gerade $= 1$, so wie die Summe jedes geraden Gliedes und des nächstfolgenden ungeraden $= 1$ sein sollte, würde daher nichts anderes, als eine continuirliche Wiederholung jener 6 Werthe $a, \frac{1}{a}, \ldots 1-a$ sein.

8) Um, wenn die Puncte A, B, C, D einer Geraden a, und von den entsprechenden Puncten $A', B', \ldots$ der entsprechenden Geraden a' drei Puncte A', B', C' gegeben sind, den vierten D' zu finden, kann man sich folgender einfachen Construction bedienen.

Man setze die Linien a und a' (Fig. 1. Taf. II.) unter einem beliebigen Winkel an einander, so dafs die Puncte A und A' zusammenfallen. Hierauf ziehe man BB' und CC', welche sich in O schneiden, so ist dieser Durchschnitt von OD mit a' der gesuchte Punct D'.

Um die Richtigkeit dieses Verfahrens zu beweisen, ist nur darzuthun, dafs $(A, B', C', D') = (A, B, C, D)$. Man denke sich zu dem Ende eine der eben construirten Figur entsprechende gezeichnet; die den Puncten $A, B, \ldots B', \ldots O$ entsprechenden seien darin $\alpha, \beta, \ldots \beta', \ldots 0$, und daher $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (A, B, C, D)$, $(\alpha, \beta', \gamma', \delta') = (A, B', C', D')$. Werde nun, was immer geschehen kann (Nr. 3.), der Punct O unendlich entfernt angenommen, so sind $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$, $\delta\delta'$ mit einander parallel, und es verhält sich $\alpha\gamma : \gamma\beta = \alpha\gamma' : \gamma'\beta'$, $\alpha\delta : \delta\beta = \alpha\delta' : \delta'\beta'$. Mithin ist

$$(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (\alpha, \beta', \gamma', \delta'),$$

also auch

$$(A, B, C, D) = (A, B', C', D').$$

9) Seien jetzt in der Geraden AB aufser den 4 Puncten $A, \ldots D$ noch mehrere andere $E, F, G, \ldots$ gegeben. Die ihnen entsprechenden in der Geraden $A'B'$ heifsen $E', F', G', \ldots$ So wie nun nach willkührlicher Annahme von A', B', C', der Punct D' durch die Gleichheit der D. Verhältnisse

$$(A, B, C, D) = (A', B', C', D') = d$$

bestimmt wurde (Nr. 6.), so werden auch die übrigen Puncte $E', F', G', \ldots$ mittelst der Gleichungen

$$(A, B, C, E) = (A', B', C', E') = e,$$
$$(A, B, C, F) = (A', B', C', F') = f,$$
u. s. w. u. s. w.

sich finden lassen, und es werden nach verrichteter Construction auch

je zwei andere D.Verhältnisse zwischen sich entsprechenden Puncten, z. B.

$$(B, C, E, F) \text{ und } (B', C', E', F')$$

einander gleich sein, jedes derselben $= x$. Da nun zur Construction des Systems der Puncte A', B', . . . E', F', . . ., wegen der willkührlichen Bestimmung der drei ersten, auch schon die Kenntnifs der Exponenten d, e, f, . . . hinreicht, und sich alsdann aus der Construction der Werth von x selbst ergiebt, so mufs x eine Function von d, e, f, . . . sein. Hat man also ein System von m Puncten A, B, C, D, . . . in einer geraden Linie, so ist von den $m-3$ D.Verhältnissen $(d, e, f, \ldots)$, welche die drei ersten Puncte A, B, C mit jedem der $m-3$ übrigen bilden, jedes andere D.Verhältnifs (x) des Systems eine Function. Denkt man sich daher alle möglichen D.Verhältnisse zwischen den m Puncten als Functionen dieser $m-3$ Gröfsen d, e, f, . . . ausgedrückt, so kann man, wenn irgend $m-3$ von einander unabhängige dieser D.Verhältnisse gegeben sind, daraus die Werthe von d, e, f, . . . und somit den Werth jedes andern D.Verhältnisses finden. Also:

Aus irgend $m-3$ von einander unabhängigen D.Verhältnissen eines Systems von m Puncten in einer geraden Linie kann jedes andere D.Verhältnifs dieses Systems gefunden werden. (§. 187.)

So findet sich, wenn bei den 5 Puncten A, . . . E die zwei D.Verhältnisse $(A, B, C, D) = p$ und $(B, C, D, E) = q$ gegeben sind, jedes dritte als Function von p und q, z. B. $(A, E, B, D) = (1-p)(1-q)$.

10) Die durch die Gleichheit der D.Verhältnisse ausgedrückte Relation zwischen zwei Systemen von Puncten in geraden Linien läfst sich auch noch auf eine andere merkwürdige Art darstellen. — Man hat:

$$d = (A, B, C, D) = \frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB},$$

und daher

$$AD.CB.d = AC.DB,$$

oder

$$AD(AB-AC)d = AC(AB-AD),$$

und wenn man mit $AB.AC.AD$ dividirt:

$$\frac{1-d}{AB} + \frac{d}{AC} = \frac{1}{AD},$$

und wenn man noch $1-d : d = \beta : \gamma$ setzt:

$$(\alpha.) \quad \frac{\beta}{AB} + \frac{\gamma}{AC} = \frac{\beta+\gamma}{AD},$$

so wie umgekehrt hieraus die Gleichung:

$$(A, B, C, D) = d = \frac{\gamma}{\beta+\gamma},$$

und hieraus weiter die Gleichung:

$$(A', B', C', D') = \frac{\gamma}{\beta+\gamma}$$

folgt. Besteht daher zwischen den Abschnitten AB, AC, AD die Relation $(a.)$, so mufs auch für die entsprechenden Abschnitte $A'B'$, etc.

$$(a'.) \quad \frac{\beta}{A'B'} + \frac{\gamma}{A'C'} = \frac{\beta+\gamma}{A'D'}$$

sein; d. h. ist AD das harmonische Mittel von AB und AC für die Coefficienten β und γ, so ist es auch $A'D'$ von $A'B'$ und $A'C'$ für dieselben Coefficienten.

Dafs diese Relation auf jede gröfsere Zahl von Paaren sich entsprechender Puncte in geraden Linien ausgedehnt werden kann, so dafs, wenn

$$\frac{\beta}{AB} + \frac{\gamma}{AC} + \frac{\delta}{AD} + \ldots = \frac{\beta+\gamma+\delta+\ldots}{AM}$$

ist, dieselbe Gleichung noch besteht, wenn man für $A, B, \ldots M$ die entsprechenden Puncte $A', B', \ldots M'$ setzt, dies zeigt Poncelet in seinem *Mémoire sur les centres de moyennes harmoniques* im 3ten Hefte des 3ten Bandes dieses Journals, Seite 240.

Um diese Erweiterung des vorigen Satzes mit Hülfe der Lehre von den D.Verhältnissen zu beweisen, so folgt aus der angenommenen Gleichung:

$$\beta\left(\frac{1}{AB} - \frac{1}{AM}\right) + \gamma\left(\frac{1}{AC} - \frac{1}{AM}\right) + \delta\left(\frac{1}{AD} - \frac{1}{AM}\right) + \ldots = 0,$$

d. i.

$$\beta \cdot \frac{BM}{AB \cdot AM} + \gamma \cdot \frac{CM}{AC \cdot AM} + \delta \cdot \frac{DM}{AD \cdot AM} + \ldots = 0,$$

also auch

$$\beta \cdot \frac{BM}{AB} : \frac{PM}{AP} + \gamma \cdot \frac{CM}{AC} : \frac{PM}{AP} + \delta \cdot \frac{DM}{AD} : \frac{PM}{AP} + \ldots = 0,$$

wo P einen beliebigen Punct der Geraden $AB\ldots$ bezeichnet; und weil

$$\frac{BM}{AB} : \frac{PM}{AP} = \frac{AP}{PM} : \frac{AB}{BM} = (A, M, P, B), \text{ etc.},$$

so kommt:

$$\beta(A, M, P, B) + \gamma(A, M, P, C) + \delta(A, M, P, D) + \ldots = 0.$$

Wegen der Unveränderlichkeit der D.Verhältnisse von dem einen Systeme zum andern ist daher auch:

$$\beta(A', M', P', B') + \gamma(A', M', P', C') + \ldots = 0,$$

woraus sich auf umgekehrtem Wege

$$\frac{\beta}{A'B'} + \frac{\gamma}{A'C'} + \ldots = \frac{\beta+\gamma+\ldots}{A'M'}$$

ergiebt.

11) Wir gehen nunmehr zu den Relationen zwischen zwei Systemen von Puncten über, wo die Puncte jedes Systems für sich nicht mehr, wie bisher, blofs in einer Geraden, sondern in einer Ebene überhaupt liegen. Seien demnach A, B, C, D (Fig. 2.) irgend vier Puncte der einen Ebene, von denen keine drei in einer Geraden sind, und A', B', C', D' die ihnen entsprechenden Puncte in der andern, von denen ebenfalls keine drei in einer Geraden liegen. Aufser diesen negativen Bedingungen finden zwischen beiden Systemen keine weiteren statt, und die erstern vier Puncte sowohl, als die vier letztern, können ganz nach Willkühr genommen werden. Mit jedem fünften Puncte E aber, der zu den vier erstern hinzukommt, wird auch der entsprechende Punct E' in der Ebene der vier letztern bestimmt sein (Nr. 4.).

Um nun E' zu finden, wenn E gegeben ist, hat man auch hier blofs das Prinzip von der Gleichheit der D.Verhältnisse in Anwendung zu bringen.

Man ziehe zu dem Ende BD, BE, welche AC in M, P treffen, und AD, AE, welche BC in N, Q schneiden. Auf dieselbe Art werden M', P', N', Q' in der andern Ebene bestimmt, wo E', und damit P', Q', einstweilen als schon bekannt vorausgesetzt werden. Da nun B, B' und D, D' zwei Paare sich entsprechender Puncte sind, so wird auch jedem andern Puncte der Linie BD ein Punct in $B'D'$, und eben so jedem Puncte in AC ein Punct in $A'C'$, folglich dem Puncte M, als dem gemeinschaftlichen Puncte der BD und AC, der Durschnittspunct M' von $B'D'$ und $A'C'$ entsprechen. Auf gleiche Art sind auch N und N', P und P', Q und Q' Paare sich entsprechender Puncte. Es liegen aber A, C, M, P und die ihnen entsprechenden Puncte A', C', M', P' in geraden Linien. Mithin mufs sein:

$$\text{I.}\quad \frac{AM}{MC} : \frac{AP}{PC} = \frac{A'M'}{M'C'} : \frac{A'P'}{P'C'},$$

woraus sich P finden läfst, da alle übrigen in dieser Proportion vorkommenden Puncte gegeben sind. — Eben so wird Q' durch die Gleichheit

der D-Verhältnisse (B, C, N, Q) und (B', C', N', Q') gefunden. Hiermit ergiebt sich endlich E' als der gegenseitige Durchschnitt von $B'P'$ und $A'Q'$.

12) So wie der Punct E', so kann auch für jeden andern Punct in der ersten Ebene der entsprechende Punct in der zweiten durch zwei Gleichungen zwischen D.Verhältnissen gefunden werden, woraus nothwendig folgt, dafs alle metrischen Relationen zwischen beiden Systemen auf die Gleichheit ihrer D.Verhältnisse hinauskommen, und dafs eine solche Relation im allgemeinen Falle, wo von den in Betracht kommenden Puncten keine drei in einer Geraden liegen, zwischen nicht weniger als fünf Paaren sich entsprechender Puncte bestehen kann.

Die zur Aufstellung einer solchen Relation im Vorigen angewendeten Hülfspuncte M, P oder N, Q und die ihnen entsprechenden M', P', etc. können folgendergestalt beseitigt werden. Es ist ein bekannter Satz, dafs wenn eine Gerade AC von einer andern BD im Puncte M geschnitten wird, das Verhältnifs, nach welchem dieses geschieht,

$$AM:CM = \text{dem Verhältnisse der Dreiecke } ABD:CBD$$

ist. Auf gleiche Art hat man, weil BE die AC in P schneidet,

$$AP:CP = ABE:CBE$$

und eben so in der andern Figur:

$$A'M':C'M' = A'B'D':C'B'D', \quad A'P':C'P' = \text{etc.}$$

Hierdurch aber verwandelt sich die obige Proportion I. in:

$$\text{II.} \quad \frac{ABD}{CBD}:\frac{ABE}{CBE} = \frac{A'B'D'}{C'B'D'}:\frac{A'B'E'}{C'B'E'}.$$

Sind demnach $A, \ldots E$ irgend fünf Puncte der einen Ebene, und $A', \ldots E'$ die ihnen entsprechenden in der andern, so findet zwischen den durch ihre Verbindung gebildeten Dreiecken immer die Proportion II. statt.

Da die fünf Paare sich entsprechender Puncte ganz nach Belieben zu nehmen sind, so können auch die in II. sie bezeichnenden Buchstaben willkührlich, nur in beiden Systemen auf einerlei Weise, mit einander vertauscht werden. So folgt z. B. durch Verwechselung des A mit B und des A' mit B':

$$\frac{BAD}{CAD}:\frac{BAE}{CAE} = \frac{B'A'D'}{C'A'D'}:\frac{B'A'E'}{C'A'E'},$$

eine Proportion, welche auch geradezu aus der Gleichung der D.Verhältnisse (B, C, N, Q) und (B', C', N', Q') (Nr. 11.) entspringt.

13) Wenn es nicht darauf ankommt, bei Angabe der von der einen Ebene zur andern constant bleibenden Verhältnisse nur die möglich kleinste Anzahl (= 5) willkührlich genommener Puncte zuzulassen, so kann man diesen Verhältnissen noch mehrere andere Formen geben, die ihrer symmetrischen Bildung wegen angeführt zu werden verdienen. — Werde die Linie AB (Fig. 3.) von den Linien CD und EF in den Puncten M und N geschnitten, so ist, wie in Nr. 12.:

$$AM:BM = ACD:BCD,$$
$$AN:BN = AEF:BEF,$$

und folglich das Verhältnifs

$$\text{II.}^* \quad (ACD:BCD):(AEF:BEF)$$

dem D. Verhältnisse $(AM:MB):(AN:NB)$ gleich, und daher das eben so aus den 6 entsprechenden Puncten $A', \ldots F'$ gebildete von gleichem Werthe; wobei man noch bemerke, dafs von den 4 Dreiecken des Verhältnisses II.* die zwei ersten und die zwei letzten einerlei Grundlinien (CD und EF), das erste und dritte aber, so wie das zweite und vierte einerlei Spitzen (A und B) haben.

Kürzer noch kann man daher dieses Verhältnifs ausdrücken durch

$$(Aa:Ba):(Ab:Bb) = \frac{Aa}{Ba}:\frac{Bb}{Ab},$$

wo a, b für die Linien CD, EF gesetzt sind, und somit Aa das Dreieck bezeichnet, welches A zur Spitze und a zur Grundlinie hat, etc.

14) Seien jetzt $A, B, C, \ldots$ mehrere Puncte und $a, b, c, \ldots$ mehrere gerade Linien von bestimmter Länge in der einen Ebene, so ist, wie wir eben gesehen haben, von dieser Ebene zur andern das Verhältnifs

$$\frac{Aa}{Ba}:\frac{Bb}{Ab} = \alpha$$

constant; und eben so müssen es auch die Verhältnisse

$$\frac{Ab}{Cb}\cdot\frac{Cc}{Ac} = \beta, \quad \frac{Ac}{Dc}\cdot\frac{Dd}{Ad} = \gamma, \quad \frac{Ad}{Ed}:\frac{Ee}{Ae} = \delta, \quad \text{etc.}$$

sein. Bildet man aus ihnen die Producte $\alpha\beta$, $\alpha\beta\gamma$, $\alpha\beta\gamma\delta$, etc., so bekommt man:

$$\text{III.} \quad \frac{Aa}{Ba}\cdot\frac{Bb}{Cb}\cdot\frac{Cc}{Ac},$$
$$\text{IV.} \quad \frac{Aa}{Ba}\cdot\frac{Bb}{Cb}\cdot\frac{Cc}{Dc}\cdot\frac{Dd}{Ad},$$
$$\text{V.} \quad \frac{Aa}{Ba}\cdot\frac{Bb}{Cb}\cdot\frac{Cc}{Dc}\cdot\frac{Dd}{Ed}\cdot\frac{Ee}{Ae}, \quad \text{etc.},$$

zusammengesetzte Verhältnisse, die daher gleichfalls von der einen Ebene zur andern constant sein müssen.

Es lassen sich aber diese Verhältnisse noch anschaulicher darstellen, wenn man statt der Linien a, b, c, ... ihre Durchschnitte mit den, die Puncte A, B, C, ... unter einander verbindenden Linien einführt. Werde nemlich die Linie AB von a im Puncte M, BC von b in N, CA und CD von c in O und P, DA und DE von d in Q und R, EA von e in S, etc. geschnitten, so ist, nach dem in Nr. 12. angeführten Satze:

$$\frac{Aa}{Ba}=\frac{AM}{BM},\quad \frac{Bb}{Cb}=\frac{BN}{CN},\quad \frac{Cc}{Ac}=\frac{CO}{AO},\quad \frac{Cc}{Dc}=\frac{CP}{DP},\quad \frac{Dd}{Ad}=\frac{DQ}{AQ},\quad \text{etc.}$$

und die Verhältnisse III., IV., V., etc. werden damit:

$$\text{III.}^*\quad \frac{AM}{MB}\cdot\frac{BN}{NC}\cdot\frac{CO}{OA},$$

$$\text{IV.}^*\quad \frac{AM}{MB}\cdot\frac{BN}{NC}\cdot\frac{CP}{PD}\cdot\frac{DQ}{QA},$$

$$\text{V.}^*\quad \frac{AM}{MB}\cdot\frac{BN}{NC}\cdot\frac{CP}{PD}\cdot\frac{DR}{RE}\cdot\frac{ES}{SA},\quad \text{etc.}\ ^*),$$

wobei jeder einzelne Factor, wie $\frac{AM}{BM}$, das Verhältnifs ausdrückt, nach welchem der zweimal gesetzte Punct M die Linie schneidet, welche die zwei andern Puncte A und B verbindet, und wo daher die drei in jedem Factor vorkommenden Puncte immer in einer Geraden liegen.

Hiernach ist das Verhältnifs III.* zusammengesetzt aus den drei Verhältnissen, nach welchen die drei Seiten AB, BC, CA des Dreiecks ABC von den resp. in ihnen liegenden Puncten M, N, O getheilt werden. Eben so ist IV.* das Verhältnifs, nach welchem die vier Seiten AB, ... DA des Vierecks $ABCD$ resp. in M, N, P, Q geschnitten werden; u. s. w. Ich habe daher die solcher Gestalt gebildeten Verhältnisse III.*, IV.*, V.* u. s. w. Dreieck-, Viereck-, Fünfeckschnitts-Verhältnisse u. s. w. und überhaupt Vieleckschnitts-Verhältnisse genannt (§. 215.).

15) Jedes Vieleckschnitts-Verhältnifs ist daher von der einen Ebene zur andern constant; d. h. sind A und A', B und B', ... I und I' mehrere Paare sich entsprechender Puncte, also

*) Dafs hierbei die Buchstaben in den Nennern der einzelnen Factoren in umgekehrter Folge geschrieben worden, MB statt des vorigen BM, etc., ist deshalb geschehen, um diese Formeln mit denen im *Baryc. Calcul* übereinstimmend darzustellen. Die absoluten Werthe derselben ändern sich dadurch nicht, sondern nur von III., V., VII. etc. die Vorzeichen.

$AB, \ldots I$ und $A'B', \ldots I'$ zwei sich entsprechende Vielecke, sind ferner $M, N, \ldots X$ resp. in den Seiten $AB, BC, \ldots IA$ der erstern Vielecks nach Belieben genommene Puncte, und $M', N', \ldots X'$ die entsprechenden Puncte, die daher resp. in den Seiten $A'B', B'C', \ldots I'A'$ des andern Vielecks liegen werden, so ist das Product aus den Verhältnissen $AM:MB$, $BN:NC$, etc. $IX:XA$, nach welchen die Seiten AB, $BC, \ldots IA$ des einen Vielecks von den in ihnen gewählten Puncten M, $N, \ldots X$ getheilt werden, von derselben Gröfse, als das Product, welches aus den entsprechenden Verhältnissen $A'M':M'B'$, $B'N':N'C'$, etc. $I'X':X'A'$ des andern Vielecks zusammengesetzt wird.

Dieser Satz gilt immer, wie auch die Puncte $A, B, \ldots I$ oder die Spitzen des Vielecks liegen mögen, selbst wenn sie alle, und folglich auch die Schneidepuncte $M, N, \ldots X$, in einer und derselben Geraden enthalten sind; er gilt immer, welches auch die Zahl der Spitzen sein mag, selbst wenn deren nur zwei sind, und mithin das Vieleck zum Zweieck wird. Denn seien A, B die beiden Spitzen und folglich AB, BA die beiden Seiten, M, N ihre Schneidepuncte, so reducirt sich das Vielecksverhältnifs auf $(AM:MB)(BN:NA)$, welches einerlei mit dem D. Verhältnifs $(AM:MB):(AN:NB)$, und mithin von der einen Ebene zur andern ebenfalls constant ist. Ein D. Verhältnifs läfst sich daher auch als das einfachste Vielecksverhältnifs, nemlich als ein Zweieckschnittsverhältnifs, betrachten.

Der Begriff des Vielecks ist demnach hier in ganz allgemeiner Bedeutung zu nehmen und darunter eine Figur zu verstehen, die von einer in sich zurückkehrenden, gebrochenen geraden Linie gebildet wird. Die Rückkehr in sich selbst, welche daran erkannt wird, dafs bei jeder der Formeln III*, IV.*, V.*, etc. die Vielecksspitze im Zähler des ersten Factors zugleich im Nenner des letzten vorkommt, und das überhaupt von je zwei nebeneinander stehenden Factoren die Spitzen im Nenner des vorangehenden und im Zähler des nachfolgenden einerlei sind, — diese Rückkehr ist etwas wesentlich Nothwendiges, indem mit Weglassung irgend eines der Factoren, als wodurch die Schliefsung des Vielecks unterbrochen würde, auch die Unveränderlichkeit des Verhältnisses von der einen Ebene zur andern nicht mehr statt finden würde.

16. Sind in einer Ebene m Puncte gegeben, und sollen in einer andern Ebene die ihnen entsprechenden Puncte gefunden werden, so kann

man von letzteren irgend 4 nach Willkühr nehmen, worauf jeder der $m-4$ übrigen Puncte dadurch gefunden wird, dafs man zwei die Lage des Punctes in der ersten Ebene bestimmende *D.*Verhältnisse in der andern Ebene von gleicher Gröfse macht (Nr. 11.). Zur Construction des ganzen Systems in der andern Ebene sind daher nicht mehr als $2(m-4)$ *D.*Verhältnisse überzutragen nöthig, und es werden sodann auch je zwei andere *D.*Verhältnisse zwischen sich entsprechenden Puncten beider Ebenen einander gleich sein. — Es folgt hieraus, wie in Nr. 9., dafs von den gedachten $2(m-4)$ *D.*Verhältnissen alle andern in den Figuren noch vorkommenden *D.*Verhältnisse abhängig sind, und überhaupt, weil jedes Vielecksverhältnifs als eine Function von *D.*Verhältnissen, und jedes *D.*Verhältnifs zugleich als Vielecksverhältnifs betrachtet werden kann (Nr. 15.):

Sind bei einem Systeme von m Puncten in einer Ebene von den aus der gegenseitigen Verbindung der Puncte durch gerade Linien entstehenden Vielecksverhältnissen irgend $2m-8$ von einander unabhängige gegeben, so kann daraus jedes andere Vielecksverhältnifs der Figur gefunden werden (§. 233.). Oder mit andern Worten:

Zwischen je $2m-7$ Vielecksverhältnissen, welche durch geradlinige Verbindung von m Puncten in einer Ebene entstehen, findet immer wenigstens eine Gleichung statt.

Uebrigens ist diese geradlinige Verbindung keinesweges blofs auf die $\frac{1}{2}m(m-1)$ Linien zu beschränken, welche die m Puncte zu zweien mit einander verknüpfen. Denn die hierdurch in beiden Ebenen entstehenden Durchschnittspuncte entsprechen sich wiederum (Nr. 11.); die durch je zwei derselben, die noch nicht durch eine Gerade verbunden waren, von Neuem gezogenen Geraden sind daher gleichfalls sich entsprechende Linien, und folglich die neuen durch sie gebildeten *D.*- und Vielecks-Verhältnisse von der einen Ebene zur andern einander gleich. Wie weit man daher auch die Verbindung der m Puncte fortsetzen mag, so dafs immer die entstehenden Durchschnitte von Neuem unter sich und mit den anfänglichen m Puncten oder den schon vorhandenen Durchschnitten verbunden werden, so können doch alle hiermit sich bildenden Viel-

ecksverhältnisse aus irgend $2m-8$ derselben, die von einander unabhängig sind, gefunden werden.

17) Eine ganz besondere Aufmerksamkeit verdient der so eben erhaltene Satz für den Fall, wo m seinen möglich kleinsten Werth $=4$ hat, und daher $2m-8=0$ wird. Bei einem Systeme von 4 Puncten in einer Ebene, von denen keine drei in einer Geraden liegen, werden daher alle durch fortgesetzte Verbindung dieser Puncte entstehenden *D.*- und Vielecks-Verhältnisse sich finden lassen, ohne dafs ein einziges von ihnen gegeben zu sein braucht. Dieses merkwürdige Resultat erhellet auch schon daraus, dafs bei der Construction eines entsprechenden Systems die ersten vier, also gegenwärtig alle Puncte nach Willkühr genommen werden können, und dafs dann alle durch geradlinige Verbindung der Puncte in beiden Systemen auf gleiche Art sich bildenden Vielecksverhältnisse von gleicher Gröfse sind; dafs also diese Verhältnisse, oder vielmehr die Exponenten derselben, keinesweges von der gegenseitigen Lage der anfänglichen 4 Puncte, sondern blofs von der Art und Weise abhängen, wie die 4 Puncte nach und nach mit einander verbunden worden sind.

Aber noch mehr: diese Exponenten müssen immer rational sein. Denn sind die vier Puncte gegeben und aufserdem noch die Art ihrer Verbindung durch gerade Linien, wodurch man zu den irgend ein Vielecksverhältnifs bildenden Puncten gelangt, so kann man damit die letztern Puncte immer ohne Zweideutigkeit finden. Der Exponent des Vielecksverhältnisses, der nach dem Vorigen nicht von der gegenseitigen Lage der erstern vier Puncte, sondern blofs von ihrer Verbindungsart durch gerade Linien abhängt, kann daher ebenfalls keine zwei- oder mehrdeutigen Ausdrücke, also keine Wurzelgröfsen enthalten, und noch weniger irrationale Zahlen, die aus transcendenten Operationen entspringen; er mufs folglich eine ganze Zahl oder ein rationaler Bruch sein.

18) Die Figur, welche hervorgeht, wenn man vier Puncte einer Ebene, von denen keine drei in einer Geraden liegen, durch Gerade verbindet, die drei damit entstehenden Durchschnitte abermals zu zweien durch Gerade zusammenzieht, und diese geradlinige Verbindung der immer neu entstehenden Durchschnitte unter sich und mit den schon vorhandenen, so weit als man will, fortsetzt, diese Figur habe ich ein Netz genannt (§. 200.), die Linien selbst und ihre gegenseitigen Durchschnitts-

puncte, die Linien und Puncte des Netzes, und die vier Puncte, von denen die Construction ausgeht, die Hauptpuncte des Netzes.

Das in dem Vorhergehenden erhaltene Resultat läfst sich hiermit einfach so ausdrücken:

Jedes in dem Netze sich bildende Vielecksverhältnifs hat einen rationalen, blofs von der Constructionsart und nicht zugleich von der gegenseitigen Lage der vier Hauptpuncte abhängigen Werth (§. 202. und §. 215.).

Sind daher A, B, C, D die vier Hauptpuncte, P irgend ein Netzpunct, so sind auch die Durchschnitte von PD mit AB und BC, welche M und N heifsen, Netzpuncte, und folglich das D. Verhältnifs:

$$(PM:MD):(PN:ND),$$

also auch das ihm gleiche Verhältnifs zwischen Dreiecken:

$$(PAB:ABD):(PBC:BCD)$$

rational, und dieses letztere, wie man auch die vier Hauptpuncte darin mit einander vertauschen mag. Die Rationalität dieses Verhältnisses kann als die characteristische Eigenschaft eines Netzpunctes P in Bezug auf die vier Hauptpuncte betrachtet werden, indem sich zeigen läfst (§. 203.), dafs umgekehrt jeder Punct der Ebene, für welchen jene Verhältnisse von Dreiecken zwischen ihm und den Hauptpuncten rational sind, ein Punct des Netzes ist, und mithin durch fortgesetzte Verbindung der Hauptpuncte gefunden werden kann.

Hieraus läfst sich weiter die nicht weniger merkwürdige Eigenschaft eines Netzes folgern (§. 205.), dafs, wenn nächst den vier Hauptpuncten noch irgend ein fünfter Punct der Ebene gegeben ist, man durch fortgesetzte Verbindung der vier ersteren einen Punct finden kann, der mit dem fünften entweder zusammenfällt, oder von ihm um einen Abstand entfernt ist, der kleiner ist, als jeder gegebene; — dafs folglich, wenn dafs Weben des Netzes ohne Aufhören fortgesetzt wird, die Ebene in allen ihren Theilen und nach allen Richtungen mit Puncten und Linien des Netzes angefüllt wird.

19) Wir wollen jetzt die in Nr. 17. erwiesene Rationalität der Vielecksverhältnisse im Netze durch einige Beispiele erläutern.

1. Man verbinde die vier Puncte A, B, C, D (Fig. 4.) zu zweien, durch gerade Linien, und nenne die Durchschnitte von AD mit BC, von BD mit CA, von CD mit AB resp. F, G, H, so gehören diese Puncte dem

aus A, B, C, D entstehenden Netze an. Ohne daher noch den Exponenten des Dreieckschnitts-Verhältnisses

$$(BF:FC)(CG:GA)(AH:HB)$$

zu kennen, kann man doch schon im Voraus behaupten, dafs er eine rationale Zahl sein werde. Nun weifs man aus den ersten Elementen, dafs, wenn ABC ein gleichseitiges Dreieck, und D der Mittelpunct des umschriebenen Kreises ist, F, G, H die Mittelpuncte der Seiten sind, und folglich der Exponent jenes Verhältnisses $= 1$ ist. Mithin mufs er auch für jede andere Lage der vier Puncte $A \ldots D$, $= 1$ sein.

2. Ein anderes bei dieser Figur vorkommendes Dreiecksverhältnifs ist

$$(BC:CF)(FD:DA)(AH:HB),$$

nach welchem die Seiten BF, FA, AB des Dreiecks ABF in C, D, H geschnitten werden. Auch dieses Verhältnifs mufs daher einen constanten, rationalen Werth haben. Es ist aber in dem vorhin zu Hülfe genommenen speciellen Falle $FD = DH$, und wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke AHD, AFB: $DH:DA = BF:BA = 1:2$, also auch $FD:DA = \frac{1}{2}$; ferner $BC:CF = -2$ und $AH:HB = 1$. Hierdurch wird der Werth jenes Dreieckverhältnisses bei dieser und folglich auch bei jeder andern Lage von $A, \ldots D$, $= \frac{1}{2}.-2.1 = -1$; d. h.

Das Product aus den drei Verhältnissen, nach welchen die Seiten eines Dreiecks von einer Transversale geschnitten werden, ist immer der negativen Einheit gleich.

Anmerkung. Daraus, dafs dieses Product immer negativ sein soll, erkennt man, dafs von den drei Factoren desselben entweder einer oder alle drei negativ sein müssen; dafs folglich die Transversale entweder zwei Seiten selbst und die dritte in ihrer Verlängerung, oder alle drei Seiten in ihren Verlängerungen schneidet. Vergl. Nr. 5. — Eben so ist bei dem vorhergehenden Dreiecksverhältnisse

$$(BF:FC)(CG:GA)(AH:HB),$$

weil es der positiven Einheit gleich gefunden wurde, entweder jeder der drei Factoren, oder nur einer positiv, und daher sind entweder alle drei Puncte F, G, H in ihren resp. Seiten selbst, oder nur einer derselben in seiner Seite, die beiden andern in den Verlängerungen der ihrigen enthalten, und aufserdem kein dritter Fall möglich. — Wiewohl sich nun dieses auch aus höchst einfachen geometrischen Betrachtungen ergiebt, so

ist doch eine solche, bis jetzt wohl noch nicht angestellte Vergleichung der Formel mit der Figur schon an sich bemerkenswerth, und kann bei weniger einfachen Figuren selbst Nutzen bringen, indem man dadurch zu Resultaten über die gegenseitige Lage der Theile geführt wird, die man auf anderem Wege nicht eben so leicht erhalten haben würde.

So findet sich z. B. (§. 199. *c.*), dafs jedes Vielecksverhältnifs, bei welchem die Schneidepuncte in einer Geraden liegen, der Einheit gleich ist, und zwar der positiven oder negativen, nachdem die Seitenzahl des Vielecks gerade oder ungerade ist. Hieraus folgt auf ähnliche Weise, dafs, wenn ein Vieleck, dieses in der allgemeinen Bedeutung wie Nr. 15. genommen, von einer Transversale geschnitten wird, die Anzahl der in ihren Verlängerungen geschnittenen Seiten beim Vieleck mit gerader Seitenzahl gerade, mit ungerader ungerade ist; dafs folglich, welches auch die Seitenzahl sein mag, die Anzahl der innerhalb ihrer Endpuncte geschnittenen Seiten immer gerade ist. — Läfst man die Seiten des Vielecks unendlich klein werden, so entsteht eine in sich zurücklaufende Curve, die daher von einer Geraden immer in einer geraden Anzahl von Puncten geschnitten wird. Auch gilt dieses noch, wenn man statt der Geraden eine zweite Curve setzt, die sich entweder über alle Grenzen ausdehnt, oder ebenfalls in sich zurückläuft.

3. Man ziehe GH, welche BC in K schneide. Um den Werth des damit entstehenden nothwendig rationalen D. Verhältnisses

$$(BF:FC):(BK:KC)$$

zu finden, so ist, unter der in 1. gemachten Annahme, $BF:FC=1$, HG mit BC parallel, und daher BK der CK gleich zu achten, also $BK:KC=-1$, wodurch der Werth jenes D. Verhältnisses $=-1$ wird; d. h. BC wird in F und K harmonisch getheilt (Nr. 6.).

4. Schneide GH die AD in L.

Man ziehe noch FG, welche AB, CD in M, N treffe, und werde der Exponent des Viereckschnitts-Verhältnisses:

$$(AM:MB)(BK:KC)(CN:ND)(DL:LA)$$

verlangt, nach welchem die Seiten des Vierecks $ABCD$ in M, K, N, L geschnitten werden. Am einfachsten gelangt man dazu, wenn man sich A, B, C, D als die Spitzen eines Parallelogramms vorstellt. Denn alsdann werden, wie man bald aus (Fig. 5.) wahrnimmt, M, K, N, L die Mittelpuncte der Seiten desselben, und mithin der gesuchte Exponent $=1$.

Dafs übrigens, und wie mit Hülfe dieser neuen Ansicht der Figur die Werthe der vorigen Doppel- und Dreiecksverhältnisse hätten gefunden werden können, bedarf keiner Erörterung.

5. Sei O der Durchschnitt von AC mit BL, so findet sich das Dreiecksverhältnifs:

$$(BL:LO)(OC:CG)(GD:DB) = -2.$$

Zeichnet man nemlich $ABCD$ als Parallelogramm und nennt Z den Durchschnitt von BL mit GM, so verhält sich:

$$LO:OZ = AO:OG = LA:GZ = KB:GZ = LK:LG = 2:1.$$

Da ferner $LZ = ZB$, so ist $LO = 2OZ = \frac{2}{3}LZ = \frac{1}{3}LB$; $OG = \frac{1}{2}AO = \frac{1}{3}AG = \frac{1}{3}GC$; $OC = \frac{4}{3}GC$; und endlich $GD = \frac{1}{2}BD$, woraus der angegebene Werth des Dreiecksverhältnisses hervorgeht.

6. Sei P der Durchschnitt von FH mit BL, so hat man:

$$(BL:LO)(OP:PB) = 3.$$

Denn beim Parallelogramm ist $LB = 3LO$ und $OP = BP$, weil F und H, also auch P, unendlich entfernte Puncte sind.

7. Dividirt man das Zweiecksverhältnifs 6. in das Dreiecksverhältnifs 5., so kommt das Dreiecksverhältnifs:

$$(OC:CG)(GD:DB)(BP:PO) = -\frac{2}{3}.$$

20) Werden fünf willkührlich in einer Ebene genommene Puncte durch Gerade verbunden, oder was dasselbe ist: construirt man ein Netz, indem man von diesen 5 Puncten, als Hauptpuncten ausgeht, so sind nicht mehr alle damit sich bildenden Vielecksverhältnisse blofs von der Art der Verbindung abhängig; wohl aber wird jedes von ihnen sich bestimmen lassen, wenn man irgend $2.5 - 8 = 2$ von einander unabhängige derselben kennt (Nr. 16.).

Beispiel. Seien A, B, C, D, E (Fig. 6.) fünf beliebige Puncte in einer Ebene. Man ziehe die 5 Geraden AB, BC, CD, DE, EA, welche sich in F, G, H, I, K schneiden, wie die Figur zeigt. Zwischen den 4 Puncten, in denen jede der 5 Geraden von den jedesmal 4 übrigen geschnitten wird, bilden sich mehrere D.Verhältnisse, die aber, in jeder Geraden für sich, von einander abhängig sind (Nr. 8.). Werde daher verlangt: aus einem der D.Verhältnisse in BC und aus einem in DE ein D.Verhältnifs in CD zu finden.

Weil die Seiten FC, CD, DF des Dreiecks CDF von EA in I, G, E und von AB in B, K, H geschnitten werden, so hat man (Nr. 19. 2.):

$$(FI:IC)(CG:GD)(DE:EF) = -1,$$
$$(FB:BC)(CK:KD)(DH:HF) = -1,$$

und wenn man die letztere Gleichung in die erstere dividirt:

$$\left(\frac{FI}{IC}:\frac{FB}{BC}\right)\left(\frac{FH}{HD}:\frac{FE}{ED}\right) = \left(\frac{CK}{KD}:\frac{CG}{GD}\right).$$

Setzt man daher die *D.*Verhältnisse:

$$(F,C,I,B) = p, \quad (F,D,H,E) = q,$$

so ist

$$(C,D,K,G) = pq;$$

und eben so mufs jedes andere *D.*- und Vielecksverhältnifs dieser Figur durch p und q ausgedrückt werden können. So finde ich mittelst baryc. Rechnung, dafs die beiden Fünfeckschnitt-Verhältnisse:

$$\frac{AK}{KB}\cdot\frac{BF}{FC}\cdot\frac{CG}{GD}\cdot\frac{DH}{HE}\cdot\frac{EI}{IA} \text{ und } \frac{AG}{GE}\cdot\frac{EF}{FD}\cdot\frac{DK}{KC}\cdot\frac{CI}{IB}\cdot\frac{BH}{HA}$$

einander gleich sind, jedes von ihnen

$$= \frac{pq-1}{pq(p-1)(q-1)}.$$

21) Hat man ein System von 6, 7, 8, ... willkührlich in einer Ebene genommenen Puncten, oder, was auf dasselbe hinauskommt, ein System von eben so vielen in der Ebene beliebig gezogenen Linien, so müssen 4, 6, 8, ... von einander unabhängige Vielecksverhältnisse gegeben sein, um die Werthe aller übrigen finden zu können. Indessen sind die hierher gehörigen Aufgaben zu complicirt, als dafs ein Beispiel an diesem Ort gegeben werden könnte. Auch möchten die Hülfsmittel, welche man in der Geometrie gewöhnlich in Anwendung zu bringen pflegt, bei Aufgaben solcher Art nur mühsam zum Ziele führen. Die Vortheile, welche der barycentrische Calcul hierbei gewährt, der sich zu diesem Zweck noch besonders vereinfachen läfst, habe ich in dem 8ten Capitel des 2ten Abschnitts auseinander gesetzt, worauf ich daher Diejenigen, welche sich mit diesem Gegenstande näher beschäftigen wollen, verweise. — Hat man es blofs mit einem Systeme beliebig gezogener Geraden zu thun, deren Durchschnittspuncte nicht wiederum durch Gerade verbunden werden, so reicht auch diejenige Methode aus, die im 5ten Capitel desselben Abschnitts erklärt worden, und welche in einem besondern Algorithmus mit *D.*Verhältnissen besteht.

22) Den Beschlufs dieses Aufsatzes mögen einige Sätze über die metrischen Relationen machen, welche in der Lineal-Geometrie bei Kegelschnitten vorkommen.

Ist in der einen der beiden oft gedachten Ebenen eine Curve verzeichnet, und die Gleichung derselben zwischen den recht- oder schiefwinkligen Coordinaten t und u gegeben, so erhält man die Gleichung für die entsprechende Curve zwischen den Coordinaten x, y in der andern Ebene, wenn man in der Gleichung zwischen t und u,

$$t = \frac{ax+by+c}{x+my+n}, \quad u = \frac{fx+gy+h}{x+my+n}$$

setzt (Nr. 2.). Da die Nenner in diesen Ausdrücken für t und u einander gleich sind, so ersieht man leicht, dafs die solchergestalt sich ergebende Gleichung zwischen x und y mit der Gleichung zwischen t und u von demselben Grade ist, dafs also je zwei sich entsprechende Curven immer zu derselben Ordnung gehören. So wie daher einer Geraden immer eine Gerade entspricht, so entspricht auch jedem Kegelschnitte ein Kegelschnitt, u. s. w.

Sind ferner A und A' zwei, in sich entsprechenden Curven liegende, sich entsprechende Puncte, so werden auch die in A und A' an die Curven gezogenen Tangenten zwei sich entsprechende Geraden sein. Denn ist B ein dem A unendlich nahe liegender Punct der einen Curve, so wird der ihm entsprechende B' in der andern Curve dem A' unendlich nahe sein, weil unendlich kleine Aenderungen von t und u auch nur unendlich kleine Aenderungen von x und y, im Allgemeinen wenigstens, zur Folge haben. Die Geraden AB und $A'B'$, so weit man will, verlängert gedacht, d. i. die an A und A' gezogenen Tangenten, werden sich daher gleichfalls entsprechen.

Werde nur noch erinnert, dafs einer Asymptote der einen Curve im Allgemeinen nicht auch eine Asymptote, sondern eine Tangente der andern entspricht, weil, wenn t, u unendlich grofs sind, deshalb nicht auch x, y unendlich sein müssen.

23) Ist in der einen Ebene ein Kegelschnitt gegeben, so kann man diesem, so lange noch keine andern Paare sich entsprechender Puncte bestimmt sind, nicht nur irgend einen beliebig in der andern Ebene verzeichneten Kegelschnitt entsprechend setzen, sondern noch irgend drei Puncten des einen Kegelschnitts drei willkührlich in dem andern genommene Puncte sich entsprechen lassen.

Seien, um dieses zu beweisen, k und k' (Fig. 7.) zwei beliebige Kegelschnitte, k in der einen, k' in der andern Ebene; A, B, C irgend

drei Puncte in k; A', B', C' in k', die man den ersteren A, B, C resp. entsprechend setze. Man ziehe noch an k in A und B zwei Tangenten, welche sich in D schneiden, und an k' in A' und B' zwei Tangenten, welche sich in D' schneiden, und setze D und D' sich entsprechend, so hat man jetzt vier Paare sich entsprechender Puncte: A und A', ... D und D', und es ist damit für jeden fünften Punct der einen Ebene der entsprechende in der andern bestimmt (Nr. 4.). Ich behaupte nun, dafs nach Voraussetzung dieser vier Paare sich entsprechender Puncte jedem Puncte in k ein Punct in k' entsprechen wird, oder kürzer, dafs k und k' sich entsprechende Curven sein werden. Denn entspräche dem Kegelschnitte k nicht k', sondern die Curve l, so müfste diese erstlich nach Nr. 22. wieder ein Kegelschnitt sein.

Da ferner k durch A, B, C geht und von AD und BD berührt wird, so müssen auch A', B', C' in l liegen und $A'D'$, $B'D'$ Tangenten von l sein. Diese Eigenschaften von l kommen aber auch dem Kegelschnitte k' zu.

Da nun ein Kegelschnitt durch drei in ihm liegende Puncte und durch die an zwei derselben gezogene Tangenten immer und ohne Zweideutigkeit bestimmt ist, so kann l von k' nicht verschieden sein.

Hat man daher zwei Kegelschnitte k und k', und setzt drei Puncte A, B, C des ersten, dreien Puncten A', B', C' des letztern entsprechend, so wird auch jedem andern Puncte in k ein Punct in k' entsprechen, d. h. k und k' werden sich entprechende Curven sein, wenn man noch als viertes Paar sich entsprechender Puncte die Durchschnitte D und D' der in A, B und A', B' an k und k' gezogenen Tangenten hinzufügt. Je zwei Kegelschnitte k und k' lassen sich daher immer als sich entsprechende Curven betrachten, und überdies noch irgend dreien Puncten A, B, C des einen beliebige drei Puncte A', B', C' des andern entsprechend annehmen.

24) Man ziehe noch an C, C' Tangenten, welche AB, $A'B'$ in E, E' schneiden, ziehe CD, $C'D'$, welche AB, $A'B'$ in F, F' treffen, so sind E, E' und F, F' zwei neue Paare sich entsprechender Puncte, und folglich die D. Verhältnisse (A, B, E, F) und $(A', B', E', F',)$ einander gleich. Wie daher auch in einem Kegelschnitte die drei Puncte A, B, C genommen werden mögen, so mufs immer, wenn E und F auf die besagte Weise daraus abgeleitet worden, der Exponent des D. Verhältnisses

$$(AE:EB):(AF:FB)$$

denselben Werth haben, also eine bestimmte und zwar rationale Zahl sein, weil E und F aus A, B, C nur auf eine Weise gefunden werden können. Es ist aber, wenn man für den Kegelschnitt einen Kreis und C zum Mittelpuncte des Bogens AB nimmt, E in der Geraden AB unendlich entfernt, und F der Mittelpunct dieser Geraden; folglich $AE:EB = -1$, $AF:FB = 1$, und daher der Exponent des D.Verhältnisses in diesem speciellen Falle, also auch in allen andern Fällen, $= -1$; d. h. AB wird in E und F harmonisch getheilt. —

Schneide ferner AC die BD in G, GF den Kegelschnitt in H, DH die AB in K, so mufs, nach derselben Art wie vorhin zu schliefsen, der Exponent des dadurch sich bildenden D.Verhältnisses (A, B, F, K) eine bestimmte Zahl sein, die aber nicht mehr rational ist, sondern eine Quadratwurzel enthält, weil die Gerade FG den Kegelschnitt nothwendig zweimal trifft, wodurch der Punct H, und somit auch der Punct K, zweideutig wird. In der That findet sich

$(A, B, F, K) = \frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{5})$ und folglich $(A, B, F, K_1) = \frac{1}{2}(3 \mp \sqrt{5})$,

wenn FG dem Kegelschnitt zum zweiten Male in H_1 begegnet, und DH_1, die AB in K_1 schneidet.

Um sich hiervon auf das Einfachste zu überzeugen, nehme man für den Kegelschnitt einen Kreis, A, B als Endpuncte eines Durchmessers und C als Mittelpunct des Halbkreises ACB. Alsdann sind FC, KH, BG auf AB normal, F ist der Mittelpunct des Kreises, und $AF = FB = FC = FH =$ dem Halbmesser, den man $= 1$ setze.

Hieraus folgt weiter $BG = 2$, $FG = \sqrt{5}$, und es verhält sich

$$FB:FK = FG:FH = \sqrt{5}:1,$$

also

$$FB + FK:FB - FK = \sqrt{5} + 1:\sqrt{5} - 1,$$

d. i.

$$AK:KB = 5 - 1:(\sqrt{5} - 1)^2 = 2:3 - \sqrt{5}.$$

Da ferner $AF:FB = 1:1$, so hat man

$$(AF:FB):(AK:KB) = \tfrac{1}{2}(3 - \sqrt{5}),$$

wie zu erweisen war.

Auf eben die Art wird nun auch jedes andere durch ferneres Ziehen gerader Linien in unserer Figur entstehende D.- oder Vieleckschnitts-Verhältnifs einen bestimmten Werth haben, und wir erhalten somit folgenden merkwürdigen Satz:

„Verbindet man drei in einem Kegelschnitte liegende Puncte durch gerade Linien, und zieht in denselben Puncten Tangenten an den Kegelschnitt; erweitert man hierauf die Figur, indem man immer die schon vorhandenen Durchschnitte, welche die Geraden mit einander und mit dem Kegelschnitte machen, durch neue Geraden verbindet und von den aufserhalb des Kegelschnitts fallenden Durchschnitten Tangenten an denselben zieht, deren Berührungspuncte man wiederum unter sich und mit jenen Durchschnitten verbindet: so ist, wie weit man auch diese Construction fortsetzen mag, der Werth jedes somit sich bildenden Vieleckschnitts-Verhältnisses weder von den Parametern des Kegelschnittes noch von der Lage der anfänglichen drei Puncte in denselben, sondern blofs von der Art und Weise abhängig, auf welche man, von jenen drei Puncten ausgehend, zu den Puncten des Vieleckschnitts-Verhältnisses gelangt ist. Der Werth eines solchen ist daher immer eine bestimmte Zahl. Weil aber jede durch einen Punct innerhalb des Kegelschnittes geführte Gerade denselben in zwei Puncten schneidet, und weil von jedem Puncte aufserhalb des Kegelschnitts zwei Tangenten an ihn gezogen werden können, so wird diese Zahl im Allgemeinen nicht rational sein, sondern Quadratwurzeln enthalten."

25) Die so eben beschriebene Figur kann, analog dem Obigen (Nr. 18.), ein Netz heifsen, dessen Construction von einem Kegelschnitte und drei in demselben enthaltenen Puncten A, B, C ausgeht. Wir wollen jetzt dieser Construction noch einen vierten, willkührlich in dem Kegelschnitte anzunehmenden Punct M zum Grunde legen. Um den entsprechenden Punct M' in der andern Ebene zu finden, ziehe man DM, welche AB in N schneide; bestimme hierauf in $A'B'$ den Punct N' so, dafs $(A', B', E', N') = (A, B, E, N)$, und ziehe $D'N'$, welche den Kegelschnitt $A'B'C'$ in zwei Puncten schneiden wird. Um zu entscheiden, welcher von ihnen der dem M entsprechende M' ist, denke man sich den Kegelschnitt ABC von einem Puncte so durchlaufen, dafs dieser, von A ausgehend, nach B kommt, ohne dem C zu begegnen, wo er dann, nach derselben Richtung von B fortgehend, nach C kommen wird, ohne A zu treffen, und von C nach A zurück, ohne B zu treffen *).

*) Wie dieser Forderung bei der Ellipse immer Genüge geschehen kann, sieht man ohne Weiteres. — Eine Parabel hat man sich hierbei als eine sich in das Unendliche erstreckende Ellipse zu denken, so dafs der beschreibende Punct, nachdem er unendlich weit in dem einen Schenkel fortgegangen ist, in den andern Schenkel aus dem Unendlichen zurückkehrt. — Bei einer

Man bezeichne die drei somit durchlaufenen Theile durch $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, so sind ihnen die auf gleiche Art in dem andern Kegelschnitte bestimmten und durch $\overline{A'B'}$, $\overline{B'C'}$, $\overline{C'A'}$ zu bezeichnenden Theile resp. entsprechend; und wenn daher M z. B. in $\overline{BC}$ liegt, wie dies in unserer Figur der Fall ist, so mufs auch M' in $\overline{B'C'}$ begriffen sein.

Irgend zwei *Vl.* Verhältnisse, die in beiden Ebenen aus den Kegelschnitten und aus den in jedem derselben liegenden 4 Puncten durch Construction von Netzen auf gleiche Art sich bilden, werden nunmehr einander gleich sein, woraus wir zunächst schliefsen, dafs mit dem *D.* Verhältnisse (A, B, E, N) des einen Netzes auch alle übrigen in demselben vorkommenden *D.*- und *Vl.* Verhältnisse gegeben sind; und überhaupt:

Alle *Vl.* Verhältnisse eines Netzes, das aus einem Kegelschnitte und vier in ihm liegenden Puncten construirt ist, lassen sich finden, wenn irgend eines derselben, das von allen vier Puncten zugleich abhängt, gegeben ist.

26) So wie der Punct M, so wird auch jeder andere willkührliche Punct des Kegelschnitts, in Bezug auf die drei ersten A, B, C, durch ein *D.* Verhältnifs bestimmt. Für jeden neu hinzukommenden willkürlichen Punct des Kegelschnitts mufs daher ein *D.*- oder *Vl.* Verhältnifs mehr gegeben sein. Da nun bei vier Puncten ein *Vl.* Verhältnifs nöthig war, so ziehen wir die allgemeine Folgerung:

Hat man einen Kegelschnitt und beliebige m in demselben liegende Puncte, so müssen in dem daraus construirten Netze irgend $m-3$ von einander unabhängige *Vl.* Verhältnisse gegeben sein, um alle übrigen finden zu können.

Es ist dieser Satz als Verallgemeinerung des Satzes in Nr. 9. zu betrachten, wo bei einem Systeme von m Puncten in einer geraden Linie, ebenfalls $m-3$ *Vl.* Verhältnisse gegeben sein mufsten. — Man bemerke noch, dafs bei einem Kegelschnitte und 5 Puncten desselben $5-3=2$ *Vl.* Verhältnisse erfordert werden, eben so, als wenn man ein System von 5 Puncten in einer Ebene überhaupt hat (Nr. 20.). Der Grund davon liegt in dem bekannten Satze, dafs durch 5 Puncte einer Ebene immer ein Kegelschnitt und nur einer beschrieben werden kann,

---

Hyperbel mufs der Punct beide Male, wenn er sich unendlich weit nach der Richtung einer Asymptote entfernt hat, nach dem entgegengesetzten, unendlich entfernten Ende derselben Asymptote überspringen und in das Endliche zurükkehren.

dafs folglich mit irgend 5 Puncten der Ebene immer auch schon der Kegelschnitt, in welchem sie liegen, vollkommen bestimmt ist. Sechs Puncte einer Ebene liegen im Allgemeinen nicht in einem Kegelschnitte. Soll daher auch der sechste Punct in dem Kegelschnitte enthalten sein, welcher durch die 5 ersten geht, so ist eben damit eine Bedingung für die Lage des sechsten in der Ebene gegeben, und da zur vollkommenen Bestimmung eines Punctes in einer Ebene zwei Bedingungen erfordert werden, so bedarf es noch einer zweiten Bedingung für den sechsten, und so für jeden andern Punct des Kegelschnitts. Diese zweite Bedingung ist aber das für jeden sechsten Punct hinzuzufügende *Vl.* Verhältnifs.

27) Man habe in einer Ebene einen Kegelschnitt und aufserhalb desselben m beliebig genommene Puncte, wo $m>1$. Von jedem derselben ziehe man an den Kegelschnitt zwei Tangenten, so erhält man $2m$ Berührungspuncte, die ebenfalls von einander unabhängig sein werden, und aus denen man hinwiederum die ersten m Puncte finden kann. Construirt man nun aus den letztern $2m$ Puncten in Verbindung mit dem Kegelschnitte ein Netz, so sind nach dem Vorigen alle *Vl.* Verhältnisse desselben bekannt, wenn $2m-3$ derselben gegeben sind. Dieselbe Anzahl von *Vl.* Verhältnissen mufs daher auch gegeben sein, wenn man aus dem Kegelschnitte und den erstern m Puncten ein Netz construirt, in dem dieses Netz mit dem vorigen aus $2m$ Puncten construirten identisch ist.

Man denke sich jetzt in der Ebene eines Kegelschnitts n beliebige Puncte innerhalb desselben, wo $n>2$. Man nehme diese Puncte in einer gewissen Ordnung und verbinde hiernach den ersten mit dem zweiten, den zweiten mit dem dritten u. s. w., den $n$ten mit dem ersten durch gerade Linien, deren jede den Kegelschnitt in zwei Puncten schneiden wird. Dies giebt ein System von n von einander unabhängigen Geraden und von $2n$ sich gegenseitig nicht bestimmenden Puncten im Kegelschnitte, aus welchen letzteren man umgekehrt die n Geraden und aus diesen die n anfänglichen Puncte finden kann. Das aus dem Kegelschnitte und den n anfänglichen Puncten construirte Netz ist daher einerlei mit demjenigen, welchem der Kegelschnitt und die darin enthaltenen $2n$ Puncte zum Grunde liegen, und ist folglich seinen *Vl.* Verhältnissen nach vollkommen bestimmt, wenn $2n-3$ derselben gegeben sind.

Hat man also endlich in der Ebene eines Kegelschnitts $m+n$ Puncte, von denen m aufserhalb, n innerhalb der Curve liegen, so erhält

man auf die eben besagte Weise ein System von $2m+2n$ von einander unabhängigen Puncten im Kegelschnitte selbst, aus denen sich hinwiederum die anfänglichen $m+n$ Puncte finden lassen; — und damit ein System von $2(m+n)-3$ von einander unabhängigen *Vl.* Verhältnissen. Dafs dieses gilt, auch wenn, gegen die vorhin gemachte Annahme, in $m+n$ entweder $m=1$ oder $n=1$ oder 2 ist (nur mufs $m+n>1$ sein) davon überzeugt man sich leicht selbst, und kann somit den Satz folgendergestalt ganz allgemein ausdrücken:

Wird aus einem Kegelschnitte und irgend m in seiner Ebene, nicht in ihm selbst, liegenden Puncten ein Netz construirt, so müssen $2m-3$ von einander unabhängige *Vl.* Verhältnisse gegeben sein, um alle übrigen finden zu können, — also fünf *Vl.* Verhältnisse mehr, als wenn die m Puncte blofs unter sich, nicht auch mit dem Kegelschnitte in Verbindung gesetzt werden.

Beispiel. *A*, *B* (Fig. 8.) sind zwei Puncte innerhalb eines Kegelschnitts; die Gerade *AB* schneide ihn in *C* und *D*. Man ziehe in diesen Puncten Tangenten, welche sich in *E* treffen; ziehe *EA*, *EB*, welche dem Kegelschnitte in *F*, *G* begegnen; ziehe endlich *DF*, *CG*, welche *CE*, *DE* in *H*, *I* schneiden.

Hier ist also die Zahl der anfänglichen Puncte, $m=2$. Damit wird $2m-3=1$, und es braucht daher bei dieser Figur nur ein *Vl.* Verhältnifs gegeben zu sein, um die Werthe aller übrigen zu kennen; d. h. zwischen je zwei *Vl.* Verhältnissen wird eine Gleichung obwalten.

So ist z. B. die zwischen den zwei Dreickschnitts-Verhältnissen

$$(CA:AD)(DI:IE)(EH:HC) = p,$$
$$(CB:BD)(DI:IE)(EH:HC) = q$$

statt findende Gleichung: $pq = 1$,

ein Resultat, welches sich auch durch die Proportion darstellen läfst:

$$\frac{CA}{AD}\cdot\frac{DB}{BC} = \left(\frac{CH}{HE}\right)^2 : \left(\frac{DI}{IE}\right)^2.$$

Eben so mufs jedes andere *Vl.* Verhältnifs durch p oder q ausgedrückt werden können, wie das *D.* Verhältnifs

$$(CA:AD):(CB:BD) = p:q = p^2$$

und das ihm gleiche *Vr.* Verhältnifs:

$$(CE:EH)(HF:FD)(DE:EI)(IG:GC) = p^2.$$

Druckfehler. In dieser Abhandlung steht einigemahl „Dreieck-Verhältnifs, Vieleck-Verhältnifs etc." Man lese statt dessen „Dreieckschnitts-Verhältnifs, Vieleckschnitts-Verhältnifs etc."

8.

Mémoire sur une classe particulière d'équations résolubles algébriquement.

(Par Mr. *N. H. Abel.*)

Il est vrai que les équations algébriques ne sont pas résolubles généralement; mais il y en a une classe particulière de tous les degrés dont la résolution algébrique est possible. Telles sont p. ex. les équations de la forme $x^n - 1 = 0$. La résolution de ces équations est fondée sur certaines relations qui existent entre les racines. J'ai essayé à généraliser cette remarque en supposant que deux racines d'une équation donnée soient tellement liées entre elles, qu'on puisse exprimer rationellement l'une par l'autre, et j'ai trouvé, qu'une telle équation peut toujours être résolue à l'aide d'un certain nombre d'équations moins élevées. Il y a même des cas où l'on peut résoudre algébriquement l'équation donnée elle même. Cela arrive p. ex. toutes les fois que, l'équation donnée étant irréductible, son degré est un nombre premier. La même chose a lieu encore si toutes les racines d'une équation peuvent être exprimées par

$$x,\ \theta x,\ \theta^2 x,\ \theta^3 x,\ \ldots\ \theta^{n-1} x,\ \text{où}\ \theta^n x = x,$$

θx étant une fonction rationnelle de x, et $\theta^2 x$, $\theta^3 x$, ... des fonctions de la même forme de θx, prise deux fois, trois fois, etc. ...

L'équation $\frac{x^n - 1}{x - 1} = 0$, si n est un nombre premier, est dans ce cas; car en désignant par α une racine primitive pour le module n, on peut, comme on sait, exprimer les $n - 1$ racines par:

$$x,\ x^\alpha,\ x^{\alpha^2},\ x^{\alpha^3},\ \ldots\ldots\ x^{\alpha^{n-2}},\ \text{où}\ x^{\alpha^{n-1}} = x,$$

c'est-à-dire en faisant $x^\alpha = \theta x$, par:

$$x,\ \theta x,\ \theta^2 x,\ \theta^3 x,\ \ldots\ \theta^{n-2} x,\ \text{où}\ \theta^{n-1} x = x.$$

La même propriété convient à une certaine classe d'équations qu'offre la théorie des fonctions elliptiques.

En général je suis parvenu à démontrer le théorème suivant:

„Si les racines d'une équation d'un degré quelconque sont liées entre-elles de sorte, que toutes ces racines peuvent être exprimées rationnellement au moyen de l'une d'elles, que nous désignerons par x; si de plus, en dé-

signant par θx, $\theta_1 x$ deux autres quelconques des racines en question, on a

$$\theta\theta_1 x = \theta_1\theta x:$$

l'équation, dont il s'agit sera toujours résoluble algébriquement. De même si l'on suppose l'équation irréductible et son degré exprimé par

$$\alpha_1^{\nu_1} . \alpha_2^{\nu_2} . \ldots . \alpha_\omega^{\nu_\omega},$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \ldots . \alpha_\omega$ sont des nombres premiers différens, on pourra réduire la résolution de cette équation à celle de ν_1 équations du degré α_1, de ν_2 équations du degré α_2, de ν_3 équations du degré α_3 etc."

Après avoir presenté généralement cette théorie, je l'appliquerai aux fonctions circulaires et elliptiques.

---

§. 1.

Nous allons d'abord considérer le cas où l'on suppose que deux racines d'une équation irréductible *) soient liées tellement entre-elles, que l'une puisse être exprimé rationnellement par l'autre.

Soit

$$1. \quad \varphi x = 0$$

une équation du degré μ, et x' et x les deux racines qui sont lieés entre-elles par l'équation

$$2. \quad x' = \theta x_1,$$

où θx désigne une fonction rationnelle de x et de quantités connues. La quantité x' étant une des racines de l'équation, on aura $\varphi(x') = 0$ et en vertu de (2.)

$$3. \quad \varphi(\theta x_1) = 0.$$

Je dis maintenant que cette équation aura encore lieu, si au lieu de x_1 on met une autre racine quelconque de l'équation proposée. On aura effectivement le théorème suivant **).

---

*) Une équation $\varphi x = 0$, dont les coëfficiens sont des fonctions rationnelles d'un certain nombre de quantités connues $a, b, c, \ldots .$ s'appelle irréductible, lorsqu'il est impossible d'exprimer ses racines par une équation moins élevée, dont les coëfficiens soient également des fonctions rationnelles de $a, b, c, \ldots .$

**) Ce théorème se démontrera aisément comme il suit:

Quelle que soit la fonction rationnelle fx, on peut toujours faire $fx = \frac{M}{N}$, où M et N sont des fonctions entières de x, qui n'ont pas de facteur commun; mais une fonction de x peut toujours être mise sous la forme $P + Q.\varphi x$, ou P et Q sont des fonctions entières, telles, que le

Théorème I. „Si une des racines d'une équation irréductible $\varphi x = 0$ satisfait à une autre équation $fx = 0$, où fx désigne une fonction rationnelle de x et des quantités connues qu'on suppose contenues dans φx; cette dernière équation se trouvera encore satisfaite en mettant au lieu de x une racine quelconque de l'équation $\varphi x = 0$; mais le premier membre de l'équation (3.) est une fonction rationnelle de x, donc on aura

$$4. \quad \varphi(\theta x) = 0, \quad \text{si} \quad \varphi x = 0,$$

c'est-à-dire, si x est une racine de l'équation $\varphi x = 0$, la quantité θx le sera également.

Maintenant, en vertu de ce qui précède, θx_1 est une racine de l'équation $\varphi x = 0$, donc $\theta\theta x_1$ le sera aussi; également $\theta\theta\theta x_1$, etc. le seront encore en répétant l'opération désignée par θ un nombre quelconque de fois.

Soit pour abreger

$$\theta\theta x_1 = \theta^2 x_1; \quad \theta\theta^2 x_1 = \theta^3 x_1; \quad \theta\theta^3 x_1 = \theta^4 x_1 \text{ etc.},$$

on aura la série

$$5. \quad x_1, \ \theta x_1, \ \theta^2 x_1, \ \theta^3 x_1, \ \theta^4 x_1, \ \ldots .$$

et toutes ces quantités seront des racines de l'équation $\varphi x = 0$. La série (5.) aura une infinité de termes, mais l'équation $\varphi x = 0$ n'ayant qu'un nombre fini de racines différentes, il faut que plusieurs quantités de la série (5.) soient égales entre-elles.

Supposons donc p. ex.

$$\theta^m x_1 = \theta^{m+n} x_1,$$

ou bien

$$6. \quad \theta^n(\theta^m x_1) - \theta^m x_1 = 0,$$

en observant que $\theta^{n+m} x_1 = \theta^n \theta^m x_1$.

Le premier membre de l'équation (6.) est une fonction rationnelle de $\theta^m x_1$; or cette quantité est une racine de l'équation $\varphi x = 0$, donc en vertu du théorème énoncé plus haut, on pourra mettre x_1 au lieu de $\theta^m x_1$.

---

degré de P soit moindre que celui de la fonction φx. Donc, en faisant $M = P + Q.\varphi x$, on aura $fx = \frac{P + Q.\varphi x}{N}$. Celà posé, soit α la racine de $\varphi x = 0$, qui satisfait en même tems à $fx = 0$; x_1 sera également une racine de l'équation $P = 0$. Or si p n'est pas zéro pour une valeur quelconque de x, cette équation donnera α, comme racine d'une équation d'un degré moindre que celui de $\varphi x = 0$; ce qui est contre l'hypothèse; donc $P = 0$ et par suite $fx = \varphi x.\frac{Q}{N}$, d'où l'on voit que fx sera égal à zéro en même tems que φx q. e. d.

Cela donne

$$7.\quad \theta^n x_1 = x_1,$$

où l'on peut supposer que n ait la plus petite valeur qui existe, en sorte que toutes les quantités

$$8.\quad x_1,\ \theta x_1,\ \theta^2 x_1,\ \ldots.\ \theta^{n-1} x_1$$

soient différentes entre-elles.

L'équation (7.) donnera

$$\theta^k \theta^n x_1 = \theta^k x_1,\ \text{c'est-à-dire:}\ \theta^{n+k} x_1 = \theta^k x_1.$$

Cette formule fait voir qu'à partir du terme $\theta^{n-1} x_1$, les termes de la suite (8.) se reproduiront dans le même ordre. Les n quantités (8.) seront donc les seules de la série (5.) différentes entre-elles.

Celà posé, si $\mu > n$, soit x_2 une autre racine de l'équation proposée, qui n'est pas contenue dans la suite (8.), il suit du théorème I., que toutes les quantités

$$9.\quad x_2,\ \theta x_2,\ \theta^2 x_2,\ \ldots.\ \theta^{n-1} x_2,\ \ldots.$$

seront également des racines de l'équation proposée. Or je dis que cette suite ne contiendra que n quantités différentes entre-elles et des quantités (8.). En effet, ayant $\theta^n x_1 - x_1 = 0$, on aura en vertu du théorème I.: $\theta^n x_2 = x_2$ et par suite:

$$\theta^{n+k} x_2 = \theta^k x_2.$$

Donc les seules quantités de la série (9.) qui pourront être différentes entre-elles, seront les n premières

$$10.\quad x_2,\ \theta x_2,\ \theta^2 x_2,\ \ldots.\ \theta^{n-1} x_2.$$

Or celles-ci seront nécessairement différentes entre-elles et des quantités (8.). En effet, si l'on avoit

$$\theta^m x_2 = \theta^\nu x_2,$$

où m et ν sont moindre que n, il en résulteroit $\theta^m x_1 = \theta^\nu x_1$, ce qui est impossible, car toutes les qantités (8.) sont différentes entre-elles. Si au contraire on avoit:

$$\theta^m x_2 = \theta^\nu x_1,$$

il en résulteroit

$$\theta^{n-m} \theta^\nu x_1 = \theta^{n-m} \theta^m x_2 = \theta^{n-m+m} x_2 = \theta^n x_2 = x_2,$$

donc

$$x_2 = \theta^{n-m+\nu} x_1,$$

c'est-à-dire la racine x_2 seroit contenue dans la série (8.), ce qui est contre l'ypothèse.

Le nombre des racines contenues dans (8.) et (10.) est $2n$, donc μ sera ou égal à $2n$, ou plus grand que ce nombre.

Soit dans le dernier cas x_3 une racine différente des racines (8.) et (10.), on aura une nouvelle série de racines

$$x_3,\ \theta x_3,\ \theta^2 x_3,\ \ldots\ \theta^{n-1} x_3,\ \ldots$$

et on démontrera précisément de la même manière, que les n premières de ces racines sont différentes entre-elles et des racines (8.) et (10.).

En continuant le procédé jusqu'à ce que toutes les racines de l'équation $\varphi x = 0$ soient épuisées, on verra que les μ racines de cette équation seront divisées en plusieurs groupes, composés de n termes; donc μ sera divisible par n, et en nommant m le nombre des groupes, on aura:

$$11.\quad \mu = m.n.$$

Les racines elles mêmes seront:

$$12.\quad \begin{cases} x_1, & \theta x_1, & \theta^2 x_1, & \ldots & \theta^{n-1} x_1, \\ x_2, & \theta x_2, & \theta^2 x_2, & \ldots & \theta^{n-1} x_2, \\ x_3, & \theta x_3, & \theta^2 x_3, & \ldots & \theta^{n-1} x_3, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_m, & \theta x_m, & \theta^2 x_m, & \ldots & \theta^{n-1} x_m. \end{cases}$$

Si $m = 1$, on aura $n = \mu$, et les μ racines de l'équation $\varphi x = 0$ seront exprimées par

$$13.\quad x_1,\ \theta x_1,\ \theta^2 x_1,\ \ldots\ \theta^{\mu-1} x_1.$$

Dans ce cas, comme on verra dans la suite, l'équation $\varphi x = 0$ est résoluble algébriquement. Mais la même chose n'aura pas toujours lieu lorsque m est plus grand que l'unité. On pourra seulement réduire la résolution de l'équation $\varphi x = 0$ à celle d'une équation du $n^{\text{ième}}$ degré, dont les coëfficiens dépendent d'une équation du $m^{\text{ième}}$ degré; c'est ce que nous allons démontrer dans le paragraphe suivant.

§. 2.

Considérons un quelconque des groupes (12.), p. ex. le premier, et faisons

$$14.\quad \begin{cases} (x - x_1)(x - \theta x_1)(x - \theta^2 x_1) \ldots (x - \theta^{n-1} x_1) \\ = x^n + A'_1 . x^{n-1} + A''_1 . x^{n-2} \ldots + A_1^{(n-1)} . x + A_1^{(n)} = 0, \end{cases}$$

les racines de cette équation seront

$$x_1,\ \theta x_1,\ \theta^2 x_1,\ \ldots\ \theta^{n-1} x_1$$

et les coëfficiens A'_1, A''_1, $\ldots$ $A_1^{(n)}$ seront des fonctions rationnelles et

symétriques de ces quantités. Nous verrons qu'on peut faire dépendre le développement de ces coëfficiens de la résolution d'une seule équation du degré m.

Pour le montrer, considérons en général une fonction quelconque rationnelle et symétrique de x_1, θx_1, $\theta^2 x_1$, ... $\theta^{n-1} x_1$, et soit

$$15. \quad y_1 = f(x_1, \theta x_1, \theta^2 x_1, ... \theta^{n-1} x_1)$$

cette fonction.

En mettant au lieu de x_1 successivement x_2, x_3, ... x_m, la fonction y_1 prendra différentes valeurs, que nous désignerons par y_1, y_2, y_3, ... y_m. Celà posé, si l'on forme une équation du degré m:

$$16. \quad y^m + p_1 y^{m-1} + p_2 y^{m-2} + ... + p_{m-1} y + p_m = 0,$$

dont les racines sont y_1, y_2, y_3, ... y_m, je dis que les coëfficiens de cette équation pourront être exprimés rationnellement par les quantités connues, qu'on suppose données par l'équation proposée.

Les quantités θx_1, $\theta^2 x_1$, ... $\theta^{n-1} x_1$ étant des fonctions rationnelles de x_1, la fonction y_1 le sera également. Soit

$$17. \quad \begin{cases} y_1 = Fx_1, \\ \text{nous aurons aussi} \\ y_2 = Fx_2; \ y_3 = Fx_3; \ .... \ y_m = Fx_m. \end{cases}$$

Mettant dans (15.) successivement θx_1, $\theta^2 x_1$, $\theta^3 x_1$, ... $\theta^{n-1} x_1$ au lieu de x_1, et remarquant que $\theta^n x_1 = x_1$; $\theta^{n+1} x_1 = \theta x_1$; $\theta^{n+2} x_1 = \theta^2 x_1$, etc. il est clair que la fonction y_1 ne changera pas de valeur; on aura donc

$$y_1 = Fx_1 = F(\theta x_1) = F(\theta^2 x_1) = ... = F(\theta^{n-1} x_1)$$

et également

$$y_2 = Fx_2 = F(\theta x_2) = F(\theta^2 x_2) = ... = F(\theta^{n-1} x_2),$$

. . . . . .

$$y_m = Fx_m = F(\theta x_m) = F(\theta^2 x_m) = ... = F(\theta^{n-1} x_m).$$

Elevant chaque membre de ces équations à la $\nu^{\text{ième}}$ puissance, on en tire:

$$y_1^\nu = \frac{1}{n} \cdot \{(Fx_1)^\nu + (F\theta x_1)^\nu + ... + (F\theta^{n-1} x_1)^\nu\},$$

$$y_2^\nu = \frac{1}{n} \cdot \{(Fx_2)^\nu + (F\theta x_2)^\nu + ... + (F\theta^{n-1} x_2)^\nu\},$$

. . . . . .

$$y_m^\nu = \frac{1}{n} \cdot \{(Fx_m)^\nu + (F\theta x_m)^\nu + ... + (F\theta^{n-1} x_m)^\nu\}.$$

En ajoutant ces dernières équations on aura la valeur de

$$y_1^\nu + y_2^\nu + y_3^\nu + ... + y_m^\nu$$

exprimée en fonction rationnelle et symétrique de toutes les racines de l'équation $\varphi x = 0$, savoir:

$$19.\quad y_1^\nu + y_2^\nu + y_3^\nu + \ldots + y_m^\nu = \frac{1}{n}\Sigma(Fx)^\nu.$$

Le second membre de cette équation peut être exprimé rationnellement par les coëfficiens de φx et θx, c'est-à-dire par des quantités connues. Donc, en faisant

$$20.\quad r_\nu = y_1^\nu + y_2^\nu + y_3^\nu + \ldots + y_m^\nu,$$

on aura la valeur de r_ν, pour une valeur quelconque entière de ν. Or connoissant $r_1, r_2, \ldots r_m$, on en pourra tirer rationnellement la valeur de toute fonction symétrique des quantités $y_1, y_2, \ldots y_m$. On pourra donc trouver de cette manière tous les coëfficiens de l'équation (16.) et par conséquant déterminer toute fonction rationnelle et symétrique de $x_1, \theta x_1, \theta^2 x_1, \ldots \theta^{n-1} x_1$ à l'aide d'une équation du $m^{\text{ième}}$ degré. Donc on aura de cette manière les coëfficiens de l'équation (14.), dont la résolution donnera ensuite la valeur de x_1 etc.

On voit par là qu'on peut ramener la résolution de l'équation $\varphi x = 0$, qui est du degré $\mu = m.n$, à celle d'un certain nombre d'équations du degré m et n. Il suffit même, comme nous allons voir, de resoudre une seule équation du degré m et m équations du degré n.

Soit ψx_1 un quelconque des coëfficiens $A_1', A_1'', \ldots A_1^{(n)}$ et faisons

$$21.\quad t_\nu = y_1^\nu.\psi x_1 + y_2^\nu.\psi x_2 + y_3^\nu.\psi x_3 + \ldots + y_m^\nu \psi x_m.$$

Puisque $y_1^\nu.\psi x_1$ est une fonction symétrique des quantités x_1, $\theta x_1, \ldots \theta^{n-1} x_1$, on aura, en remarquant que $\theta^n x_1 = x_1$; $\theta^{n+1} x_1 = \theta x_1$ etc.

$$y_1^\nu \psi x_1 = (Fx_1)^\nu.\psi x = (F\theta x_1)^\nu.\psi\theta x_1 = \ldots (F\theta^{n-1}x_1)^\nu.\psi\theta^{n-1}x_1,$$

donc:

$$y_1^\nu \psi x_1 = \frac{1}{n}.\{(Fx_1)^\nu.\psi x_1 + (F\theta x_1)^\nu.\psi\theta x_1 + \ldots (F\theta^{n-1}x_1)^\nu.\psi\theta^{n-1}x_1\}.$$

On trouvera de semblables expressions pour $y_2^\nu.\psi x_2$, $y_3^\nu.\psi x_3$, $\ldots$ $\ldots y_m^\nu.\psi x_m$, en mettant $x_2, x_3, \ldots x_m$ à la place de x_1. En substituant ces valeurs, on voit que t_ν deviendra une fonction rationnelle et symétrique de toutes les racines de l'équation $\varphi x = 0$. En effet on aura

$$22.\quad t_\nu = \frac{1}{n}\Sigma(Fx)^\nu.\psi x.$$

Donc on peut exprimer t_ν rationnellement par des quantités connues.

Celà posé, en faisant $\nu = 0, 1, 2, 3, \ldots m-1$, la formule (21.) donnera:

$$\begin{aligned}
\psi x_1 + \psi x_2 + \ldots + \psi x_m &= t_0,\\
y_1\psi x_1 + y_2\psi x_2 + \ldots + y_m\psi x_m &= t_1,\\
y_1^2\psi x_1 + y_2^2\psi x_2 + \ldots + y_m^2\psi x_m &= t_2,\\
\ldots\ldots\ldots

on auroit

$$y_1 = y_k,$$

s'il étoit nul, c'est-à-dire

$$(\alpha - x_1)(\alpha - \theta x_1) \ldots (\alpha - \theta^{n-1} x_1) = (\alpha - x_k)(\alpha - \theta x_k) \ldots (\alpha - \theta^{n-1} x_k),$$

ce qui est impossible, car toutes les racines x_1, θx_1, $\theta^2 x_1$, ... $\theta^{n-1} x_1$ sont différentes de celles-ci: x_k, θx_k, $\theta^2 x_k$, ... $\theta^{n-1} x_k$.

Les coëfficiens A'_1, A''_1, ... $A^{(n)}_1$ peuvent donc s'exprimer rationnellement par une même fonction y_1, dont l'expression dépend d'une équation du degré m.

Les racines de l'équation (14.) sont

$$x_1, \ \theta x_1, \ \theta^2 x_1, \ \ldots . \ \theta^{n-1} x_1.$$

En remplaçant dans les coëfficiens A'_1, A''_1 etc. y_1 par y_2, y_3, ... y_m, on obtiendra $m-1$ autres équations, dont les racines seront respectivement:

$$\begin{array}{l} x_2, \ \theta x_2, \ \ldots . \ \theta^{n-1} x_2, \\ x_3, \ \theta x_3, \ \ldots . \ \theta^{n-1} x_3, \\ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \\ x_m, \ \theta x_m, \ \ldots . \ \theta^{n-1} x_m. \end{array}$$

Théorème II. L'équation proposée $\varphi x = 0$ peut donc être décomposée en un nombre de m d'équations du degré n; donc les coëfficiens sont respectivement des fonctions rationnelles d'une même racine d'une seule équation du degré m.

Cette dernière équation n'est pas généralement résoluble algébriquement quand elle passe le quatrième degré, mais l'équation (14.) et les autres semblables le sont toujours en supposant connus les coëfficiens A'_1, A''_1 etc., comme nous le verrons dans le paragraphe suivant.

§. 3.

Dans le paragraphe précédent nous avons considéré le cas où m est plus grand que l'unité. Maintenant nous allons nous occuper du cas où $m = 1$.

Dans ce cas on aura $\mu = n$, et les racines de l'équation $\varphi x = 0$ seront

$$27. \quad x_1, \ \theta x_1, \ \theta^2 x_1, \ \ldots . \ \theta^{\mu-1} x_1;$$

or je dis que toute équation dont les racines peuvent être exprimées de cette sorte est résoluble algébriquement.

Soit α une racine quelconque de l'équation $\alpha^\mu - 1 = 0$, et faisons

$$28.\quad \psi x = (x + \alpha\theta x + \alpha^2\theta^2 x + \alpha^3\theta^3 + \ldots + \alpha^{\mu-1}\theta^{\mu-1}x)^\mu,$$

ψx sera une fonction rationnelle de x. Or cette fonction peut s'exprimer rationnellement par les coëfficiens de φx et θx.

En mettant $\theta^m x$ au lieu de x, on aura

$$\psi\theta^m x =$$
$$(\theta^m x + \alpha\theta^{m+1}x + \alpha^2\theta^{m+2}x + \ldots + \alpha^{\mu-m}.\theta^\mu x + \alpha^{\mu-m+1}.\theta^{\mu+1}x \ldots \alpha^{\mu-1}.\theta^{\mu+m-1}x)^\mu;$$

maintenant on a

$$\theta^\mu x = x, \quad \theta^{\mu+1}x = \theta x, \quad \ldots\ldots \quad \theta^{\mu+m-1}x = \theta^{m-1}x,$$

donc:

$$\psi\theta^m x =$$
$$(\alpha^{\mu-m+1}x + \alpha^{\mu-m+1}\theta x + \ldots + \alpha^{\mu-1}\theta^{m-1}x + \theta^m x + \alpha\theta^{m+1}x + \ldots + \alpha^{\mu-m-1}\theta^{m-1}x)^\mu.$$

Or $\alpha^\mu = 1$, donc:

$$\psi\theta^m x = [\alpha^{\mu-m+1}(x + \alpha\theta x + \alpha^2\theta^2 x + \ldots + \alpha^{\mu-1}\theta^{\mu-1}x)]^\mu$$
$$= \alpha^{\mu(\mu-m+1)}(x + \alpha\theta x + \ldots + \alpha^{\mu-1}\theta^{\mu-1}x)^\mu,$$

donc,

$$\alpha^{\mu(\mu-m+1)} \text{ étant } = 1,$$

on voit que

$$\psi\theta^m x = \psi x.$$

En faisant $m = 1, 2, 3, \ldots . \mu - 1$, et ajoutant ensuite, on trouvera:

$$29.\quad \psi x = \frac{1}{n}\{\psi x + \psi\theta x + \psi\theta^2 x + \ldots + \psi\theta^{\mu-1}x\}.$$

ψx sera donc une fonction rationnelle et symétrique de toutes les racines de l'équation $\varphi x = 0$, et par conséquent on pourra l'exprimer rationnellement en quantités connues.

Soit $\psi x = v$, on tire de l'équation (28.):

$$30.\quad \sqrt[\mu]{v} = x + \alpha\theta x + \alpha^2\theta^2 x + \ldots + \alpha^{\mu-1}\theta^{\mu-1}x.$$

Cela posé, désignons les μ racines de l'équation

$$\alpha^\mu - 1 = 0$$

par

$$31.\quad 1, \ \alpha_1, \ \alpha_2, \ \alpha_3, \ \ldots . \ \alpha_{\mu-1}$$

et les valeurs correspondantes de v par

$$32.\quad v_0, \ v_1, \ v_2, \ v_3, \ \ldots . \ v_{\mu-1},$$

l'équation (30.) donnera, en mettant à la place de α successivement 1, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots . \alpha_{\mu-1}$:

$$33.\quad \begin{cases} \sqrt[\mu]{v_0} = x + \theta x + \theta^2 x + \ldots\ldots + \theta^{\mu-1} x, \\ \sqrt[\mu]{v_1} = x + \alpha_1 \theta x + \alpha_1^2 \theta^2 x + \ldots\ldots + \alpha_1^{\mu-1} \theta^{\mu-1} x, \\ \sqrt[\mu]{v_2} = x + \alpha_2 \theta x + \alpha_2^2 \theta^2 x + \ldots\ldots + \alpha_2^{\mu-1} \theta^{\mu-1} x, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sqrt[\mu]{v_{\mu-1}} = x + \alpha_{\mu-1} \theta x + \alpha_{\mu-1}^2 \theta^2 x + \ldots\ldots + \alpha_{\mu-1}^{\mu-1} \theta^{\mu-1} x. \end{cases}$$

En ajoutant ces équations on aura:

$$34.\quad x = \frac{1}{\mu}\{-A + \sqrt[\mu]{v_1} + \sqrt[\mu]{v_2} + \sqrt[\mu]{v_3} + \ldots\ldots + \sqrt[\mu]{v_{\mu-1}}\},$$

où A exprime la quantité rationnelle $\sqrt[\mu]{v_0}$.

On connoit par là la racine x. Généralement on trouve la racine $\theta^m x$ en multipliant la première des équations (33.) par 1, la seconde par α_1^{-m}, la troisième par α_2^{-m} etc., et ajoutant; il viendra alors:

$$35.\quad \theta^m x = \frac{1}{\mu}\{-A + \alpha_1^{-m}.\sqrt[\mu]{v_1} + \alpha_2^{-m}.\sqrt[\mu]{v_2} + \ldots + \alpha_{\mu-1}^{-m}.\sqrt[\mu]{v_{\mu-1}}\}.$$

En donnant à m les valeurs 0, 1, 2, ... $\mu-1$, on aura la valeur de toutes les racines de l'équation.

L'expression précédente des racines contient généralement un nombre $\mu-1$ de radicaux différens, de la forme $\sqrt[\mu]{v}$. Elle aura donc un nombre $\mu^{\mu-1}$ de valeurs, tandis que l'équation $\varphi x = 0$ n'en a que μ. Mais on peut donner à l'expression des racines une autre forme, qui n'est pas exposée à cette difficulté. En effet, lorsque la valeur de $\sqrt[\mu]{v_1}$ est fixée, celle des autres radicaux le sera également, comme nous allons le voir.

Quel que soit le nombre μ, premier ou non, on peut toujours trouver une racine α de l'équation $\alpha^\mu - 1 = 0$, telle que les racines

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \ldots\ldots\ \alpha_{\mu-1}$$

puissent être représentées par

$$36.\quad \alpha,\ \alpha^2,\ \alpha^3,\ \ldots\ldots\ \alpha^\mu.$$

Celà posé on aura

$$37.\quad \begin{cases} \sqrt[\mu]{v_k} = x + \alpha^k.\theta x + \alpha^{2k}\theta^2 x + \ldots\ldots + \alpha^{(\mu-1)k}.\theta^{\mu-1} x, \\ \sqrt[\mu]{v_1} = x + \alpha.\theta x + \alpha^2\theta^2 x + \ldots\ldots + \alpha^{\mu-1}.\theta^{\mu-1} x, \end{cases}$$

d'où l'on tire:

$$38.\quad \begin{cases} \sqrt[\mu]{v_k}.(\sqrt[\mu]{v_1})^{\mu-k} = (x + \alpha^k.\theta x + \alpha^{2k}.\theta^2 x + \ldots\ldots + \alpha^{(\mu-1)k}.\theta^{\mu-1} x) \\ \qquad\qquad \times (x + \alpha\theta x + \alpha^2\theta^2 x + \ldots\ldots + \alpha^{\mu-1}.\theta^{\mu-1} x)^{\mu-k}. \end{cases}$$

Le second membre de cette équation est une fonction rationnelle de x, qui ne changera pas de valeur en mettant au lieu de x une autre racine quelconque $\theta^m x$, comme on le verra aisément, en faisant cette substitution et ayant égard à l'équation $\theta^{\mu+\nu}x = \theta^\nu x$. En désignant donc la fonction dont-il s'agit par ψx, on aura:

$$\sqrt[\mu]{v_k}.(\sqrt[\mu]{v_1})^{\mu-k} = \psi x = \psi\theta x = \psi\theta^2 x = \ldots\ldots = \psi\theta^{\mu-1}x,$$

et de là:

$$39.\quad \sqrt[\mu]{v_k}.(\sqrt[\mu]{v_1})^{\mu-k} = \frac{1}{\mu}\{\psi x + \psi\theta x + \psi\theta^2 x + \ldots\ldots + \psi\theta^{\mu-1}x\}.$$

Le second membre de cette équation est une fonction rationnelle et symétrique des racines, donc on peut l'exprimer en quantités connues. En la désignant par a_k, on aura:

$$40.\quad \sqrt[\mu]{v_k}(\sqrt[\mu]{v_1})^{\mu-k} = a_k$$

et de là:

$$41.\quad \sqrt[\mu]{v_k} = \frac{a_k}{v_1}(\sqrt[\mu]{v_1})^k.$$

A l'aide de cette formule l'expression de la racine x deviendra:

$$42.\quad x = \frac{1}{\mu}\left\{-A + \sqrt[\mu]{v_1} + \frac{a_2}{v_1}(\sqrt[\mu]{v_1})^2 + \frac{a_3}{v_1}(\sqrt[\mu]{v_1})^3 + \ldots + \frac{a_{\mu-1}}{v_1}(\sqrt[\mu]{v_1})^{\mu-1}\right\}.$$

Cette expression de x n'a que μ valeurs différentes, qu'on obtiendra en mettant au lieu de $\sqrt[\mu]{v_1}$ les μ valeurs:

$$\sqrt[\mu]{v_1},\quad \alpha\sqrt[\mu]{v_1},\quad \alpha^2\sqrt[\mu]{v_1},\quad \ldots\ldots\quad \alpha^{\mu-1}\sqrt[\mu]{v_1}.$$

La méthode que nous avons suivie précédemment pour la résolution de l'équation $\varphi x = 0$ s'accorde au fond avec celle dont Mr. Gaufs a fait usage dans ses „*Disquisitiones arithmeticae pag.* 645. *et seq.*" pour résoudre une certaine classe d'équations, auxquelles il étoit parvenu dans ses recherches sur l'équation $x^n - 1 = 0$. Ces équations ont la même propriété que notre équation $\varphi x = 0$; savoir que toutes ses racines peuvent être représentées sous la forme:

$$x,\quad \theta x,\quad \theta^2 x,\quad \ldots\ldots\quad \theta^{\mu-1}x,$$

θx étant une fonction rationnelle.

En vertu de ce qui précède nous pourrons énoncer le théorème suivant:

Théorème III. Si les racines d'une équation algébrique peuvent être représentées par:

$$x,\quad \theta x,\quad \theta^2 x,\quad \ldots\ldots\quad \theta^{\mu-1}x,$$

où $\theta^{\mu}x = x$ et θx désigne une fonction rationnelle de x et de quantités connues, cette équation sera toujours résoluble algébriquement.

On en tire le suivant, comme corollaire:

Théorème IV. Si deux racines d'une équation irréductible, dont le degré est un nombre premier, sont dans un tel rapport, qu'on puisse exprimer l'une rationnellement par l'autre, cette équation sera résoluble algébriquement.

En effet cela suit immédiatement de l'équation (11.)

$$\mu = m.n,$$

où l'on doit avoir $m = 1$, si μ est un nombre premier, et par conséquent les racines s'expriment par x, θx, $\theta^2 x$, ... $\theta^{\mu-1}x$.

Dans le cas, où toutes les quantités connues de φx et θx sont réelles, les racines de l'équation φx jouiront d'une propriété remarquable, que nous allons démontrer.

Par ce qui précède on voit que $\alpha_{\mu-1}$ peut être exprimée rationnellement par les coëfficiens de φx et θx, et par α. Si donc ces coëfficiens sont réels, $a_{\mu-1}$ doit avoir la forme

$$a_{\mu-1} = a + b\sqrt{-1},$$

où $\sqrt{-1}$ n'entre qu'à cause de la quantité α, qui en général est imaginaire, et qui généralement peut avoir la valeur

$$\alpha = \cos\frac{2\pi}{\mu} + \sqrt{-1}.\sin\frac{2\pi}{\mu}.$$

En changeant donc dans α le signe de $\sqrt{-1}$ et désignant par $a'_{\mu-1}$ la valeur correspondente de $a_{\mu-1}$, on aura

$$a'_{\mu-1} = a - b\sqrt{-1}.$$

Or suivant (40.) il est évident, que $a'_{\mu-1} = a_{\mu-1}$, donc $b = 0$ et

$$43. \quad a_{\mu-1} = a.$$

Donc $a_{\mu-1}$ a toujours une valeur réelle. On démontrera de la même manière que

$$v_1 = c + d\sqrt{-1} \text{ et } v_{\mu-1} = c - d\sqrt{-1},$$

où c et d sont réels.

Donc:

$$v_1 + v_{\mu-1} = 2c,$$
$$v_1 v_{\mu-1} = a^{\mu}.$$

De là on tire

$$44. \quad v_1 = c + \sqrt{-1}.\sqrt{(a^{\mu} - c^2)},$$

et par suite $\sqrt{(a^\mu - c^2)} = d$; d'où l'on voit que $\sqrt{(a^\mu - c^2)}$ a toujours une valeur réelle.

Celà posé, on peut faire

$$45. \quad c = (\sqrt{\varrho})^\mu \cos\delta, \quad \sqrt{(a^\mu - c^2)} = (\sqrt{\varrho})^\mu \sin\delta,$$

où ϱ est une quantité positive.

On en tire

$$c^2 + [\sqrt{(a^\mu - c^2)}]^2 = (\sqrt{\varrho})^{2\mu},$$

c'est-à-dire

$$46. \quad a^\mu = \varrho^\mu;$$

par conséquent ϱ sera égal à la valeur numérique de a. D'ailleurs on voit que a est toujours positif, si μ est un nombre impair.

Connoissant ϱ et δ, on aura

$$v_1 = (\sqrt{\varrho})^\mu . (\cos\delta + \sqrt{-1} . \sin\delta)$$

et par suite

$$\sqrt[\mu]{v_1} = \sqrt{\varrho} . \left\{\cos\left(\frac{\delta + 2m\pi}{\mu}\right) + \sqrt{-1} . \sin\left(\frac{\delta + 2m\pi}{\mu}\right)\right\}.$$

En substituant cette valeur de $\sqrt[\mu]{v_1}$ dans l'expression de x (42.), elle prendra la forme:

$$47. \quad x = \frac{1}{\mu}\left\{-A + \sqrt{\varrho} . \left(\cos\frac{\delta + 2m\pi}{\mu} + \sqrt{-1} . \sin\frac{\delta + 2m\pi}{\mu}\right)\right.$$
$$+ (f + g\sqrt{-1})\left(\cos\frac{2(\delta + 2m\pi)}{\mu} + \sqrt{-1} . \sin\frac{2(\delta + 2m\pi)}{\mu}\right)$$
$$+ (F + G\sqrt{-1})\sqrt{\varrho} . \left(\cos\frac{3(\delta + 2m\pi)}{\mu} + \sqrt{-1} . \sin\frac{3(\delta + 2m\pi)}{\mu}\right)$$
$$\left. + (f_1 + g_1\sqrt{-1})\left(\cos\frac{4(\delta + 2m\pi)}{\mu} + \sqrt{-1} . \sin\frac{4(\delta + 2m\pi)}{\mu}\right)\right.$$
$$+ \text{ etc.}$$

où ϱ, A, f, g, F, G etc., sont des fonctions rationnelles de $\cos\frac{2\pi}{\mu}$, $\sin\frac{2\pi}{\mu}$ et des coëfficiens de φx et θx. On trouvera toutes les racines, en donnant à m les valeurs 0, 1, 2, 3, ... $\mu - 1$.

L'expression précédente de x fait voir:

Théorème V. que pour résoudre l'équation $\varphi x = 0$, il suffit:

1) de diviser la circonférence entière du cercle en μ parties égales,
2) de diviser un angle δ, qu'on peut construire ensuite, en μ parties égales,
3) d'extraire la racine carrée d'une seule quantité ϱ.

Ce théorème n'est que l'extension d'un théorème semblable, que Mr. Gauſs donne sans démonstration dans l'ouvrage cité plus haut, pag. 651.

Il y a encore à remarquer que les racines de l'équation $\varphi x = 0$ sont ou toutes réelles ou toutes imaginaires. En effet si une racine x est réelle, les autres le sont également, comme les expressions

$$\theta x,\ \theta^2 x,\ \ldots\ldots\ \theta^{\mu-1} x,$$

qui ne contiennent que des quantités réelles, le font voir. Si au contraire x est imaginaire, les autres racines le sont aussi, car si par ex. $\theta^m x$ étoit réelle, $\theta^{\mu-m}(\theta^m x) = \theta^\mu x = x$, le seroit également, contre l'hypothèse. Dans le premier cas a sera positif et dans le second négatif.

Si μ est un nombre impair, toutes les racines seront réelles.

La méthode que nous avons donné dans ce paragraphe, pour résoudre l'équation $\varphi x = 0$, est appliquable dans tous les cas, le nombre μ étant premier ou non; mais si μ est un nombre composé, il existe encore une autre méthode qui offre quelques simplifications et que nous allons exposer en peu de mots.

Soit $\mu = m.n$, les racines

$$x,\ \theta x,\ \theta^2 x,\ \ldots\ldots\ \theta^{\mu-1} x$$

pourront être groupées de la manière suivante:

$$\begin{array}{llll}
x, & \theta^m x, & \theta^{2m} x, & \ldots\ldots\ \theta^{(n-1)m} x, \\
\theta x, & \theta^{m+1} x, & \theta^{2m+1} x, & \ldots\ldots\ \theta^{(n-1)m+1} x, \\
\theta^2 x, & \theta^{m+2} x, & \theta^{2m+2} x, & \ldots\ldots\ \theta^{(n-1)m+2} x, \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\theta^{m-1} x, & \theta^{2m-1} x, & \theta^{3m-1} x, & \ldots\ldots\ \theta^{mn-1} x.
\end{array}$$

En faisant pour abréger:

$$48.\quad \theta^m x = \theta_1 x,$$

$$49.\quad x = x_1,\quad \theta x = x_2,\quad \theta^2 x = x_3,\quad \ldots\ldots\quad \theta^{m-1} x = x_m,$$

on peut écrire les racines comme il suit:

$$50.\quad \begin{cases}
1') & x_1, & \theta_1 x_1, & \theta_1^2 x_1, & \ldots\ldots & \theta_1^{n-1} x_1, \\
2') & x_2, & \theta_1 x_2, & \theta_1^2 x_2, & \ldots\ldots & \theta_1^{n-1} x_2, \\
 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
m') & x_m, & \theta_1 x_m, & \theta_1^2 x_m, & \ldots\ldots & \theta_1^{n-1} x_m.
\end{cases}$$

Donc en vertu de ce qu'on a vu dans le §. 2. on peut décomposer l'équation $\varphi x = 0$, qui est du degré $m.n$, en m équations du degré n, dont les coëfficiens dépendront d'une équation du degré m. Les racines de ces m équations seront respectivement les racines $1'$, $2'$, ... m'.

Si n est un autre nombre composé $m_1.n_1$, on peut décomposer de la même manière chacune des équations du degré n, en m_1 équations

du degré n_1, dont les coëfficiens dépendront d'une équation du degré m_1. Si n_1 est encore un nombre composé, on peut continuer la décomposition de la même manière.

Théorème VI. En général, si l'on suppose

$$51. \quad \mu = m_1 . m_2 . m_3 \ldots . m_n,$$

la résolution de l'équation proposée $\varphi x = 0$ sera ramenée à celle de n équations des degrés:

$$m_1, \; m_2, \; m_3, \; \ldots . \; m_n.$$

Il suffit même de connoitre une seule racine de ces équations, car si on connoit une racine de l'équation proposée, on aura toutes les autres racines, exprimées en fonctions rationnelles de celle-ci.

La méthode précédente est au fond la même que celle, que Mr. Gauss donne pour la réduction de l'équation à deux termes $x^\mu - 1 = 0$.

Pour faire voir plus clairement la décomposition précédente de l'équation $\varphi x = 0$ en d'autres de degrés moins élevés, supposons par ex. $\mu = 30 = 5 . 3 . 2$.

Dans ce cas les racines seront:

$$x, \; \theta x, \; \theta^2 x, \; \ldots . \; \theta^{29} x.$$

D'abord nous formerons une équation du $6^{\text{ième}}$ degré, dont les racines seront:

$$x, \; \theta^5 x, \; \theta^{10} x, \; \theta^{15} x, \; \theta^{20} x, \; \theta^{25} x.$$

Soit $R = 0$ cette équation, on peut déterminer ses coëfficiens, rationnellement, par une même quantité y, qui sera la racine d'une équation du cinquième degré: $P = 0$.

Le degré de l'équation $R = 0$ étant lui même un nombre composé, nous formerons une équation du $3^{\text{ième}}$ degré: $R_1 = 0$, dont les racines seront:

$$x, \; \theta^{10} x, \; \theta^{20},$$

et dont les coëfficiens sont des fonctions rationnelles de y, et d'une même quantité z, qui est racine d'une équation du second degré $P_1 = 0$, dans laquelle les coëfficiens sont exprimés rationnellement par y.

Voici le tableau des opérations:

$$x^3 + f(y,z) . x^2 + f_1(y,z) . x + f_2(y,z) = 0,$$
$$z^2 + fy . z + f_1 y = 0,$$
$$y^5 + A_1 . y^4 + A_2 . y^3 + A_3 . y^2 + A_4 . y + A_5 = 0.$$

On peut aussi commencer par une équation du $2^{\text{ième}}$ degré en x, ou bien par une équation du $5^{\text{ième}}$ degré.

Reprenons l'équation générale $\varphi x = 0$.

En supposons $\mu = m.n$, on peut faire

$$52.\quad x^{n_1} + fy.x^{n_1-1} + f_1y.x^{n_1-2} + \ldots = 0,$$

où y est déterminé par une équation du $m^{\text{ième}}$ degré:

$$53.\quad y^m + A.y^{m-1} + \ldots = 0,$$

dont tous les coëfficiens sont exprimés rationnellement en quantités connues.

Celà posé, soient:

$$54.\quad \begin{cases} \mu = m_1.m_2.m_3 \ldots . m_\omega & \text{et } \mu = m_1.n_1, \\ \mu = m_2.n_2; \ldots \ldots \ldots & \mu = m_\omega.n_\omega, \end{cases}$$

plusieurs manières de décomposer le nombre μ en deux facteurs, on poura décomposer l'équation proposée $\varphi x = 0$ en deux autres des ω manières suivantes:

(1.) $\begin{cases} F_1(x_1, y_1) = 0, \text{ dont les racines seront } x,\ \theta^{m_1}x,\ \theta^{2m_1}x, \ldots .\ \theta^{(n_1-1)m_1}x \\ \text{et les coëfficiens des fonctions rationnelles d'une quantité } y_1, \text{ racine} \\ \text{d'une équation } f_1(y_1) = 0, \text{ du degré } m_1. \end{cases}$

(2.) $\begin{cases} F_2(x_1, y_2) = 0, \text{ dont les racines seront } x,\ \theta^{m_2}x,\ \theta^{2m_2}x, \ldots .\ \theta^{(n_2-1)m_2}x \\ \text{et les coëfficiens: des fonctions rationnelles d'une même quantité } y_2, \\ \text{racine d'une équation } f_2y_2 = 0, \text{ du degré } m_2. \end{cases}$

. . . . . .

(ω) $\begin{cases} F_\omega(x, y_\omega) = 0, \text{ dont les racines seront } x,\ \theta^{m_\omega}x,\ \theta^{2m_\omega}x, \ldots .\ \theta^{(n_\omega-1)m_\omega}x \\ \text{et les coëfficiens des fonctions rationnelles d'une même quantité } y_\omega, \\ \text{racine d'une équation } f_\omega y_\omega = 0, \text{ du degré } m_\omega. \end{cases}$

Supposons maintenant que $m_1, m_2, \ldots . m_\omega$ pris deux à deux, soient premiers entre eux, je dis qu'on pourra exprimer la valeur de x rationnellement par les quantités $y_1, y_2, y_3, \ldots . y_n$. En effet, si $m_1, m_2, \ldots . m_\omega$ sont premiers entre eux, il est clair qu'il n'y a qu'une seule racine, qui satisfera à la fois à toutes les équations

$$55.\quad F_1(x, y_1) = 0,\ F_2(x, y_2) = 0,\ \ldots .\ F(x, y_\omega) = 0;$$

savoir la racine x. Donc, suivant un théorème connu, on peut exprimer x rationnellement par les coëfficiens de ces équations et conséquemment par les quantités $y_1, y_2, \ldots . y_\omega$.

Voila donc ramenée la résolution de l'équation proposée à celle de ω équations: $f_1y_1 = 0$; $f_2y_1 = 0$; $\ldots . f_\omega y_\omega = 0$, qui sont respectivement des degrés: $m_1, m_2, \ldots . m_\omega$, et dont les coëfficiens sont des fonctions rationnelles des coëfficiens de φx et θx.

Si l'on veut que les équations

$$56.\quad f_1 y_1 = 0;\ f_2 y_2 = 0;\ \ldots\ f_\omega y_\omega$$

soient les moins élevées possibles, il faut choisir $m_1, m_2, \ldots m_\omega$ tels, que ces nombres soient des puissances de nombres premiers. P. ex. si l'équation proposée $\varphi x = 0$ est du degré:

$$57.\quad \mu = \varepsilon_1^{\nu_1} . \varepsilon_2^{\nu_2} \ldots\ldots \varepsilon_\omega^{\nu_\omega},$$

où $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_\omega$ sont des nombres premiers différens, on aura

$$58.\quad m_1 = \varepsilon_1^{\nu_1};\ m_2 = \varepsilon_2^{\nu_2};\ \ldots\ m_\omega = \varepsilon_\omega^{\nu_\omega}.$$

L'équation proposée étant résoluble algébriquement, les équations (56.) le seront aussi; car les racines de ces équations sont des fonctions rationnelles de x. On peut aisément les résoudre de la manière suivante:

La quantité y est une fonction rationnelle et symétrique des racines de l'équation (53.), c'est-à-dire de:

$$59.\quad x,\ \theta^m x,\ \theta^{2m} x,\ \ldots\ \theta^{(n-1)m} x.$$

Soit

$$60.\quad y = Fx = f(x, \theta^m x, \theta^{2m} x, \ldots\ \theta^{(n-1)m} x),$$

les racines de l'équation (53.) seront

$$61.\quad Fx;\ F(\theta x);\ F(\theta^2 x);\ \ldots\ F(\theta^{m-1} x);$$

or je dis que l'on peut exprimer ces racines de la manière suivante:

$$62.\quad y,\ \lambda y,\ \lambda^2 y,\ \ldots\ \lambda^{m-1} y,$$

où λy est une fonction rationnelle de y et de quantités connues.

On aura

$$63.\quad F(\theta x) = f\{\theta x, \theta(\theta^m x), \theta(\theta^{2m} x), \ldots\ \theta(\theta^{(n-1)m} x)\},$$

donc $F(\theta x)$ sera. autant que Fx, une fonction rationnelle et symétrique des racines $x, \theta^m x, \ldots\ \theta^{(n-1)m} x$, donc on peut, par le procédé, trouvé (24.), exprimer $\psi(\theta x)$ rationnellement par ψx. Soit donc

$$\psi \theta x = \lambda \psi x = \lambda y,$$

on aura, en remplaçant (en vertu du 1. théorème) x par $\theta x, \theta^2 x, \ldots\ \theta^{m-1} x$:

$$\psi \theta^2 x = \lambda \psi \theta x = \lambda^2 y,$$
$$\psi \theta^3 x = \lambda \psi \theta^2 x = \lambda^3 y,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\psi \theta^{m-1} x = \lambda \psi \theta^{m-2} x = \lambda^{m-1} y,$$

c. q. f. d.

Maintenant les racines de l'équation (53.) pouvant être représentées par:

$$y,\ \lambda y,\ \lambda^2 y,\ \ldots\ \lambda^{m-1} y,$$

on peut résoudre algébriquement cette équation de la même manière que

l'équation $\varphi x = 0$. (Voyez le théorème III.).

Si m est une puissance d'un nombre premier $= \varepsilon^\nu$, on peut encore déterminer y à l'aide de ν équations du degré ε. (Voyez le théorème VI.)

Si dans le théorème III., l'on suppose, que μ soit une puissance de 2, on aura, comme corollaire, le théorème suivant.

Théorème VII. Si les racines d'une équation du degré 2^ω peuvent être représentées par

$$x,\ \theta x,\ \theta^2 x,\ \ldots\ \theta^{2^\omega - 1} x,\ \text{où}\ \theta^{2^\omega} x = x,$$

cette équation pourra être résolue à l'aide de l'extraction de ω racines quarrées.

Ce théorème, appliqué à l'équation $\frac{x^{1+2^\omega}-1}{x-1} = 0$, où $1+2^\omega$ est un nombre premier, donne le théorème de Mr. Gauſs pour le cercle.

§. 4.

Des équations dont toutes les racines peuvent être exprimées rationnellement par l'une d'entre elles.

Nous avons vu précédemment (théorème III.) qu'une équation de degré quelconque, dont les racines peuvent être exprimées par

$$x,\ \theta x,\ \theta^2 x,\ \ldots\ \theta^{u-1} x$$

est toujours résoluble algébriquement.

Dans ce cas toutes les racines sont exprimées rationnellement par l'une d'entre elles; mais une équation, dont les racines ont cette propriété, n'est pas toujours résoluble algébriquement; néanmoins, hors le cas considéré précédemment, il y a encore un autre, dans lequel cela a lieu. On aura le théorème suivant:

Théorème VIII. Soit $\chi x = 0$ une équation algébrique quelconque, dont toutes les racines peuvent être exprimées rationnellement par l'une d'entre elles, que nous désignerons par x. Soient θx et $\theta_1 x$ deux autres racines quelconques, l'équation proposée sera résoluble algébriquement, si l'on a $\theta\theta_1 x = \theta_1 \theta x$.

La démonstration de ce théorème peut être réduite sur le champ à la théorie exposée §. 2., comme nous allons le voir.

Si l'on connoit la racine x, on en aura en même tems toutes les autres; il suffit donc de chercher la valeur de x.

Si l'équation

64. $\chi x = 0$

n'est pas irréductible, soit

65. $\varphi x = 0$

l'équation la moins élevée, à laquelle puisse satisfaire la racine x, les coëfficiens de cette équation ne contenant que des quantités connues. Dans ce cas les racines de l'équation $\varphi x = 0$ se trouveront parmi celles de l'équation $\chi x = 0$ (voyez le premier théorème), et par conséquent elles pourront s'exprimer rationnellement par l'une d'entre elles.

Celà posé soit θx une racine différente de x, en vertu de ce qu'on a vu dans le premier paragraphe, les racines de l'équation $\varphi x = 0$ pourront être exprimées comme il suit:

$$\begin{array}{cccccc} x, & \theta x, & \theta^2 x, & \ldots. & \theta^{n-1} x, \\ x_1, & \theta x_1, & \theta^2 x_1, & \ldots. & \theta^{n-1} x_1, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{m-1}, & \theta x_{m-1}, & \theta^2 x_{m-1}, & \ldots. & \theta^{n-1} x_{m-1}, \end{array}$$

et en formant l'équation

66. $$x^n + A' x^{n-1} + A'' x^{n-2} + A''' x^{n-3} + \ldots + A^{(n-1)} x + A^{(n)} = 0,$$

dont les racines sont x, θx, $\theta^2 x$, ... $\theta^{n-1} x$, les coëfficiens A', A'', ... $A^{(n)}$ pourront être exprimeés rationnellement par une même quantité y, qui sera racine d'une équation irréductible *):

67. $$y^m + p_1 y^{m-1} + p_2 y^{m-2} + \ldots + p_{m-1} y + p_m = 0,$$

dont les coëfficiens sont des quantités connues (voyez §. 2.).

La détermination de x peut s'effectuer à l'aide des deux équations (66.) et (67.). La première de ces équations est résoluble algébriquement, en supposant les coëfficiens connus, c'est-à-dire la quantité y (voyez le théorème III.). Quant à l'équation en y, nous allons démontrer que ses racines ont la même propriété que celles de l'équation proposée $\varphi x = 0$, savoir d'être exprimables rationnellement par l'une d'entre elles.

La quantité y est (voy. 15.) une certaine fonction rationnelle et symétrique des racines x, θx, $\theta^2 x$, ... $\theta^{n-1} x$. En faisant:

68. $$\begin{cases} y = f(x, \theta x, \theta^2 x, \ldots. \theta^{n-1} x_1, \\ \text{les autres racines de l'équation (67.) seront:} \\ y_1 = f(x_1, \theta x_1, \theta^2 x_1, \ldots. \theta^{n-1} x_1), \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ y_{m-1} = f(x_{m-1}, \theta x_{m-1}, \theta^2 x_{m-1}, \ldots. \theta^{n-1} x_{m-1}). \end{cases}$$

*) On démontrera aisément, que cette équation ne pourra être reductible. Soit $R = 0$ l'équation irréductible en y, et ν son degré. En éliminant y, on aura une équation en x du degré $n\nu$; donc $n\nu \geqq \mu$. Mais on a

$$\mu = n.m,$$

donc

$$\nu \geqq m,$$

ce qui est impossible, car ν est moindre que m. Donc etc.

Maintenant, dans le cas en question $x_1, \ldots . x_{m-1}$ seront des fonctions rationnelles de la racine x. Faisons en conséquence

$$x_1 = \theta_1 x, \quad x_2 = \theta_2 x, \quad \ldots . \quad x_{m-1} = \theta_{m-1} x,$$

les racines de l'équation (67.) auront la forme:

$$y_1 = f(\theta_1 x, \theta\theta_1 x, \theta^2\theta_1 x, \ldots . \theta^{n-1}\theta_1 x).$$

Suivant l'hypothèse les fonctions θ et θ_1 ont la propriété que:

$$\theta\theta_1 x = \theta_1\theta x,$$

équation qui, en vertu du théorème I., aura lieu en substituant à la place de x une autre racine quelconque de l'équation $\varphi x = 0$. On en tire successivement

$$\theta^2\theta_1 x = \theta\theta_1\theta x = \theta_1\theta^2 x,$$
$$\theta^3\theta_1 x = \theta\theta_1\theta^2 x = \theta_1\theta^3 x,$$
$$\ldots \ldots \ldots \ldots$$
$$\theta^{n-1}\theta_1 x = \theta\theta_1\theta^{n-2} x = \theta_1\theta^{n-1} x.$$

L'expression de y_1 deviendra par là:

$$y_1 = f(\theta_1 x, \theta_1\theta x, \theta_1\theta^2 x, \ldots . \theta_1\theta^{n-1} x),$$

et on voit que y_1, comme y, est une fonction rationnelle et symétrique des racines

$$x, \quad \theta x, \quad \theta^2 x, \quad \ldots . \quad \theta^{n-1} x.$$

Donc en vertu du théorème II. on peut exprimer y_1 rationnellement par y et des quantités connues. Le même raisonnement s'appliquera à toute autre racine de l'équation (67.). Soient maintenant λy, $\lambda_1 y$ deux racines quelconques, je dis qu'on aura

$$\lambda\lambda_1 y = \lambda_1\lambda y.$$

En effet ayant p. ex.

$$\lambda y = f(\theta_1 x, \theta\theta_1 x, \ldots . \theta^{n-1}\theta_1 x),$$

si

$$y = f(x, \theta x, \ldots . \theta^{n-1} x),$$

on aura, en mettant $\theta_2 x$ au lieu de x:

$$\lambda y_2 = f(\theta_1\theta_2 x, \theta\theta_1\theta_2 x, \ldots . \theta^{n-1}\theta_1\theta_2 x)$$

où

$$y_2 = f(\theta_2 x, \theta\theta_2 x, \ldots . \theta^{n-1}\theta_2 x) = \lambda_1 y,$$

donc

$$\lambda\lambda_1 y = f(\theta_1\theta_2 x, \theta\theta_1\theta_2 x, \ldots . \theta^{n-1}\theta_1\theta_2 x)$$

et également

$$\lambda_1\lambda y = f(\theta_2\theta_1 x, \theta\theta_2\theta_1 x, \ldots . \theta^{n-1}\theta_2\theta_1 x),$$

donc, puisque $\theta_1\theta_2 x = \theta_2\theta_1 x$,

$$\lambda\lambda_1 y = \lambda_1\lambda y.$$

Les racines de l'équation (67.) auront donc précisément la même propriété que celles de l'équation $\varphi x = 0$.

Celà posé, on peut appliquer à l'équation (67.) le même procédé, qu'à l'équation $\varphi x = 0$; c'est-à-dire, la détermination de y peut s'effectuer à l'aide de deux équations, dont l'une sera résoluble algébriquement et l'autre aura la propriété de l'équation $\varphi x = 0$.

Donc le même procédé peut encore être appliqué à cette dernière équation. En continuant, il est clair que la détermination de x pourra s'effectuer à l'aide d'un certain nombre d'équations, qui seront toutes résolubles algébriquement. Donc enfin l'équation $\varphi x = 0$ sera résoluble à l'aide d'opérations algébriques, en supposant connues les quantités qui avec x composent les fonctions:

$$\varphi x,\ \theta x,\ \theta_1 x,\ \theta_2 x,\ \ldots\ \theta_{m-1} x.$$

Il est clair que le degré de chacune des équations auxquelles se réduit la détermination de x, sera un facteur de μ qui marque le degré de l'équation $\varphi x = 0$; et:

Théorème IX. Si l'on désigne les degrés de ces équations respectivement par

$$n,\ n_1,\ n_2,\ \ldots\ n_\omega,$$

on aura:

$$\mu = n \cdot n_1 \cdot n_2 \ldots n_\omega.$$

En rapprochant ce qui précède à ce qui a été exposé dans le §. 3., on aura le théorème suivant:

Théorème X. Supposant le degré μ de l'équation $\varphi x = 0$ décomposé comme il suit:

$$69.\quad \mu = \varepsilon_1^{\nu_1} \cdot \varepsilon_2^{\nu_2} \cdot \varepsilon_3^{\nu_3} \ldots \varepsilon_\alpha^{\nu_\alpha},$$

où $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots \varepsilon_\alpha$ sont des nombres premiers, la détermination de x pourra s'effectuer à l'aide de la résolution de ν_1 équations du degré ε_1, de ν_2 équations du degré ε_2, etc., et toutes ces équations seront résolubles algébriquement.

Dans le cas où $\mu = 2^\nu$, on peut trouver la valeur de x à l'aide de l'extraction de ν racines carrées.

§. 5.

Application aux fonctions circulaires.

En désignant par α la quantité $\frac{2\pi}{\mu}$, on sait qu'on peut trouver une équation algébrique du degré μ, dont les racines seront les μ quantités:

$$\cos\alpha,\ \cos 2\alpha,\ \cos 3\alpha,\ \ldots\ \cos\mu\alpha,$$

et dont les coëfficiens seront des nombres rationnels. Cette équation sera

$$70.\quad x^{\mu} - \tfrac{1}{4}\mu . x^{\mu-2} + \tfrac{1}{1\,2} . \frac{\mu(\mu-3)}{1.3} . x^{\mu-4} \ldots\ldots = 0.$$

Nous allons voir que cette équation a la même forme que l'équation $\chi x = 0$, considérée dans le paragraphe précédent.

Soit $\cos a = x$, on aura d'après une formule connue, quel que soit a:

$$71.\quad \cos ma = \theta(\cos a),$$

où θ désigne une fonction entière. Donc $\cos ma$, qui exprime une racine quelconque de l'équation (70.), sera une fonction rationnelle de la racine x. Soit $\theta_1 x$ une autre racine, je dis qu'on aura

$$\theta\theta_1 x = \theta_1\theta x.$$

En effet, soit $\theta_1 x = \cos m'a$, la formule (71.) donnera, en mettant $m'a$ au lieu de a:

$$\cos(mm'a) = \theta(\cos m'a) = \theta\theta_1 x.$$

De la même manière on aura

$$\cos(m'ma) = \theta_1(\cos ma) = \theta_1\theta x,$$

donc:

$$\theta\theta_1 x = \theta_1\theta x.$$

Donc suivant ce qu'on a vu dans le paragraphe précédent,

$$x \text{ ou } \cos a = \cos\frac{\pi}{\mu}$$

pourra être déterminé algébriquement. Celà est connu.

Supposons maintenant que μ soit un nombre premier $= 2n+1$, les racines de l'équation (70.) seront:

$$\cos\frac{2\pi}{2n+1},\quad \cos\frac{4\pi}{2n+1},\quad \ldots\ldots\quad \cos\frac{4n\pi}{2n+1},\quad \cos 2\pi.$$

La dernière racine $\cos 2\pi$ est égale à l'unité, donc l'équation (70.) est divisible par $x-1$. Les autres racines seront toujours égales entre-elles par couples, car on a $\cos\frac{2m\pi}{2n+1} = \cos\frac{(2n+1-m)2\pi}{2n+1}$, donc on peut trouver une équation dont les racines seront:

$$72.\quad \cos\frac{2\pi}{2n+1},\quad \cos\frac{4\pi}{2n+1},\quad \ldots\ldots\quad \cos\frac{2n\pi}{2n+1}.$$

Cette équation sera:

$$73.\quad x^n + \tfrac{1}{2}x^{n-1} - \tfrac{1}{4}(n-1)x^{n-2} - \tfrac{1}{8}(n-2)x^{n-3}$$
$$+ \tfrac{1}{1\,6} . \frac{(n-2)(n-3)}{1.2} x^{n-4} + \tfrac{1}{3\,2} . \frac{(n-3)(n-4)}{1.2} . x^{n-5} - \text{etc.} = 0.$$

Celà posé, soit

$$\cos\frac{2\pi}{2n+1} = x = \cos a,$$

on aura d'après ce qui précède:

$$\cos\frac{2m\pi}{2n+1} = \theta x = \cos ma.$$

L'équation (73.) sera donc satisfaite par les racines

$$74. \quad x,\ \theta x,\ \theta^2 x,\ \theta^3 x,\ \ldots.$$

On a, quelle que soit la valeur de a:

$$\theta(\cos a) = \cos ma.$$

De là on tire successivement:

$$\theta^2(\cos a) = \theta(\cos ma) = \cos m^2 a,$$
$$\theta^3(\cos a) = \theta(\cos m^2 a) = \cos m^3 a,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\theta^\mu(\cos a) = \theta(\cos m^{\mu-1} a) = \cos m^\mu a.$$

Les racines (74.) deviendront donc

$$75. \quad \cos a,\ \cos ma,\ \cos m^2 a,\ \cos m^3 a,\ \ldots.\ \cos m^\mu a,\ \ldots.$$

Celà posé, si m est une racine primitive pour le module $2n+1$ (voyez Gaufs *Disquis. arithm. pag.* 53.), je dis que toutes les racines

$$76. \quad \cos a,\ \cos ma,\ \cos m^2 a,\ \ldots.\ \cos m^{n-1} a$$

seront différentes entre elles. En effet si l'on avoit

$$\cos m^\mu a = \cos m^\nu a,$$

où μ et ν sont moindres que n, on en tireroit:

$$m^\mu a = \pm m^\nu a + 2k\pi,$$

où k est entier. Celà donne en remettant pour a sa valeur $\frac{2\pi}{2n+1}$,

$$m^\mu = \pm m^\nu + k(2n+1),$$

donc

$$m^\mu \mp m^\nu = m^\nu(m^{\mu-\nu} \mp 1),$$

et par conséquent

$$m^{2(\mu-\nu)} - 1$$

seroit divisible par $2n+1$, ce qui est impossible, car $2(\mu-\nu)$ est moindre que $2n$, et nous avons supposé que m est une racine primitive.

On aura encore:

$$\cos m^n a = \cos a,$$

car $m^{2n}-1 = (m^n-1)(m^n+1)$ est divisible par $2n+1$; donc:

$$m^n = -1 + k(2n+1),$$

et par suite:

$$\cos m^n a = \cos(-a + k.2\pi) = \cos a.$$

De là on voit que les n racines de l'équation (73.) pourront s'exprimer par (76.); c'est-à-dire par:

$$x,\ \theta x,\ \theta^2 x,\ \theta^3 x,\ \ldots .\ \theta^{n-1} x,\ \text{où}\ \theta^n x = x.$$

Donc, en vertu du théorème (III.), cette équation sera résoluble algébriquement.

En faisant $n = m_1 . m_2 \ldots . m_\omega$, on peut diviser la circonférence entière du cercle en $2n+1$ parties égales, à l'aide de ω équations des degrés $m_1, m_2, m_3, \ldots . m_\omega$. Si les nombres $m_1, m_2, \ldots . m_\omega$ sont premiers entre eux, les coëfficiens de ces équations seront des nombres rationnels.

En supposant $\pi = 2^\omega$, on aura le théorème connu sur les polygones reguliers, qui peuvent être construits géométriquement.

En vertu du théorème V. on voit que pour diviser la circonférence entière du cercle en $2n+1$ parties égales, il suffit

1) de diviser la circonférence entière du cercle en $2n$ parties égales,
2) de diviser un arc, qu'on peut construire ensuite, en $2n$ parties égales,
3) et d'extraire la racine carrée d'une seule quantité ϱ.

M. Gauſs a énoncé ce théorème dans ses *Disquis.*, et il ajoute que la quantité dont il faut extraire la racine, sera égale à $2n+1$. C'est ce qu'on peut démontrer aisément comme il suit.

On a vu (40. 38. 46.) que ϱ est la valeur numérique de la quantité $(x+\alpha\theta x+\alpha^2\theta^2 x+\ldots+\alpha^{n-1}\theta^{n-1}x)(x+\alpha^{n-1}\theta x+\alpha^{n-2}\theta^2 x+\ldots+\alpha.\theta^{n-1}x)$ où $\alpha = \cos\frac{2\pi}{n} + \sqrt{-1}.\sin\frac{2\pi}{n}$. En substituant pour $x, \theta x, \ldots .$ leurs valeurs $\cos\alpha, \cos m\alpha, \cos m^2\alpha, \ldots .$ on aura:

$$\pm\varrho = \{\cos a + \alpha\cos ma + \alpha^2\cos m^2 a + \ldots . + \alpha^{n-1}.\cos m^{n-1} a\}$$
$$\times \{\cos a + \alpha^{n-1}\cos ma + \alpha^{n-2}\cos m^2 a + \ldots . + \alpha^{n-1}.\cos m^{n-1} a\}.$$

En développant et mettant $\pm\varrho$ sous la forme

$$\pm\varrho = t_0 + t_1\alpha + t_2\alpha^2 + \ldots . + t_{n-1}.\alpha^{n-1},$$

on trouvera facilement:

$$t_\mu = \cos a.\cos m^\mu a + \cos ma.\cos m^{\mu+1} a + \ldots . + \cos m^{n-1-\mu} a.\cos m^{n-1} a$$
$$+ \cos m^{n-\mu} a.\cos a + \cos m^{n-\mu+1} a.\cos ma + \ldots . + \cos m^{n-1} a.\cos m^{\mu-1} a.$$

Maintenant on a

$$\cos m^\nu a.\cos m^{\mu+\nu} a = \tfrac{1}{2}\cos(m^{\mu+\nu} a + m^\nu a) + \tfrac{1}{2}\cos(m^{\mu+\nu} a - m^\nu a),$$

donc:

$$t_\mu = \tfrac{1}{2}\{\cos(m^\mu+1)a + \cos(m^\mu+1)ma + \cos(m^\mu+1)m^2 a + \ldots + \cos(m^\mu+1)m^{n-1}a\}$$
$$+ \tfrac{1}{2}\{\cos(m^\mu-1)a + \cos(m^\mu-1)ma + \cos(m^\mu-1)m^2 a + \ldots + \cos(m^\mu-1)m^{n-1}a\}.$$

Si l'on fait $(m^\mu+1)\,a = a'$, $(m^\mu-1)\,a = a''$, on aura:

$$t_\mu = \tfrac{1}{2}\{\cos a' + \theta(\cos a') + \theta^2(\cos a') + \ldots + \theta^{n-1}(\cos a')\}$$
$$+ \tfrac{1}{2}\{\cos a'' + \theta(\cos a'') + \theta^2(\cos a'') + \ldots + \theta^{n-1}(\cos a'')\}.$$

Celà posé, il y a deux cas, savoir: μ est différent de zéro ou non.

Dans le premier cas il est clair que $\cos a'$ et $\cos a''$ sont des racines de l'équation (73.), donc $\cos a' = \theta^\delta x$, $\cos a'' = \theta^\varepsilon x$. En substituant, il viendra, en remarquant que $\theta^n x = x$:

$$t_\mu = \tfrac{1}{2}\{\theta^\delta x + \theta^{\delta+1}x + \ldots + \theta^{n-1}x + x + \theta x + \ldots + \theta^{\delta-1}x\}$$
$$+ \tfrac{1}{2}\{\theta^\varepsilon x + \theta^{\varepsilon+1}x + \ldots + \theta^{n-1}x + x + \theta x + \ldots + \theta^{\varepsilon-1}x\},$$

donc

$$t_\mu = x + \theta x + \theta^2 x + \ldots + \theta^{n-1}x,$$

c'est-à-dire t_μ est égal à la somme des racines; par suite en vertu de l'équation (73.):

$$t_\mu = -\tfrac{1}{2}.$$

Dans le cas où $\mu = 0$, la valeur de t_μ deviendra:

$$t_0 = \tfrac{1}{2}\{\cos 2a + \cos 2ma + \ldots + \cos 2m^{n-1}a\} + \tfrac{1}{2}.n;$$

or $\cos 2a$ est une racine de l'équation (73.), donc en faisant

$$\cos 2a = \theta^\delta x,$$

on aura:

$$\cos 2a + \cos 2ma + \ldots + \cos 2m^{n-1}a$$
$$= \theta^\delta x + \theta^{\delta+1}x + \ldots + \theta^{n-1}x + x + \theta x + \ldots + \theta^{\delta-1}x = -\tfrac{1}{2},$$

par conséquent:

$$t_0 = \tfrac{1}{2}n - \tfrac{1}{4}.$$

En vertu de ces valeurs de t_0 et t_μ, la valeur de $\pm\varrho$ deviendra:

$$\pm\varrho = \tfrac{1}{2}n - \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2}.\{\alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \ldots + \alpha^{n-1}\},$$

mais

$$\alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \ldots + \alpha^{n-1} = -1,$$

donc:

$$\pm\varrho = \tfrac{1}{2}n + \tfrac{1}{4},$$

et puisque ϱ est essentiellement positif,

$$\varrho = \frac{2n+1}{4}.$$

Cette valeur de ϱ donne

$$\sqrt{\varrho} = \tfrac{1}{2}.\sqrt{(2n+1)},$$

donc la racine carrée qu'il y a à extraire est celle du nombre $2n+1$, comme le dit M. Gauſs*).

Christiania, 29. Mars 1828.

---

*) L'auteur de ce mémoire donnera dans une autre occasion des applications aux fonctions elliptiques. (Note du red.)

9.
Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données.

(Par Mr. *Lejeune-Dirichlet*, prof. de mathém.)

Les séries de sinus et de cosinus, au moyen desquelles on peut représenter une fonction arbitraire dans un intervalle donné, jouissent entre autres propriétés remarquables aussi de celle d'être convergentes. Cette propriété n'avait pas échappée au géomètre illustre qui a ouvert une nouvelle carrière aux applications de l'analyse, en y introduisant la manière d'exprimer les fonctions arbitraires dont il est question; elle se trouve énoncée dans le Mémoire qui contient ses premières recherches sur la chaleur. Mais personne, que je sache, n'en a donné jusqu'à présent une démonstration générale. Je ne connais sur cet objet qu'un travail dû à M. Cauchy et qui fait partie des Mémoires de l'Académie des sciences de Paris pour l'année 1823. L'auteur de ce travail avoue lui même que sa démonstration se trouve en défaut pour certaines fonctions pour lesquelles la convergence est pourtant incontestable. Un examen attentif du Mémoire cité m'a porté à croire que la démonstration qui y est exposée n'est pas même suffisante pour les cas auxquels l'auteur la croit applicable. Je vais, avant d'entrer en matière, énoncer en peu de mots les objections auxquelles la démonstration de M. Cauchy me parait sujette. La marche que ce géomètre célèbre suit dans cette recherche exige que l'on considère les valeurs que la fonction $\varphi(x)$ qu'il s'agit de développer, obtient, lorsqu'on y remplace la variable x par une quantité de la forme $u + v\sqrt{-1}$. La considération de ces valeurs semble étrangère à la question et l'on ne voit d'ailleurs pas bien ce que l'on doit entendre par le résultat d'une pareille substitution lorsque la fonction dans laquelle elle a lieu, ne peut pas être exprimée par une formule analytique. Je présente cette objection avec d'autant plus de confiance, que l'auteur me semble partager mon opinion sur ce point. Il insiste en effet dans plusieurs de ces ouvrages sur la nécessité de définir d'une manière précise

le sens que l'on attache à une pareille substitution même lorsqu'elle est faite dans une fonction d'une loi analytique régulière; on trouve surtout dans le Mémoire qu'il a inseré dans le 19ième cahier du journal polytechnique pag. 567 et suiv. des remarques sur les difficultés que font naître les quantités imaginaires placées sans des signes de fonctions arbitraires. Quoi qu'il en soit de cette première observation, la démonstration de M. Cauchy donne encore lieu à une autre objection qui parait ne laisser aucun doute sur son insuffisance. La considération des quantités imaginaires conduit l'auteur à un résultat sur le décroissement des termes de la série, qui est loin de prouver que ces termes forment une suite convergente. Le résultat dont il s'agit peut être énoncé comme il suit, en supposant que l'intervalle que l'on considère, s'etende depuis zéro jusqu'à 2π.

„Le rapport du terme dont le rang est n, à la quantité $A\frac{\sin nx}{n}$ (A désignant une constante determinée dépendante des valeurs extrêmes de la fonction) diffère de l'unité prise positivement d'une quantité qui diminue indéfiniment, à mesure que n devient plus grand."

De ce résultat et de ce que la série, qui a $A\frac{\sin nx}{n}$ pour terme général, est convergente, l'auteur conclut que la série trigonométrique générale l'est également. Mais cette conclusion n'est pas permise, car il est facile de s'assurer que deux séries (du moins lorsque, comme il arrive ici, les termes n'ont pas tous le même signe) peuvent être l'une convergente, l'autre divergente, quoique le rapport de deux termes de même rang diffère aussi peu que l'on veut de l'unité prise positivement lorsque les termes sont d'un rang très avancé.

On en voit un exemple très simple dans les deux séries, ayant l'une pour terme général $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, et l'autre $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$. La première de ces séries est convergente, la seconde au contraire est divergente, car en la soustraiant de la première on obtient la série divergente:

$$-1-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{5}-\text{ etc.}$$

et cependant le rapport de deux termes correspondans, qui est $1\pm\frac{1}{\sqrt{n}}$, converge vers l'unité à mesure que n eroît.

Je vais maintenant entrer en matière, en commençant par l'examen des cas les plus simples, auxquels tous les autres peuvent être ra-

menés. Désignons par h un nombre positif inférieur ou tout au plus égal à $\frac{\pi}{2}$ et par $f(\beta)$ une fonction de β qui reste continue entre les limites 0 et h; j'entends par là une fonction qui a une valeur finie et determinée pour toute valeur de β comprise entre 0 et h, et en outre telle que la différence $f(\beta+\varepsilon)-f(\beta)$ diminue sans limite lorsque ε devient de plus en plus petit. Supposons encore que la fonction reste toujours positive entre les limites 0 et h et qu'elle décroisse constamment depuis 0 jusqu'à h, en sorte que si p et q désignent deux nombres compris entre 0 et h, $f(p)-f(q)$ ait toujours un signe opposé à celui de $p-q$. Celà posé considérons l'intégrale

$$(1.)\quad \int_0^h \frac{\sin i\beta}{\sin\beta} f(\beta)\,\partial\beta$$

dans laquelle i est une quantité positive, et voyons ce que cette intégrale deviendra à mesure que i eroît. Pour cela partageons la en plusieurs autres prises la première depuis $\beta=0$ jusqu'à $\beta=\frac{\pi}{i}$, la seconde depuis $\beta=\frac{\pi}{i}$ jusqu'à $\beta=\frac{2\pi}{i}$, et ainsi de suite, l'avant-dernière ayant pour limites $(r-1)\frac{\pi}{i}$ et $\frac{r\pi}{i}$, et la dernière $\frac{2\pi}{i}$ et h, $\frac{r\pi}{i}$ désignant le plus grand multiple de $\frac{\pi}{i}$ qui soit contenu dans h. Il est facile de voir que ces intégrales nouvelles, dont le nombre est $r+1$, sont alternativement positives et négatives, la fonction placée sous le signe somme étant évidemment toujours positive entre les limites de la première, négative entre les limites de la seconde et ainsi de suite. Il n'est pas moins facile de se convaincre que chacune d'elles est plus petite que la précédente, abstraction faite du signe. En effet ν désignant un entier $<r$, les expressions

$$\int_{(\nu-1)\frac{\pi}{i}}^{\nu\frac{\pi}{i}} \frac{\sin i\beta}{\sin\beta} f(\beta)\,\partial\beta \quad\text{et}\quad \int_{\frac{\nu\pi}{i}}^{(\nu+1)\frac{\pi}{i}} \frac{\sin i\beta}{\sin\beta} f(\beta)\,\partial\beta$$

représentent deux intégrales consécutives. Remplaçons dans la seconde β par $\frac{\pi}{i}+\beta$; elle se changera ainsi en celle-ci:

$$\int_{(\nu-1)\frac{\pi}{i}}^{\nu\frac{\pi}{i}} \frac{\sin(i\beta+\pi)}{\sin\left(\beta+\frac{\pi}{i}\right)} f\left(\beta+\frac{\pi}{i}\right)\partial\beta$$

ou ce qui revient au même:

$$-\int_{(\nu-1)\frac{\pi}{i}}^{\nu\frac{\pi}{i}} \frac{\sin i\beta}{\sin\left(\beta+\frac{\pi}{i}\right)} f\left(\beta+\frac{\pi}{i}\right)\partial\beta.$$

Les deux intégrales qu'il s'agit de comparer ayant ainsi les mêmes limites, on voit sans peine que la seconde a une valeur numérique inférieure à celle de la première. Il suffit pour cela de remarquer qu'il suit de la supposition que nous avons faite sur la fonction $f(\beta)$, que $f\left(\frac{\pi}{i}+\beta\right)<f(\beta)$ et que d'un autre côté $\sin\left(\frac{\pi}{i}+\beta\right)>\sin\beta$, les arcs β et $\frac{\pi}{i}+\beta$ étant l'un et l'autre moindres que $\frac{\pi}{2}$, car il en résulte l'inégalité $\frac{f(\beta)}{\sin\beta}>\frac{f\left(\beta+\frac{\pi}{i}\right)}{\sin\left(\beta+\frac{\pi}{i}\right)}$, qui ayant lieu pour toutes les valeurs de β intermédiaires entre les limites $(\nu-1)\frac{\pi}{i}$ et $\frac{\nu\pi}{i}$, fait voir que, comme nous l'avons dit, chaque intégrale est plus grande que celle qui la suit, abstraction faite du signe. Cette circonstance a lieu a fortiori, l'orsqu'on compare l'avant-dernière à la dernière, attendu que la différence des limites $\frac{r\pi}{i}$ et h de la dernière est inférieure à $\frac{\pi}{i}$ différence commune des limites de toutes les autres.

Examinons actuellement un peu plus en détail l'intégrale du rang ν, qui est

$$\int_{(\nu-1)\frac{\pi}{i}}^{\nu\frac{\pi}{i}} \frac{\sin i\beta}{\beta} f(\beta)\partial\beta.$$

Comme la fonction de β qui se trouve sous le signe intégral est le produit des facteurs $\frac{\sin i\beta}{\sin\beta}$, et $f(\beta)$, qui sont l'un et l'autre des fonctions continues de β entre les limites de l'intégration et comme d'un autre côté le premier de ces facteurs conserve toujours le même signe entre ces mêmes limites, on conclura en vertu d'un théorème connu, que l'intégrale que nous considérons est égale à l'intégrale du premier facteur multipliée par une quantité comprise entre la valeur la plus grande et la valeur la plus petite de l'autre facteur. Le second facteur décroissant depuis la première limite jusqu'à la seconde, la quantité dont il s'agit est comprise entre $f\left(\frac{(\nu-1)\pi}{i}\right)$ et $f\left(\frac{\nu\pi}{i}\right)$. En la désignant par ϱ_ν, no-

tre intégrale sera équivalente à

$$\varepsilon_\nu \int_{(\nu-1)\frac{\pi}{i}}^{\nu\frac{\pi}{i}} \frac{\sin i\beta}{\sin\beta}\,\partial\beta.$$

L'intégrale que renfermee encore cette expression, dépend à la fois de ν et de i. Elle est positive ou négative selon que $\nu-1$ est pair ou impair; nous la désignerons désormais par K_ν, abstraction faite du signe. Nous aurons bientôt besoin de connaître la limite vers laquelle elle converge, lors que, ν restant invariable, i devient de plus en plus grand. Pour découvrir cette limite, remplaçons β par $\frac{\gamma}{i}$, γ étant une nouvelle variable. Nous aurons ainsi

$$\int_{(\nu-1)\pi}^{\nu\pi} \frac{\sin\gamma}{i\sin\left(\frac{\gamma}{i}\right)}\,\partial\gamma.$$

Sous cette forme, il est évident qu'elle converge vers la limite

$$\int_{(\nu-1)\pi}^{\nu\pi} \frac{\sin\gamma}{\gamma}\,\partial\gamma,$$

que pour abréger nous désignerons par k_ν, abstraction faite du signe.

On sait que l'intégrale $\int_0^\infty \frac{\sin\gamma}{\gamma}\,\partial\gamma$ a une valeur finie et égale à $\frac{\pi}{2}$. Cette intégrale peut être partagée en une infinité d'autres, prises la première depuis $\gamma = 0$ jusqu'à $\gamma = \pi$, la seconde depuis $\gamma = \pi$ jusqu'à $\gamma = 2\pi$, et ainsi de suite. Ces nouvelles intégrales sont alternativement positives et négatives, chacune d'elles a une valeur numérique inférieure à celle de la précédente, et celle du rang ν est k_ν, abstraction faite du signe. La proposition qu'on vient de citer, revient donc à dire que la suite infinie

$$(2.)\quad k_1 - k_2 + k_3 - k_4 + k_5 - \text{etc.}$$

est convergente et a une somme égale à $\frac{\pi}{2}$.

Les termes de cette suite allant toujours en décroissant, il suit d'une proposition connue que la somme de n premiers termes est supérieure ou inférieure à $\frac{\pi}{2}$, selon que n est impair ou pair et que cette somme qu'on peut désigner par S_n, diffère de $\frac{\pi}{2}$ d'une quantité moindre que le terme suivant k_{n+1}.

Reprenons actuellement l'intégrale (1.) et cherchons à déterminer la limite vers laquelle elle converge lorsque i croît indéfiniment. En

faisant ainsi croître le nombre i, les intégrales dans lesquelles nous avons décomposé l'intégrale (1.), changeront sans cesse de valeur en même temps que leur nombre augmentera; il s'agit de connaître le résultat de ce double changement lorsqu'il continue indéfiniment. Pour cela, prenons un nombre entier m (qu'il soit supposé pair pour plus de simplicité) et supposons que le nombre m reste invariable pendant que i croît. Le nombre r, qui croît sans cesse avec i, finira bientôt par surpasser le nombre invariable m, quelque grand qu'on l'ait choisi.

Cela posé, partageons en deux groupes les intégrales dont la somme est équivalente à l'intégrale (1.). Le premier groupe comprendra les m premières de ces intégrales, et le second sera composé de toutes les suivantes. On aura pour la somme du premier groupe:

$$(3.)\quad K_1\varrho_1 - K_2\varrho_2 + K_3\varrho_3 - K_4\varrho_4 + \ldots. - K_m\varrho_m$$

et le second, dont le nombre des termes croît sans cesse avec i, a pour premiers termes:

$$(4.)\quad K_{m+1}\varrho_{m+1} - K_{m+2}\varrho_{m+2} + \ldots.$$

Considérons séparément ces deux groupes. Le nombre i croissant indéfiniment la somme (3.) convergera vers une limite qu'il est facile de déterminer. En effet, les quantités ϱ, ϱ_2, ... ϱ_m qui sont comprises la première entre $f(0)$ et $f\left(\frac{\pi}{i}\right)$, la seconde entre $f\left(\frac{\pi}{i}\right)$ et $f\left(\frac{2\pi}{i}\right)$, et la dernière entre $f\left(\frac{(m-1)\pi}{i}\right)$ et $f\left(\frac{m\pi}{i}\right)$ convergent chacune vers la limite $f(0)$, lorsque, m restant invariable, i croît sans cesse. D'un autre côté nous avons vu que les quantités K_1, K_2, ... K_m convergent dans les mêmes circonstances respectivement vers les limites k_1, k_2, . . . k_m. Donc la somme (3.) converge vers la limite $f(0)(k_1 - k_2 + k_3 - \text{etc.} \ldots. - k_m) = S_m f(0)$, ce qui veut dire que la différence entre la somme (3.) et $S_m f(0)$ finira toujours, abstraction faite du signe, par être constamment inférieure à ω, ω désignant une quantité positive aussi petite que l'on veut.

Considérons pareillement la somme (4), dont le nombre des termes augmente sans cesse. Ses termes étant alternativement positifs et négatifs, et chacun d'eux ayant une valeur numérique inférieure à celle du terme précédent, comme nous l'avons vu plus haut, en considérant les intégrales que ces termes représentent, il suit d'un principe connu *),

*) Le principe sur lequel nous nous appuyons peut être énoncé de cette manière. Les lettres A, A', A'', ... désignant des quantités positives en nombre quelconque et telles que

que cette somme, quelque soit le nombre de ses termes, est positive comme son premier terme $K_{m+1}\varrho_{m+1}$ et a une valeur inférieure à celle de ce terme. Or, ce premier terme convergeant vers la limite $k_{m+1}f(0)$, il s'ensuit que la somme (4.) finira toujours par être inférieure à $k_{m+1}f(0)$ augmenté d'une quantité positive ω' aussi petite que l'on veut. En combinant ce résultat avec celui que nous avons obtenu sur la somme (3.), il n'y a qu'un instant, on verra que l'intégrale (1.) qui est la somme des expressions (3.) et (4) finira toujours par différer de $f(0)\,S_m$ d'une quantité moindre, abstraction faite du signe, que $\omega+\omega'+f(0)\,k_{m+1}$, ω et ω' étant deux nombres d'une petitesse arbitraire. D'un autre côté S_m diffère de $\frac{\pi}{2}$ d'une quantité numériquement inférieure à k_{m+1}; donc l'intégrale finira toujours par différer de $\frac{\pi}{2}f(0)$ d'une quantité moindre que $\omega+\omega'+2f(0)\,k_{m+1}$, abstraction faite du signe.

Comme m peut être choisi tellement grand que k_{m+1} sait moindre que toute grandeur donnée, il s'ensuit que l'intégrale (1.) finira toujours, lorsque i croît sans limite, par différer constamment de $\frac{\pi}{2}f(0)$ d'une quantité moindre, abstraction faite du signe, qu'un nombre aussi petit que l'on veut. Il est ainsi prouvé, que l'intégrale (1.) converge vers la limite $\frac{\pi}{2}f(0)$ pour des valeurs croissantes de i.

Supposons maintenant que la fonction $f(\beta)$, au lieu d'être toujours décroissante depuis 0 jusqu'à h, soit constante et égale à l'unité. On pourra dans ce cas déterminer la limite vers laquelle converge l'intégrale (1.) par les mêmes considérations que nous venons d'employer; c'est ce qu'on voit tout de suite, en se rappellant que la démonstration précédente est fondée sur ce que les intégrales dans lesquelles nous avons decomposé l'intégrale (1.), forment une suite décroissante. Or, ce décroissement tient à deux choses, au décroissement du facteur $f(\beta)$ et à l'accroissement du diviseur $\sin\beta$. Si $f(\beta)$ devient un nombre constant, l'accroissement de $\sin\beta$ suffira toujours pour rendre chaque intégrale de la série plus petite

---

$A > A' > A''$ > etc., la quantité $A - A' + A'' - A''' +$ etc.
est positive et inférieure à A. Celà résulte immédiatement de que la quantité précedente peut être mise sous l'une et l'autre de ces deux formes:

$$(A - A') + (A'' - A''') + \text{etc.};$$
$$A - (A' - A'') - (A''' - A^{IV}) - \text{etc.}$$

que la précédente. On trouvera ainsi, en supposant toujours h positive et tout au plus égale à $\frac{\pi}{2}$, que l'intégrale $\int_0^h \frac{\sin i\beta}{\sin \beta} \partial \beta$ converge vers la limite $\frac{\pi}{2}$. Il suit de là que l'intégrale $\int_0^h \frac{c \sin i\beta}{\sin \beta} \partial \beta$, dans laquelle c est une constante positive ou négative, converge vers la limite $c\frac{\pi}{2}$.

Nous avons supposé que la fonction $f(\beta)$ était décroissante et positive entre les limites 0 et h. La première circonstance ayant toujours lieu, c'est-à-dire la fonction étant telle que $f(p) - f(q)$ ait un signe contraire à celui de $p - q$ pour des valeurs p et q comprises entre 0 et h, supposons que $f(\beta)$ ne soit pas toujours positive. On prendra alors une constante positive c assez grande pour que $c + f(\beta)$ conserve toujours un signe positif depuis $\beta = 0$ jusqu'à $\beta = h$. L'intégrale $\int_0^h f(\beta) \frac{\sin i\beta}{\sin \beta} \partial \beta$ étant égale à la différence de celles-ci: $\int_0^h [c + f(\beta)] \frac{\sin i\beta}{\sin \beta} \partial \beta$ et $\int_0^h c \frac{\sin i\beta}{\sin \beta} \partial \beta$, sa limite sera la différence des limites vers lesquelles convergent ces dernières. Or ces dernières rentrent dans les cas précédemment examinés ($c + f(\beta)$ étant une fonction décroissante et positive) et convergent vers les limites $[c + f(0)]\frac{\pi}{2}$ et $c\frac{\pi}{2}$, d'où il suit que la première converge vers la limite $\frac{\pi}{2} f(0)$.

Considérons actuellement une fonction $f(\beta)$ croissante depuis 0 jusqu'à h. Dans ce cas $-f(\beta)$ sera une fonction décroissante. L'intégrale $\int_0^h -f(\beta) \frac{\sin i\beta}{\sin \beta} \partial \beta$ convergera donc vers la limite $-\frac{\pi}{2} f(0)$, et par-conséquent l'intégrale $\int_0^h f(\beta) \frac{\sin i\beta}{\sin \beta} \partial \beta$ vers la limite $\frac{\pi}{2} f(0)$.

En réunissant ces résultats, on aura cet énoncé:

(5.) „Quelle que soit la fonction $f(\beta)$, pourvu qu'elle reste continue entre les limites 0 et h (h étant positive et tout au plus égale à $\frac{\pi}{2}$), et qu'elle croisse ou qu'elle décroisse depuis la première de ces limites jusqu'à la seconde, l'intégrale $\int_0^h f(\beta) \frac{\sin i\beta}{\sin \beta} \partial \beta$ finira par différer constamment de $\frac{\pi}{2} f(0)$ d'une quantité moindre que tout nombre assignable, lorsqu'on y fait croître i au delà de toute limite positive."

Désignons par g un nombre positif différent de zéro et inférieur à h, et supposons que la fonction reste continue et croisse ou décroisse depuis g jusqu'à h. L'intégrale $\int_0^h f(\beta)\frac{\sin i\beta}{\sin\beta}\partial\beta$ convergera alors vers une limite qu'il est facile de découvrir. On pourroit y parvenir par des considérations analogues à celles que nous avons appliquées à l'intégrale (1.); mais il est plus simple de ramener ce nouveau cas à ceux que nous avons considérés dans ce qui précède. La fonction n'étant donnée que depuis g jusqu'à h reste entièrement arbitraire pour les valeurs de β comprises entre 0 et g. Supposons que l'on entende par $f(\beta)$, pour les valeurs de β comprises entre 0 et g une fonction continue et croissante ou décroissante depuis 0 jusqu'à g, selon que $f(\beta)$ croît ou décroît depuis g jusqu'à h; supposons encore que $f(g-\varepsilon)$ diffère infiniment peu de $f(g+\varepsilon)$, si ε décroit sans limite; ayant satisfait d'une manière quelconque à ces conditions, ce qu'on peut toujours faire d'une infinité de manières, la fonction $f(\beta)$ remplira depuis 0 jusqu'à h les conditions exprimées dans l'énoncé (5.). Les intégrales

$$\int_0^g f(\beta)\frac{\sin i\beta}{\sin\beta}\partial\beta \quad \text{et} \quad \int_0^h f(\beta)\frac{\sin i\beta}{\sin\beta}\partial\beta$$

convergeront donc l'une et l'autre vers la limite $\frac{\pi}{2}f(0)$. D'où l'on conclut que l'intégrale $\int_0^h f(\beta)\frac{\sin i\beta}{\sin\beta}\partial\beta$ qui est la différence des précédentes, a zéro pour limite.

Ce nouveau résultat peut être réuni en un seul énoncé avec celui que nous avons obtenu plus haut. On aura ainsi:

(6.) „La lettre h désignant une quantité positive tout au plus égale à $\frac{\pi}{2}$, et g une quantité également positive et en outre inférieure à h, l'intégrale

$$\int_g^h f(\beta)\frac{\sin i\beta}{\sin\beta}\partial\beta$$

dans laquelle la fonction $f(\beta)$ est continue entre les limites de l'intégration et a une marche toujours croissante ou toujours décroissante depuis $\beta = g$ jusqu'à $\beta = h$, convergera vers une certaine limite, lorsque le nombre i devient de plus en plus grand. Cette limite est égale à zéro, le seul cas excepté où g a une valeur nulle, dans ce cas elle a la valeur $\frac{\pi}{2}f(0)$."

Il est évident que ce résultat ne serait que légèrement modifié, si la fonction $f(\beta)$ présentait une solution de continuité pour $\beta = g$, et $\beta = h$, c'est-à-dire si $f(g)$ était différent de $f(g+\varepsilon)$ et $f(h)$ de $f(h-\varepsilon)$, ε désignant une quantité infiniment petite et positive, pourvu qu'alors les valeurs $f(g)$ et $f(h)$ ne fûssent pas infinies. Il faudrait seulement dans ce cas remplacer $f(0)$ par $f(\varepsilon)$ dans l'énoncé précédent, ce qu'on peut faire encore même quand il n'y pas de solution de continuité, attendu qu'alors $f(\varepsilon)$ est égale à $f(0)$.

Nous sommes maintenant en état de prouver la convergence des séries périodiques qui expriment des fonctions arbitraires entre des limites données. La marche que nous allons suivre nous conduira à établir la convergence de ces séries et à déterminer en même temps leurs valeurs. Soit $\varphi(x)$ une fonction de x, ayant une valeur finie et déterminée pour chaque valeur de x comprise entre $-\pi$ et π, et supposons qu'il s'agisse de développer cette fonction dans une série de sinus et de cosinus d'arcs multiples de x. La série qui résout cette question, est, comme l'on sait:

$$(7.)\quad \frac{1}{2\pi}\int\varphi(\alpha)\,\partial\alpha + \frac{1}{\pi}\begin{Bmatrix}\cos x\int\varphi(\alpha)\cos\alpha\,\partial\alpha + \cos 2x\int\varphi(\alpha)\cos 2\alpha\,\partial\alpha\ldots.\\ \sin x\int\varphi(\alpha)\sin\alpha\,\partial\alpha + \sin 2x\int\varphi(\alpha)\sin 2\alpha\,\partial\alpha\ldots.\end{Bmatrix}.$$

Les intégrales qui déterminent les coëfficiens constans, étant prises depuis $\alpha = -\pi$ jusqu'à $\alpha = \pi$, et x désignant une quantité quelconque comprise entre $-\pi$ et π (*Théorie de la Chaleur*, No. 232. et suiv.).

Considérons les $2n+1$ premiers termes de cette série (n étant un nombre entier) et voyons vers quelle limite converge la somme de ces termes, lorsque n devient de plus en plus grand. Cette somme peut être mise sous la forme suivante:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\varphi(\alpha)\,\partial\alpha\left[\tfrac{1}{2}+\cos(\alpha-x)+\cos 2(\alpha-x)+\ldots.+\cos n(\alpha-x)\right],$$

ou en sommant la suite de cosinus,

$$(8.)\quad \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\varphi(\alpha)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})(\alpha-x)}{2\sin\frac{1}{2}(\alpha-x)}\,\partial\alpha.$$

Tout se réduit maintenant à déterminer la limite dont cette intégrale approche sans cesse, lorsque n croît indéfiniment. Pour cela nous la partagerons en deux autres prises l'une depuis $-\pi$ jusqu'à x, l'autre depuis x jusqu'à π. Si l'on remplace dans la première α par $x-2\beta$,

et dans la seconde α par $x+2\beta$, β étant une nouvelle variable, ces deux intégrales se changeront en celles-ci, abstraction faite du facteur $\frac{1}{\pi}$:

$$(9.)\quad \int_0^{\frac{1}{2}(\pi+x)} \frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta}\varphi(x-2\beta)\,\partial\beta \text{ et } \int_0^{\frac{1}{2}(\pi-x)} \frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta}\varphi(x+2\beta)\,\partial\beta.$$

Considérons la seconde de ces deux intégrales. La quantité x étant inférieure ou tout au plus égale à π, abstraction faite du signe, $\frac{1}{2}(\pi-x)$ ne pourra tomber hors des limites 0 et π. Si $\frac{1}{2}(\pi-x)=0$, ce qui a lieu lorsque $x=\pi$, l'intégrale est nulle quelque que soit n; dans tous les autres cas elle convergera pour des valeurs croissantes de n vers une limite que nous allons déterminer. Supposons d'abord $\frac{1}{2}(\pi-x)$ inférieure ou tout au plus égale à $\frac{\pi}{2}$, et remarquons que la fonction $\varphi(x+2\beta)$ peut présenter plusieurs solutions de continuité depuis $\beta=0$ jusqu'à $\beta=\frac{1}{2}(\pi-x)$, et qu'elle peut aussi avoir plusieurs maxima et minima dans ce même intervalle. Désignons par l, l', l'', ... $l^{(\nu)}$ rangées selon l'ordre de leur grandeur, les différentes valeurs de β, qui présentent l'une ou l'autre de ces circonstances, et décomposons notre intégrale en plusieurs autres prises respectivement entre les limites 0 et l, l' et l'', ... $l^{(\nu)}$ et $\frac{1}{2}(\pi-x)$. Toutes ces intégrales se trouveront dans le cas de l'énoncé (6.). Elles convergeront donc toutes vers la limite zéro à mesure que n croit, à l'exception de la première qui converge vers la limite $\frac{\pi}{2}\varphi(x+\varepsilon)$, ε étant un nombre infiniment petit et positif. Si $\frac{1}{2}(\pi-x)$ était supérieure à $\frac{\pi}{2}$, ce qui arrivera lorsque x a une valeur négative, on partagerait l'intégrale en deux autres, l'une prise depuis $\beta=0$ jusqu'à $\beta=\frac{1}{2}\pi$, l'autre depuis $\frac{1}{2}\pi$ jusqu'à $\beta=\frac{1}{2}(\pi-x)$. La première de ces nouvelles intégrales se trouvera dans le même cas que celle que nous venons de considérer, elle convergera donc vers la limite $\frac{\pi}{2}\varphi(x+\varepsilon)$. Quant à la seconde, on peut la changer en celle-ci, en y remplaçant β par $\pi-\gamma$, γ étant une nouvelle variable:

$$\int_{\frac{1}{2}(\pi+x)}^{\frac{1}{2}\pi} \varphi(x+2\pi-2\gamma)\frac{\sin(2n+1)(\pi-\gamma)}{\sin(\pi-\gamma)}\,\partial\gamma,$$

ou ce qui revient au même, n étant un entier:

$$\int_{\frac{1}{2}(\pi+x)}^{\frac{1}{2}\pi} \varphi(x+2\pi-2\gamma)\frac{\sin(2n+1)\gamma}{\sin\gamma}\,\partial\gamma.$$

Elle a ainsi une forme analogue à celle de la précédente; en la décomposant comme elle en plusieurs autres, on verra qu'elle converge vers la limite zéro, le seul cas excepté, où $\frac{1}{2}(\pi+x)$ a une valeur nulle, c'est-à-dire lorsque $x=-\pi$; dans ce cas elle approche continuellement de la limite $\varphi(\pi-\varepsilon)$, ε ayant toujours la même signification. En résumant tout ce qui précède, on trouvera que la seconde des intégrales (10.) est nulle lorsque $x=\pi$, qu'elle converge vers la limite $\frac{\pi}{2}[\varphi(\pi-\varepsilon)+\varphi(-\pi+\varepsilon)]$ lorsque $x=-\pi$, et que dans tous les autres cas elle approche continuellement de la limite $\frac{\pi}{2}\varphi(x+\varepsilon)$. La première des intégrales (9.) est entièrement analogue à la seconde; en y appliquant des considérations semblables, on trouvera qu'elle est nulle lorsque $x=-\pi$, qu'elle converge vers la limite $\frac{\pi}{2}[\varphi(\pi-\varepsilon)+\varphi(-\pi+\varepsilon)]$ lorsque $x=\pi$ et que dans tous les autres cas elle a pour limite $\frac{\pi}{2}\varphi(x-\varepsilon)$. Connoissant ainsi les limites de chacune des intégrales (9.), il est facile de trouver la limite dont l'intégrale (8.) approche sans cesse, lorsque n devient de plus en plus grand; il suffit pour celà de se rappeler que cette intégrale est égale à la somme des intégrales (9.) divisée par π. Or, l'intégrale (8.) étant équivalente à la somme des $2n+1$ premiers termes de la série (7.), il est prouvé que cette série est convergente et l'on trouve au moyen des résultats précédens qu'elle est égale à $\frac{1}{2}[\varphi(x+\varepsilon)+\varphi(x-\varepsilon)]$ pour toute valeur de x comprise entre $-\pi$ et π, et que pour chacune des valeurs extrêmes π et $-\pi$, elle est égale à $\frac{1}{2}[\varphi(\pi-\varepsilon)+\varphi(-\pi+\varepsilon)]$.

L'exposé précédent embrasse tous les cas; il se simplifie lorsque la valeur de x qu'on considère n'est pas une de celles qui présentent une solution de continuité. En effet les quantités $\varphi(x+\varepsilon)$ et $\varphi(x-\varepsilon)$ étant alors l'une et l'autre équivalentes à $\varphi(x)$, on voit que la série a pour valeur $\varphi(x)$.

Les considérations précédentes prouvent d'une manière rigoureuse que, si la fonction $\varphi(x)$, dont toutes les valeurs sont supposées finies et déterminées, ne présente qu'un nombre fini de solutions de continuité entre les limites $-\pi$ et π, et si en outre elle n'a qu'un nombre déterminé de maxima et de minima entre ces mêmes limites, la série (7.), dont les coëfficiens sont des intégrales définies dépendantes de la fonction $\varphi(x)$ est convergente et a une valeur généralement exprimée par

$\frac{1}{2}[\varphi(x+\varepsilon)+\varphi(x-\varepsilon)]$, où ε désigne un nombre infiniment petit. Il nous resterait à considérer les cas où les suppositions que nous avons faites sur le nombre des solutions de continuité et sur celui des valeurs maxima et minima cessent d'avoir lieu. Ces cas singuliers peuvent être ramenés à ceux que nous venons de considérer. Il faut seulement pour que la série (8.) présente un sens lorsque les solutions de continuité sont en nombre infini, que la fonction $\varphi(x)$ remplisse la condition suivante.

Il est nécessaire qu'alors la fonction $\varphi(x)$ soit telle que, si l'on désigne par a et b deux quantités quelconques comprises entre $-\pi$ et π, on puisse toujours placer entre a et b d'autres quantités r et s assez rapprochées pour que la fonction reste continue dans l'intervalle de r à s. On sentira facilement la nécessité de cette restriction en considérant que les différens termes de la série sont des intégrales définies et en remontant à la notion fondamentale des intégrales. On verra alors que l'intégrale d'une fonction ne signifie quelque chose qu'autant que la fonction satisfait à la condition précédemment énoncée. On aurait un exemple d'une fonction qui ne remplit pas cette condition, si l'on supposait $\varphi(x)$ égale à une constante déterminée c lorsque la variable x obtient une valeur rationnelle, et égale à une autre constante d, lorsque cette variable est irrationnelle. La fonction ainsi définie a des valeurs finies et déterminées pour toute valeur de x, et cependant on ne saurait la substituer dans la série, attendu que les différentes intégrales qui entrent dans cette série, perdroient toute signification dans ce cas. La restriction que je viens de préciser, et celle de ne pas devenir infinie, sont les seules auxquelle la fonction $\varphi(x)$ soit sujette et tous les cas qu'elles n'excluent pas peuvent être ramenés à ceux que nous avons considérés dans ce qui précède. Mais la chose, pour être faite avec toute la clarté qu'on peut désirer exige quelques détails liés aux principes fondamentaux de l'analyse infinitésimale et qui seront exposés dans une autre note, dans laquelle je m'occuperai aussi de quelques autres propriétés assez remarquables de la série (7.).

Berlin, Janvier 1829.

10.
Ueber die Convergenz einer nach den Sinussen und Cosinussen der Vielfachen eines Winkels fortschreitenden Reihe.

(Vom Herrn Professor *Dirksen* zu Berlin.)

1.

Bezeichnet $f(x)$ eine Function von x, einzig und allein an die Bedingung gebunden, dafs ihre Werthe innerhalb zwei gegebener Grenzen, z. B. von $x = -\alpha$ bis $x = +\alpha$, einschliefslich, wo α eine, übrigens beliebige, endliche Gröfse repräsentirt, beständig endlich und bestimmt bleiben, und nimmt man an, dafs es möglich sei, die Werthe dieser Function, innerhalb eben jener Grenzen ausschliefslich, durch eine Reihe von der Form:

$$A_0 + A_1 \cos\frac{\pi x}{\alpha} + A_2 \cos\frac{2\pi x}{\alpha} + A_3 \cos\frac{3\pi x}{\alpha} + \ldots . A_i \cos\frac{i\pi x}{\alpha} + \text{ etc.}$$

$$+ B_1 \sin\frac{\pi x}{\alpha} + B_2 \sin\frac{2\pi x}{\alpha} + B_3 \sin\frac{3\pi x}{\alpha} + \ldots . B_i \sin\frac{i\pi x}{\alpha} + \text{ etc.},$$

die, der Kürze wegen, dargestellt werden mag durch

$$A_0 + \sum_1^\infty A_i \cos\frac{i\pi x}{\alpha} + \sum_1^\infty B_i \sin\frac{i\pi x}{\alpha},$$

auszudrücken, wo, ganz allgemein, A_i und B_i endliche und bestimmte, von x unabhängige Gröfsen bezeichnen: so läfst sich auf mehr als eine, und wohl am leichtesten auf die zuerst von Euler (*Nova acta acad. Petrop. tom. XI. p.* 116.), rücksichtlich eines verwandten Gegenstandes, mitgetheilte Weise zeigen, dafs alsdann sein mufs:

$$A_0 = \frac{1}{2\alpha}\int_{-\alpha}^{+\alpha} f(\mu)\,d\mu, \quad A_i = \frac{1}{\alpha}\int_{-\alpha}^{+\alpha} \cos\frac{i\pi\mu}{\alpha}.f(\mu)\,d\mu,$$

$$B_i = \frac{1}{\alpha}\int_{-\alpha}^{+\alpha} \sin\frac{i\pi\mu}{\alpha}.f(\mu)\,d\mu,$$

wo μ eine Hülfsgröfse, und $f(\mu)$ eine solche Function von μ bezeichnet, in welche $f(x)$ übergeht, indem man $x = \mu$ setzt.

Substituirt man diese Werthe für A_i und B_i in die obige Reihe, so entsteht die Gleichung:

$$(1.)\quad f(x) = \frac{1}{2\alpha}\int_{-\alpha}^{+\alpha} f(\mu)\,d\mu + \frac{1}{\alpha}\sum_1^\infty \int_{-\alpha}^{+\alpha} \cos\frac{i\pi(x-\mu)}{\alpha}.f(\mu)\,d\mu,$$

welche, in Verbindung mit den vorigen Bedingungen, ein sehr bekanntes Theorem ausspricht.

Man sieht aber leicht, dafs dieses Theorem durch die hier bezeichnete Betrachtungsweise, auf keinen Fall als begründet angesehen werden darf, in so fern nicht unter andern auch die Convergenz der auf der rechten Seite von (1.) befindlichen Reihe gesondert dargethan wird.

Zu beweisen, dafs eben diese Reihe, unter den obigen Bedingungen von $f(x)$ und α, stets einen endlichen und bestimmten Werth hat, ist der nächste Gegenstand der folgenden Betrachtungen, bei denen, zur Abkürzung, der Buchstabe E, sowohl mit als ohne Ordnungszahl, als Repräsentant einer endlichen und bestimmten Gröfse überhaupt, und das Zeichen G_z vor einer Function von z, zur Andeutung desjenigen Werthes dienen wird, welchem sich der Werth der Function von z ins Unbestimmte nähert, indefs der numerische Werth von z als ins Unbestimmte zunehmend gedacht wird.

2.

Bezeichnet $\psi(\mu)$ eine continuirliche unbestimmte Function von μ, von $\mu = \mu_0$ bis $\mu = \mu_1$ einschliefslich, so hat man bekanntlich, mittelst partieller Integration, $\frac{d\psi(\mu)}{d\mu} = \psi'(\mu)$ setzend:

$$\int_{\mu_0}^{\mu_1} \cos\frac{i\pi(x-\mu)}{\alpha}\psi(\mu)\,d\mu = \frac{\alpha}{i\pi}\left\{\sin\frac{i\pi(x-\mu_1)}{\alpha}\psi(\mu_1) - \sin\frac{i\pi(x-\mu_0)}{\alpha}\psi(\mu_0)\right\}$$
$$+ \frac{\alpha}{i\pi}\int_{\mu_0}^{\mu_1} \sin\frac{i\pi(x-\mu)}{\alpha}\psi'(\mu)\,d\mu;$$

folglich

$$(2.)\quad \begin{cases} \sum_1^\infty \int_{\mu_0}^{\mu_1} \cos\frac{i\pi(x-\mu)}{\alpha}\psi(\mu)\,d\mu = -\frac{\alpha}{\pi}\psi(\mu_1)\sum_1^\infty \frac{1}{i}\sin\frac{i\pi(x-\mu_1)}{\alpha} \\ \qquad + \frac{\alpha}{\pi}\psi(\mu_0)\sum_1^\infty \frac{1}{i}\sin\frac{i\pi(x-\mu_0)}{\alpha} \\ \qquad + \frac{\alpha}{\pi}\sum_1^\infty \int_{\mu_0}^{\mu_1} \frac{1}{i}\sin\frac{i\pi(x-\mu)}{\alpha}\psi'(\mu)\,d\mu, \end{cases}$$

eine Gleichung, durch welche die Reihe (1.) auf drei andere zurückgeführt wird.

Betrachtet man nun die Reihe $\sum_1^\infty \frac{1}{i}\sin iz$, so ergiebt sich sehr leicht, dafs man hat, in so fern n eine ganze Zahl bezeichnet:

$$\sum_1^\infty \frac{1}{i}\sin iz = 0, \text{ für } z = \pm 2n\pi;$$
$$= \tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{2}t, \text{ für alle übrige Werthe von } z,$$

wo t gegeben wird durch die Gleichung $z = \pm 2n\pi + t$, n so genommen gedacht, dafs der Werth von t zwischen 0 und $+2\pi$ falle.

Diesem nach hat man ganz allgemein

$$(3.) \quad \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{i} \sin iz = E_{\varrho}.$$

Setzt man nun abwechselnd $z = \frac{i\pi(x-\mu_1)}{\alpha}$, $z = \frac{i\pi(x-\mu_0)}{\alpha}$, und überlegt zugleich, dafs man, der obigen Annahme nach, hat

$$\psi(\mu_0) = E_0, \quad \psi(\mu_1) = E_1,$$

so erlangt man

$$(4.) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\alpha}{\pi} \psi(\mu_1) \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{i} \sin \frac{i\pi(x-\mu_1)}{\alpha} \\ +\frac{\alpha}{\pi} \psi(\mu_0) \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{i} \sin \frac{i\pi(x-\mu_0)}{\alpha} \end{array} \right\} = E_2.$$

Ferner hat man, wie man leicht sieht,

$$\sum_{1}^{\infty} \int_{\mu_0}^{\mu_1} \frac{1}{i} \sin \frac{i\pi(x-\mu)}{\alpha} \psi'(\mu)\, d\mu = \int_{\mu_0}^{\mu_1} \psi'(\mu)\, d\mu\, G_i \sum_{1}^{i} \frac{1}{i} \sin \frac{i\pi(x-\mu)}{\alpha}$$

$$= \int_{\mu_0}^{\mu_1} \psi'(\mu) E_{\varrho}\, d\mu \text{ [nach (3.)]}.$$

In so fern daher auch $\psi'(\mu)$, innerhalb der Grenzen der Integration einschliefslich, beständig endlich und bestimmt bleibt, und μ_0, μ_1 ebenfalls endlich sind, hat man bekanntlich

$$(5.) \quad \sum_{1}^{\infty} \int_{\mu_0}^{\mu_1} \sin \frac{i\pi(x-\mu)}{\alpha} \psi'(\mu)\, d\mu = E_3.$$

Verbindet man die Gleichung (4.) und (5.) mit (2.), so kommt, die vorigen Bedingungen als erfüllt betrachtend:

$$(6.) \quad \sum_{1}^{\infty} \int_{\mu_0}^{\mu_1} \cos \frac{i\pi(x-\mu)}{\alpha} \psi(\mu)\, d\mu = E_2 + \frac{\alpha}{\pi} E_3 = E_4.$$

3.

Die für $\psi'(\mu)$ hervorgetretene Bedingung ist mit Bezug auf den Satz, in der Gleichung (6.), diese an und für sich betrachtet, enthalten, keine nothwendige, sondern lediglich eine, aus der besondern Betrachtungsweise hervorgegangene zufällige. Der Satz selbst behält seine volle Gültigkeit, wenn auch $\psi'(\mu)$, innerhalb der Grenzen der Integration einschliefslich, ein- oder mehrmals unendlich wird, wofern nur $\psi(\mu)$ beständig endlich bleibt. Um die Begriffe festzustellen, wollen wir annehmen, dafs α eine, zwischen μ_0 und μ_1 enthaltene Gröfse bezeichne, und dafs $\psi'(\mu)$ lediglich für diesen Werth von μ unendlich werde.

Da bekanntlich ganz allgemein

$$\sum_{1}^{\infty}\int_{\mu_0}^{\mu_1}\cos\frac{i\pi(x-\mu)}{\alpha}\psi(\mu)\,d\mu = \sum_{1}^{\infty}\int_{\mu_0}^{a-\frac{1}{2}\theta}\cos\frac{i\pi(x-\mu)}{\alpha}\psi(\mu)\,d\mu + \sum_{1}^{\infty}\int_{a-\frac{1}{2}\theta}^{a+\frac{1}{2}\theta}\cos\frac{i\pi(x-\mu)}{\alpha}\psi(\mu)\,d\mu + \sum_{1}^{\infty}\int_{a+\frac{1}{2}\theta}^{\mu_1}\cos\frac{i\pi(x-\mu)}{\alpha}\psi(\mu)\,d\mu$$

ist, so hat man, in Folge der Annahme und der Gleichung (6.), wofern nur der numerische Werth von θ nicht gleich 0 ist, wie man sich leicht überzeugt:

$$(7.)\quad \sum_{1}^{\infty}\int_{\mu_0}^{\mu_1}\cos\frac{i\pi(x-\mu)}{\alpha}\psi(\mu)\,d\mu = E_5 + \sum_{1}^{\infty}\int_{a-\frac{1}{2}\theta}^{a+\frac{1}{2}\theta}\cos\frac{i\pi(x-\mu)}{\alpha}\psi(\mu)\,d\mu.$$

Da der numerische Werth von θ nach Belieben klein genommen werden kann, so wird derselbe bekanntlich dergestalt gewählt werden können, dafs sich der Werth von $\psi(\mu)$, von $\mu = a - \frac{1}{2}\theta$ bis $\mu = a + \frac{1}{2}\theta$, mittelst einer sehr rasch convergirenden, nach ganzen Potenzen von θ fortschreitenden Reihe darstellen lasse. Verbindet man nun mit dieser Bemerkung die Gleichung (6.), so ergiebt sich, wie man leicht übersieht, die Gleichung

$$\sum_{1}^{\infty}\int_{a-\frac{1}{2}\theta}^{a+\frac{1}{2}\theta}\cos\frac{i\pi(x-\mu)}{\alpha}\psi(\mu)\,d\mu = E_6,$$

die, mit (7.) verbunden, liefert:

$$(8.)\quad \sum_{1}^{\infty}\int_{\mu_0}^{\mu_1}\cos\frac{i\pi(x-\mu)}{\alpha}\psi(\mu)\,d\mu = E_7,$$

welche Gleichung also, wie leicht zu übersehen, statt findet, wofern nur $\psi(\mu)$, innerhalb der Grenzen der Integration einschliefslich, stets continuirlich ist, und μ_0 und μ_1 endliche Gröfsen bezeichnen. Dies vorausgesetzt, möge $f(\mu)$ eine Function von μ bezeichnen, deren Werthe gegeben werden:

von $\mu = \mu_0$ bis $\mu = \mu_1$, durch $\psi_0(\mu)$,
von $\mu = \mu_1$ bis $\mu = \mu_2$, durch $\psi_1(\mu)$,
von $\mu = \mu_2$ bis $\mu = \mu_3$, durch $\psi_2(\mu)$,
$\vdots$
von $\mu = \mu_{r-1}$ bis $\mu = \mu_r$, durch $\psi_{r-1}(\mu)$,
$\vdots$
von $\mu = \mu_{n-1}$ bis $\mu = \mu_n$, durch $\psi_{n-1}(\mu)$,

wo $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \ldots \mu_r, \ldots \mu_n$ entweder wachsend, oder abnehmend fortgehen, so hat man, in Folge von (8.):

$$\sum_{1}^{\infty} \int_{\mu_{r-1}}^{\mu_r} \cos \frac{i\pi(x-\mu)}{\alpha} \psi_{r-1}(\mu)\, d\mu = E_{r-1},$$

folglich

$$(9.) \quad \sum_{r=1}^{r=n} \sum_{1}^{\infty} \int_{\mu_{r-1}}^{\mu_r} \cos \frac{i\pi(x-\mu)}{\alpha} \psi_{r-1}(\mu)\, d\mu = \sum_{r=1}^{r=n} E_{r-1} = E,$$

wofern nur ganz allgemein $\psi_{r-1}(\mu)$, von $\mu = \mu_{r-1}$ bis μ_r continuirlich ist, und μ_{r-1} und μ_r endliche Gröfsen sind.

Setzt man nun

$$(10.) \quad \sum_{r=1}^{r=n} \sum_{1}^{\infty} \int_{\mu_{r-1}}^{\mu_r} \cos \frac{i\pi(x-\mu)}{\alpha} \psi_{r-1}(\mu)\, d\mu = \sum_{1}^{\infty} \int_{\mu_0}^{\mu_n} \cos \frac{i\pi(x-\mu)}{\alpha} f(\mu)\, d\mu,$$

so erlangt man -

$$(11.) \quad \sum_{1}^{\infty} \int_{\mu_0}^{\mu_n} \cos \frac{i\pi(x-\mu)}{\alpha} f(\mu)\, d\mu = E,$$

wofern nur $f(\mu)$, innerhalb der Grenzen μ_0 und μ_n einschliefslich, es sei übrigens continuirlich oder discontinuirlich, beständig endlich und bestimmt, und μ_0, μ_n endliche Gröfsen repräsentiren.

Bezeichnet demnach α eine endliche Gröfse, und setzt man

$$\mu_0 = -\alpha \quad \text{und} \quad \mu_1 = +\alpha,$$

so kommt

$$(12.) \quad \sum_{1}^{\infty} \int_{-a}^{+\alpha} \cos \frac{i\pi(x-\mu)}{\alpha} f(\mu)\, d\mu = E,$$

wofern nur $f(x)$, von $x = -\alpha$ bis $x = +\alpha$ beständig endlich und bestimmt ist, welches Resultat von dem von Hrn. Cauchy (*Mémoires de l'acad. d. scienc. an.* 1823.) erhaltenen, in so fern verschieden ist, als letzteres bedingter zu sein scheint, und auch die mitunter geäufserte Ansicht, nach welcher ein Ausdruck von der Form (11.) und (12.), an und für sich betrachtet, nichts weiter als ein (bedeutungsloses) Symbol bildet, nicht bestätigt.

4.

Was die Begründung des Theorems durch die Gleichung (1.), in Verein mit den für $f(x)$ und α angegebenen Bedingungen ausgesprochen, anbelangt, so dürfte diese durch die in §. 1. bezeichnete Betrachtung, in Verbindung mit dem Resultate von (12.), keinesweges als erledigt zu betrachten, und vielleicht auf folgende Weise am directesten zu bewerkstelligen sein.

Bekanntlich ist:

$$(13.)\quad \begin{cases} \sum_1^\infty \int_{\mu_0}^{\mu_n} \cos\frac{i\pi(x-\mu)}{\alpha} f(\mu)\,d\mu = G_i \int_{\mu_0}^{\mu_n} f(\mu)\,d\mu \sum_1^i \cos\frac{i\pi(x-\mu)}{\alpha} \\ \qquad = -\tfrac{1}{2}\int_{\mu_0}^{\mu_n} f(\mu)\,d\mu + \tfrac{1}{2} G_i \int_{\mu_0}^{\mu_n} \frac{\sin\frac{(i+\frac{1}{2})\pi(x-\mu)}{\alpha}}{\sin\frac{\frac{1}{2}\pi(x-\mu)}{\alpha}} f(\mu)\,d\mu, \end{cases}$$

und, nach (10.) und mittelst partieller Integration:

$$(14.)\quad \begin{cases} G_i \int_{\mu_0}^{\mu_n} \frac{\sin\frac{(i+\frac{1}{2})\pi(x-\mu)}{\alpha}}{\sin\frac{\frac{1}{2}\pi(x-\mu)}{\alpha}} f(\mu)d\mu = -G_i \frac{1}{i+\frac{1}{2}} \sum_{r=1}^{r=n} \frac{\cos\frac{(i+\frac{1}{2})\pi(x-\mu_r)}{\alpha}}{\sin\frac{\frac{1}{2}\pi(x-\mu_r)}{\alpha}} \psi_{r-1}(\mu_r) \\ \qquad + G_i \frac{1}{i+\frac{1}{2}} \sum_{r=1}^{r=n} \frac{\cos\frac{(i+\frac{1}{2})\pi(x-\mu_{r-1})}{\alpha}}{\sin\frac{\frac{1}{2}\pi(x-\mu_{r-1})}{\alpha}} \psi_{r-1}(\mu_{r-1}) \\ \qquad + G_i \frac{1}{i+\frac{1}{2}} \sum_{r=1}^{r=n} \int_{\mu_{r-1}}^{\mu_r} \frac{\cos\frac{(i+\frac{1}{2})\pi(x-\mu)}{\alpha}}{\sin\frac{\frac{1}{2}\pi(x-\mu)}{\alpha}} d\psi_{r-1}(\mu). \\ = 0, \end{cases}$$

für alle Werthe von x, bei denen $\sin\frac{\frac{1}{2}\pi(x-\mu)}{\alpha}$, von $\mu=\mu_0$ bis $\mu=\mu_n$ einschliefslich, nicht Null, folglich $x-\mu$ nicht von der Form $\pm 2n\alpha$ wird. Obgleich dieses Resultat hier zunächst nur für den Fall hervortritt, wo $\frac{d\psi_{r-1}(\mu)}{d\mu}$, von $\mu=\mu_{r-1}$ bis $\mu=\mu_r$ einschliefslich, für alle Werthe von r, stets endlich bleibt, so überzeugt man sich dennoch auf die in §. 3. näher bezeichnete Weise sehr leicht, dafs solches auch dann noch allgemeine Gültigkeit hat, falls $\psi'_{r-1}(\mu)$ ein- oder mehrmals unendlich werden sollte.

Erlangt aber $x-\mu$, für irgend einen zwischen μ_0 und μ_n einschliefslich enthaltenen Werth von μ, einmal einen Werth von der Form $\pm 2n\alpha$, wodurch alsdann $\mu=\pm 2n\alpha+x$ wird; so hat man, da ganz allgemein

$$\int_{\mu_0}^{\mu_n} \varphi(\mu)\,d\mu = \int_{\mu_0}^{\pm 2n\alpha+x-\theta} \varphi(\mu)\,d\mu + \int_{\pm 2n\alpha+x-\theta}^{\pm 2n\alpha+x} \varphi(\mu)\,d\mu + \int_{\pm 2n\alpha+x}^{\pm 2n\alpha+x+\theta'} \varphi(\mu)\,d\mu + \int_{\pm 2n\alpha+x+\theta'}^{\mu_n} \varphi(\mu)\,d\mu$$

ist, in Folge von (14.), wofern man zur Abkürzung

$$(15.)\quad \frac{\sin\frac{(i+\frac{1}{2})\pi(x-\mu)}{\alpha}}{\sin\frac{\frac{1}{2}\pi(x-\mu)}{\alpha}} f(\mu) = \varphi(\mu)$$

setzt, wie leicht zu übersehen,

$$(16.)\quad \begin{cases} G_i\int_{\mu_0}^{\mu_n}\varphi(\mu)\,d\mu = G_i\int_{\pm 2n\alpha+x-\theta}^{\pm 2n\alpha+x}\varphi(\mu)\,d\mu + G_i\int_{\pm 2n\alpha+x}^{\pm 2n\alpha+x+\theta'}\varphi(\mu)\,d\mu, \\ \text{wenn weder } \mu_0 \text{ noch } \mu_n \text{ von der Form } \pm 2n\alpha + x \text{ ist;} \\ G\int_{\mu_0}^{\mu_n}\varphi(\mu)\,d\mu = G_i\int_{\pm 2n\alpha+x}^{\pm 2n\alpha+x+\theta'}\varphi(\mu)\,d\mu, \\ \text{wenn } \mu_0 \text{ von der Form } \pm 2n\alpha + x \text{ ist;} \\ G_i\int_{\mu_0}^{\mu_n}\varphi(\mu)\,d\mu = G_i\int_{\pm 2n\alpha+x-\theta}^{\pm 2n\alpha+x}\varphi(\mu)\,d\mu, \\ \text{wenn } \mu_n \text{ von der Form } \pm 2n\alpha + x \text{ ist;} \end{cases}$$

wo θ und θ' nach Belieben klein, jedoch nicht gleich Null genommen werden können.

Setzt man nun $\mu = \pm 2n\alpha + x - \xi$, so kommt mit Rücksicht auf (15.):

$$G_i\int_{\pm 2n\alpha+x-\theta}^{\pm 2n\alpha+x}\varphi(\mu)\,d\mu = -G_i\int_{\theta}^{0}\frac{\sin(i+\frac{1}{2})\frac{\pi}{\alpha}\xi}{\sin\frac{1}{2}\frac{\pi}{\alpha}\xi} f(x\pm 2n\alpha-\xi)\,d\xi;$$

folglich, da θ nach Belieben klein genommen werden kann:

$$G_i\int_{\pm 2n\alpha+x-\theta}^{\pm 2n\alpha+x}\varphi(\mu)\,d\mu = -2f(x\pm 2n\alpha)\,G_i\int_{\theta}^{0}\sin\frac{(i+\frac{1}{2})\frac{\pi}{\alpha}\xi}{\frac{\pi}{\alpha}\xi}\,d\xi;$$

mithin, indem man $(i+\frac{1}{2})\frac{\pi}{\alpha}\xi = \zeta$ setzt:

$$G_i\int_{\pm 2n\alpha+x-\theta}^{\pm 2n\alpha+x}\varphi(\mu)\,d\mu = +2\frac{\alpha}{\pi}f(x\pm 2n\alpha)\int_{0}^{\infty}\frac{\sin\zeta}{\zeta}\,d\zeta,$$

und endlich, da bekanntlich $\int_0^\infty \frac{\sin\zeta}{\zeta}d\zeta = \frac{1}{2}\pi$ ist:

$$(17.)\quad \begin{cases} G\int_{\pm 2n\alpha+x-\theta}^{\pm 2n\alpha+x}\varphi(\mu)\,d\mu = \alpha f(x\pm 2n\alpha). \\ \text{Auf dieselbe Weise erhält man} \\ G_i\int_{\pm 2n\alpha+x}^{\pm 2n\alpha+x+\theta'}\varphi(\mu)\,d\mu = \alpha f(x\pm 2n\alpha). \end{cases}$$

Faſst man nun die Resultate von (13.), (14.), (15.), (16.) und (17.) zusammen, so erlangt man folgenden allgemeinen Satz:

$$\sum_{1}^{\infty}\int_{\mu_0}^{\mu_n}\cos\frac{i\pi(x-\mu)}{\alpha}f(\mu)\,d\mu = -\tfrac{1}{2}\int_{\mu_0}^{\mu_n}f(\mu)\,d\mu,$$

wenn zwischen μ_0 und μ_n einschlieſslich kein Werth für μ von der Form $\pm 2n\alpha + x$ enthalten ist;

$$\sum_{1}^{\infty}\int_{\mu_0}^{\mu_n}\cos\frac{i\pi(x-\mu)}{\alpha}f(\mu)\,d\mu = -\tfrac{1}{2}\int_{\mu_0}^{\mu_n}f(\mu)d\mu + \alpha f(x\pm 2n\alpha),$$

(18.) wenn zwischen μ_0 und μ_n ausschlieſslich ein Werth für μ von der Form $\pm 2n\alpha + x$ enthalten ist;

$$\sum_{1}^{\infty}\int_{\mu_0}^{\mu_n}\cos\frac{i\pi(x-\mu)}{\alpha}f(\mu)\,d\mu = -\tfrac{1}{2}\int_{\mu_0}^{\mu_n}f(\mu)\,d\mu + \tfrac{1}{2}\alpha f(x\pm 2n\alpha),$$

wenn entweder μ_0 oder μ_n von der Form $\pm 2n\alpha + x$ ist,

wo n so genommen werden muſs, daſs $x\pm 2n\alpha$ zwischen μ_0 und μ_n einschlieſslich falle.

Ist aber zwischen μ_0 und μ_n eine Anzahl von $(m+1)$ Werthen für μ von der Form $\pm 2n\alpha + x$ vorhanden, von denen keiner mit den Grenzwerthen μ_0 oder μ_n übereinstimmt, so findet man:

$$(19.)\quad \sum_{1}^{\infty}\int_{\mu_0}^{\mu_n}\cos\frac{i\pi(x-\mu)}{\alpha}f(\mu)\,d\mu = -\tfrac{1}{2}\int_{\mu_0}^{\mu_n}f(\mu)\,d\mu + \alpha\cdot\sum_{\varrho=0}^{\varrho=m}f[x\pm 2(n+\varrho)\alpha).$$

5.

Setzt man nun, um sich von diesem allgemeineren Fall zu dem in Rede stehenden mehr besonderen zu wenden, $\mu_0 = -\alpha$, $\mu_n = +\alpha$, so übersieht man leicht, daſs es zu jedem Werthe von x einen Werth, und auch nicht mehr als Einen Werth fur μ, zwischen $-\alpha$ und $+\alpha$ enthalten, giebt, in Folge von welchem $x-\mu$ von der Form $\pm 2n\alpha$ wird.

Nach (18.) hat man also

$$\sum_{1}^{\infty}\int_{-\alpha}^{+\alpha}\cos\frac{i\pi(x-\mu)}{\alpha}f(\mu)\,d\mu = -\tfrac{1}{2}\int_{-\alpha}^{+\alpha}f(\mu)\,d\mu + \alpha f(x\pm 2n\alpha),$$

für solche Werthe von x, für welche weder $x+\alpha$ noch $x-\alpha$ von der Form $\pm 2n\alpha$ wird;

$$\sum_{1}^{\infty}\int_{-\alpha}\cos\frac{i\pi(x-\mu)}{\alpha}f(\mu)\,d\mu = -\tfrac{1}{2}\int_{-\alpha}^{+\alpha}f(\mu)\,d\mu + \tfrac{1}{2}\alpha f(x\pm 2n\alpha),$$

(20.) für solche Werthe von x, für welche entweder $x+\alpha$ oder $x-\alpha$ von der Form $\pm 2n\alpha$ ist.

Für alle diejenigen Werthe von x, welche zwischen $-\alpha$ und $+\alpha$ enthalten sind, hat man offenbar $n=0$, und daher, indem man unter dieser Voraussetzung die Gleichungen (20.) nach $f(x)$ auflöst:

$$(21.)\quad f(x)=\frac{1}{2\alpha}\int_{-\alpha}^{+\alpha}f(\mu)\,d\mu+\frac{1}{\alpha}\sum_{1}^{\infty}\int_{-\alpha}^{+\alpha}\cos\frac{i\pi(x-\mu)}{\alpha}f(\mu)\,d\mu,$$

für alle Werthe von x, zwischen $-\alpha$ und $+\alpha$ ausschliefslich enthalten,

$$(22.)\quad f(x)=\frac{1}{\alpha}\int_{-\alpha}^{+\alpha}f(\mu)\,d\mu+\frac{2}{\alpha}\sum_{1}^{\infty}\int_{-\alpha}^{+\alpha}\cos\frac{i\pi(x-\mu)}{\alpha}f(\mu)\,d\mu,$$

für $x=-\alpha$ und $x=+\alpha$,

von denen (21.) mit der Gleichung (1.) einerlei ist.

Berlin, den 15. Januar 1829.

11.

Beweis eines neuen, von Herrn Chasles in der Statik entdeckten Satzes, nebst einigen Zusätzen.

(Von Herrn Prof. *A. F. Möbius* zu Leipzig.)

Wie auch die Kräfte, welche auf ein freies und seiner Form nach unveränderliches System wirken, auf zwei Kräfte reducirt werden mögen, so ist das Tetraëder, welches zu gegenüberliegenden Kanten die Geraden hat, wodurch die zwei resultirenden Kräfte ihrer Stärke und Richtung nach vorgestellt werden, immer von demselben Inhalte.

Diesen merkwürdigen Satz der Statik habe ich in de Férussac *Bulletin des sciences mathém. etc. Septemb.* 1828, *pag.* 187., in der Anzeige von Gergonne *Annales mathém. Tom. XVIII. no.* 12. *Juin* 1828. aufgeführt gefunden, mit der Bemerkung, dafs Hr. Gergonne, dem dieses Theorem von Hr. Chasles ohne Beweis mitgetheilt worden sei, es daselbst bewiesen habe.

Ohne diesen Beweis zu kennen, indem jenes Heft der Gergonneschen Annalen mir noch nicht zu Gesicht gekommen ist, habe ich selbst einen solchen aufzufinden gesucht, den ich, da er durch eine neue dabei angewendete Ansicht der statischen Momente und durch die damit bewirkte Kürze einige Aufmerksamkeit verdienen dürfte, hier mittheilen will.

Wie bekannt, erhält man das Moment einer Kraft in Bezug auf eine gewisse Axe, wenn man die Kraft auf eine, die Axe rechtwinklig schneidende Ebene projicirt, und diese Projection mit ihrem Abstande von der Axe multiplicirt. Werde daher durch die Gerade PQ (Fig. 9.) eine Kraft, ihrer Stärke und Richtung nach, vorgestellt. Durch einen beliebigen Punct A der Axe AB lege man eine Ebene rechtwinklig auf die Axe, und seien P' und Q' die Fufspuncte der auf diese Ebene von P und Q gefällten Perpendikel, so ist das Moment der Kraft PQ dem doppelten Inhalte des Dreiecks $AP'Q'$ gleich. Es ist aber, wo auch der Punct B in der Axe genommen werden mag, $AP'Q' \times AB =$ dem Dreifachen des Tetraëders $ABP'Q'$, und $ABP'Q' = ABP'Q$, weil beid

Tetraëder eine gemeinschaftliche Basis ABP' haben, und ihre Spitzen Q', Q in einer Parallele mit dieser Basis liegen. Eben so ist ferner $ABP'Q = ABPQ$, weil die Linie durch die Spitzen P', P dieser zwei Tetraëder parallel mit ihrer gemeinschaftlichen Grundfläche ABQ läuft.

Man hat daher $AP'Q' \times AB = 3.ABQP$, und folglich das Moment der Kraft PQ in Bezug auf die Axe AB, $= 2.AP'Q' = 6.\frac{ABPQ}{AB}$; und eben so das Moment einer andern Kraft RS, in Bezug auf dieselbe Axe, $= 6.\frac{ABRS}{AB}$. Da es aber bei den Momenten nicht sowohl auf ihre absolute Gröfse, als vielmehr auf ihr gegenseitiges Verhältnifs ankommt, so kann man die Momente von PQ, RS, in Bezug auf AB geradezu den Tetraëdern $ABPQ$, $ABRS$ gleich setzen. Auf eben die Art werden die Momente derselben Kräfte in Bezug auf irgend eine andere Axe CD durch die Tetraëder $CDPQ$, $CDRS$ ausgedrückt werden können, wobei man noch den Abschnitt CD in der andern Axe, dem Abschnitte AB in der ersten gleich anzunehmen hat, wenn man die letzten Momente nicht blofs unter sich, sondern auch mit den ersten vergleichen will.

So wie also bei einem Systeme von Kräften in einer Ebene die Momente derselben in Bezug auf einen gewissen Punct der Ebene durch die Dreiecke dargestellt werden, welche diesen Punct zur gemeinschaftlichen Spitze und die Kräfte selbst zu Grundlinien haben, so lassen sich bei einem Systeme von Kräften im Raume die Momente derselben in Bezug auf eine gewisse Axe durch die Tetraëder ausdrücken, welche einen beliebigen, aber von unveränderlicher Länge zu nehmenden Abschnitt dieser Axe zur gemeinschaftlichen Kante, die Kräfte selbst aber zu gegenüberliegenden Kanten haben.

Wenn daher bei einem System von Kräften PQ, RS, TU, . . ., die auf einen freien, festen Körper wirken, Gleichgewicht statt findet, so mufs immer, wie auch die zwei Puncte A und B genommen werden, die algebraische Summe der Tetraëder

$$ABPQ + ABRS + ABTU + \ldots = 0$$

sein, weil unter der Voraussetzung des Gleichgewichts die Summe der Momente für jede Axe $= 0$ sein mufs.

Was die Vorzeichen anlangt, mit denen diese Tetraëder zu nehmen sind, so kann man sich jedes derselben, wie $ABPQ$ oder $ABRS$ erzeugt denken, indem ein Dreieck, dessen Grundlinie AB, und dessen Spitze

veränderlich ist, um AB, als Axe, so gedreht wird, dafs seine Spitze, von P nach Q gehend, die Gerade PQ, oder, von R nach S gehend, die Gerade RS beschreibt. Hiernach sind je zwei Tetraëder, wie $ABPQ$ und $ABRS$, mit einerlei oder entgegengesetzten Zeichen zu nehmen, je nachdem die Drehungen, durch welche sie auf die besagte Weise erzeugt werden, einerlei oder entgegengesetzte Richtung haben.

Sind ferner die Kräfte PQ, RS, . . . gleichwirkend mit den Kräften $P'Q'$, $R'S'$ . . ., so ist für jede beliebige Lage der Axe die Summe der Momente der erstern Kräfte gleich der Summe der Momente der letztern, und man hat folglich für jede Lage der Puncte A und B die Gleichung:

$$ABPQ + ABRS + \ldots = ABP'Q' + ABR'S' + \ldots,$$

wo rücksichtlich der Vorzeichen dasselbe wie vorhin zu bemerken ist.

Die Untersuchungen, welche ich mit Hülfe dieser neuen Ansicht der Momente, als Tetraëder, schon seit längerer Zeit angestellt habe, und die damit gewonnenen, zum Theil neuen, Resultate werde ich bei einer andern Gelegenheit mittheilen, und jetzt nur noch die Anwendung dieser Ansicht auf das Theorem des Herrn Chasles zeigen, das, wie man schon im Voraus wahrnimmt, sich hiermit sehr einfach darthun läfst.

Ein System von Kräften, welche auf einen freien festen Körper wirken, sei das eine Mal auf die zwei Kräfte PQ und RS, das andere Mal auf die zwei Kräfte $P'Q'$ und $R'S'$ reducirt worden; so ist zu beweisen, dafs die zwei Tetraëder $PQRS$ und $P'Q'R'S'$ gleichen Inhalt haben.

Weil die erstern zwei Kräfte mit den zwei letztern gleichwirkend sind, so hat man für jede Lage und Gröfse der Axe AB die Gleichung:

$$ABPQ + ABRS = ABP'Q' + ABR'S'.$$

Man lasse nun die willkührlichen zwei Puncte A und B resp. mit P und Q zusammenfallen, so wird das Tetraëder $ABPQ = 0$, und man erhält:

$$1) \quad PQRS = PQP'Q' + PQR'S'.$$

Eben so ergiebt sich, wenn man AB nach und nach mit RS, $P'Q'$, $R'S'$ coïncidiren läfst:

$$2) \quad RSPQ = RSP'Q' + RSR'S',$$
$$3) \quad P'Q'PQ + P'Q'RS = P'Q'R'S',$$
$$4) \quad R'S'PQ + R'S'RS = R'S'P'Q'.$$

Man überzeugt sich aber leicht, dafs den zwei nur durch die Folge der Buchstaben verschiedenen Ausdrücken, $PQRS$ und $RSPQ$, desselben Tetraëders einerlei Vorzeichen zukommen. Wird nemlich das eine Mal PQ zur Axe genommen, die man sich in verticaler Lage denke, P oben, Q unten, — und geschieht alsdann die Drehung des, das Tetraëder $PQRS$ erzeugenden Dreiecks, indem es sich aus der Lage PQR in die Lage PQS begiebt von der Rechten nach der Linken, so wird auch, wie die Anschauung lehrt, wenn, zufolge des Ausdrukes $RSPQ$, RS zur Axe, R oben, S unten, genommen wird, das nunmehr erzeugende und um RS sich drehende Dreieck, um mit seiner Spitze von P nach Q zu kommen, sich gleichfalls von der Rechten nach der Linken drehen müssen. — Dasselbe gilt auch von den übrigen in den Gleichungen 1. bis 4. vorkommenden Paaren von Ausdrücken, in denen die zwei ersten und die zwei letzten Buchstaben mit einander vertauscht sind. (Vergl. Barycentr. Calcul, §. 20. *a.*)

Addirt man daher jene vier Gleichungen, und läfst die zu beiden Seiten des Gleichheitszeichens einander gleichen Glieder weg, so kommt:

$$2.PQRS = 2.P'Q'R'S', \text{ und somit } PQRS = P'Q'R'S'$$

wie zu erweisen war.

Zusätze. Weil PQ und RS mit $P'Q'$ und $R'S'$ gleichwirkend sind, so halten die vier Kräfte PQ, RS, $Q'P'$, $S'R'$ einander das Gleichgewicht. Dieses vorausgesetzt, ist also $PQRS = P'Q'R'S'$, $= Q'P'S'R'$, auch dem Zeichen nach, wie sich auf eine der vorigen ganz ähnliche Weise zeigen läfst. Hiernach kann der Satz des Hrn. Chasles auch so ausgedrückt werden:

> Hat man vier Kräfte, die mit einander im Gleichgewicht sind, so ist das aus irgend zwei derselben gebildete Tetraëder dem Tetraëder aus den beiden andern gleich.

Um die vorige Rechnung bequemer und damit auf noch mehrere Kräfte leicht ausdehnbar zu machen, will ich die Kräfte, oder vielmehr die Linien, wodurch sie vorgestellt werden, mit p, q, r, . . ., die Axe AB, worauf ihre Momente bezogen werden, mit a, und die Tetraëder, welche a und p, a und q, p und q, u. s. w. zu gegenüberstehenden Seiten haben, mit ap, aq, pq, u. s. w. bezeichnen. Alsdann ist beim Gleich-

gewicht zwischen den vier Kräften p, q, r, s:

$$ap + aq + ar + as = 0,$$

und, wenn man a nach und nach mit $p, \ldots s$ zusammenfallen läfst:

$$1)\quad pq + pr + ps = 0,$$
$$2)\quad pq + qr + qs = 0,$$
$$3)\quad pr + qr + rs = 0,$$
$$4)\quad ps + qs + rs = 0,$$

weil die Tetraëder pp, qq, $\ldots = 0$ sind. Die halbe Summe dieser 4 Gleichungen giebt:

$$\text{I.}\quad pq + pr + ps + qr + qs + rs = 0,$$

d. h.: Sind vier Kräfte im Gleichgewicht, so ist die Summe der sechs Tetraëder, welche durch paarweise Verbindung der Kräfte hervorgehen, $= 0$.

Zieht man von I. die Gleichung 4) ab, so kommt:

$$\text{II.}\quad pq + pr + qr = 0;$$

d. h.: Haben drei Kräfte (p, q, r) eine einzige Resultante $(-s)$, so ist die Summe der drei Tetraëder, welche durch paarweise Verbindung der drei Kräfte erhalten werden, $= 0$.

Wird endlich von II. die Gleichung 3) abgezogen, so kommt:

$$\text{III.}\quad pq - rs = 0,$$

welches der Satz des Hrn. Chasles, auf die kurz vorhin gedachte Weise ausgedrückt, ist.

Auf ähnliche Art wollen wir jetzt ein System von 5 Kräften $p, \ldots t$, die im Gleichgewicht mit einander stehen, behandeln. — Aus der Gleichung $ap + \ldots + at = 0$ folgt durch successives Zusammenfallen der Axe a mit $p, \ldots t$:

$$1)\quad pq + pr + ps + pt = 0,$$
$$2)\quad pq + qr + qs + qt = 0,$$
$$3)\quad pr + qr + rs + rt = 0,$$
$$4)\quad ps + qs + rs + st = 0,$$
$$5)\quad pt + qt + rt + st = 0.$$

Die halbe Summe dieser 5 Gleichungen ist:

$$\text{I.}\quad pq + pr + ps + pt + qr + qs + qt + rs + rt + st = 0.$$

Hiervon die Gleieichung 5) abgezogen, kommt:

$$\text{II.}\quad pq + pr + ps + qr + qs + rs = 0,$$

und, wenn man davon noch die Gleichung 4) abzieht:

$$\text{III.} \quad pq + pr + qr = st.$$

Man erkennt hieraus zur Genüge, welches die Formeln bei einer noch gröfsern Anzahl von Kräften sein werden, und kann damit ohne weitere Rechnung folgendes allgemeine Theorem aufstellen:

Hat man eine beliebige Anzahl, $= n$, von Kräften, welche auf einen freien, festen Körper wirken und sind diese Kräfte im Gleichgewicht (wie die 5 Kräfte $p, \ldots t$ in I.), oder lassen sie sich auf eine einzige Kraft reduciren (wie die vier Kräfte $p, \ldots s$ in II. auf die Kraft $-t$), so ist die algebraische Summe der $\frac{1}{2}n\,(n-1)$ Tetraëder, welche hervorgehen, indem man die Kräfte durch Linien ausdrückt, und je zwei derselben zu gegenüberliegenden Seiten eines Tetraëders nimmt, $= 0$. Im allgemeinen Falle aber, wo die n Kräfte sich nicht auf eine, jedoch immer auf zwei Kräfte zurückführen lassen (wie die drei Kräfte p, q, r in III., deren Resultanten $-s$ und $-t$ sind), ist jene Summe von Tetraëdern dem aus den zwei resultirenden Kräften gebildeten Tetraëder selbst gleich.

Letzteres ist daher von constanter Gröfse, wie auch die n Kräfte auf zwei reducirt werden mögen, welches wiederum der Chasles'sche Satz ist.

12.
Suite des notices sur les fonctions elliptiques.

(Par Mr. *C. G. J. Jacobi*, prof. en math. à Königsberg.)

I.

Je vais rapporter ici l'équation à différences partielles qui sert à définir les substitutions à faire pour parvenir à une transformation des fonctions elliptiques, et dont j'ai donné la notice dans le troisième volume de ce journal.

Soit, en faisant usage de la notation dont je me sers ordinairement

$$x = \sqrt{\varkappa}\,\sin\mathrm{am}\,(u,\varkappa);\quad y = \sqrt{\lambda}\,\sin\mathrm{am}\left(\frac{u}{M},\lambda\right),$$

λ étant le module dans lequel se change le module $\varkappa$ par la transformation correspondante à un nombre n impair, on sait qu'on a

$$y = \frac{x\left(B^{\left(\frac{n-1}{2}\right)} + B^{\left(\frac{n-3}{2}\right)}x^2 + \ldots + Bx^{n-1}\right)}{B + B'x^2 + B''x^4 + \ldots + B^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}x^{n-1}},$$

les quantités λ, M, B, B', ... $B^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}$ étant déterminées convenablement en fonctions de $\varkappa$. On aura ici

$$B = \sqrt{\left(\frac{\lambda'}{\varkappa' M}\right)},\quad B^{\left(\frac{n-1}{2}\right)} = \sqrt{\left(\frac{\lambda\lambda'}{\varkappa\varkappa' M^3}\right)}.$$

Soit

$$U = x\left(B^{\left(\frac{n-1}{2}\right)} + B^{\left(\frac{n-3}{2}\right)}x^2 + \ldots + Bx^{n-1}\right),$$

$$V = B + B'x^2 + B''x^4 + \ldots + B^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}x^{n-1}$$

et de plus $\alpha = \frac{1+\varkappa\varkappa}{\varkappa}$, les fonctions U, V satisferont l'une et l'autre à l'équation aux différences partielles suivante:

1) $n(n-1)x^2.z + (n-1)(\alpha x - 2x^3)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + (1-\alpha x^2+x^4)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = 2n(\alpha\alpha - 4)\left(\frac{\partial z}{\partial \alpha}\right).$

L'équation modulaire étant supposée connue, l'équation (1.) suffit pour trouver toutes les quantités B, B', ... $B^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}$ exprimées en fonctions rationnelles des deux modules $\varkappa$ et λ. On pourra donc dire en quelque sorte que cette équation contienne la solution générale du problème de la transformation des fonctions elliptiques, et sous une forme tout à fait

différente de celle sous laquelle nous l'avons fait connoitre, Mr. Abel et moi, dans nos recherches sur cette matière. Elle donne aussi d'une manière directe les formules relatives à la multiplication. En effet, étant supposé $x = \sqrt{\varkappa}\sin\mathrm{am}(u)$, $y = \sqrt{\varkappa}\sin\mathrm{am}(nu)$, si l'on met:

$$y = \frac{Bx^{nn} + B'x^{nn-2} + B''x^{nn-4} + \ldots + B^{\left(\frac{nn-1}{2}\right)}x}{B + B'x^2 + B''x^4 + \ldots + B^{\left(\frac{nn-1}{2}\right)}x^{nn-1}},$$

on trouve:

$$B = \sqrt{n}, \quad B' = 0,$$

$$n^2(n^2-1)B + \quad * \quad + 3\,.\,4B'' = 0,$$

$$* \quad + 4(n^2-4)\alpha B'' + 4\,.\,6B''' = 0,$$

$$(n^2-4)(n^2-5)B'' + 6(n^2-6)\alpha B''' + 7\,.\,8B^{\mathrm{IV}} = 2n^2(\alpha\alpha-4)\frac{\partial B'''}{\partial\alpha},$$

$$(n^2-6)(n^2-3)B''' + 8(n^2-8)\alpha B^{\mathrm{IV}} + 9\,.\,10B^{\mathrm{V}} = 2n^2(\alpha\alpha-4)\frac{\partial B^{\mathrm{IV}}}{\partial\alpha},$$

. . . . . .

$$5\,.\,4B^{\left(\frac{n^2-5}{2}\right)} + (n^2-3)3\alpha B^{\left(\frac{n^2-3}{2}\right)} + (n^2-2)(n^2-1)B^{\left(\frac{n^2-1}{2}\right)} = 2n(\alpha\alpha-4)\frac{\partial B^{\left(\frac{n^2-3}{2}\right)}}{\partial\alpha},$$

$$2\,.\,3B^{\left(\frac{n^2-3}{2}\right)} + (n^2-1)\alpha B^{\left(\frac{n^2-1}{2}\right)} + \quad * \quad = 0,$$

$$B^{\left(\frac{n^2-1}{2}\right)} = \sqrt{n^3}.$$

On tire aisément de ces équations les valeurs de B, B', B'', ... $B^{\left(\frac{nn-1}{2}\right)}$, soit en partant de $B = \sqrt{n}$ ou de $B^{\left(\frac{n^2-1}{2}\right)} = \sqrt{n^3}$. Tout cela s'applique aussi, des légères modifications étant faites, au cas où n est un nombre pair.

Il est très rémarquable que l'équation 1. a des intégrales algébriques. Son intégration générale peut être reduite à celle de l'équation connue et plus simple:

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right) = \left(\frac{\partial z}{\partial\omega}\right).$$

En effet soit $z = \psi(v, \omega)$ une intégrale quelconque de celle-ci, si l'on met $x = \sqrt{\varkappa}\sin\varphi$, on aura, en employant la notation de Mr. Legendre, l'intégrale suivante de l'équation 1.

$$z = \frac{\psi\left(\frac{n\pi F(\varphi)}{2F^2}, \frac{n\pi F^1(\varkappa')}{4F^1}\right)}{\sqrt{(\varkappa' F^2)}\,.\,e^{\int_0^{\varphi}\partial\varphi\frac{F^1E(E)-E^1F(E)}{F^1\triangle(E)}}}.$$

II.

Supposant $x = \sin\mathrm{am}(u)$, les quantités $\sin\mathrm{am}(2u)$, $\sin\mathrm{am}(3u)$, $\sin\mathrm{am}(4u)$ etc. peuvent être exprimées d'une manière assez remarquable au moyen des différentielles des quantités $\sqrt{[x^2(1-x^2)(1-n^2x^2)]}$, $\sqrt{\left[\frac{(1-x^2)(1-n^2x^2)}{x^2}\right]}$, prises par rapport à x^2. Soit

$$\sqrt{[x^2(1-x^2)(1-n^2x^2)]} = A, \quad \sqrt{\left[\frac{(1-x^2)(1-n^2x^2)}{x^2}\right]} = B,$$

on trouve

$$\sin\mathrm{am}\,2u = -\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{\frac{\partial B}{\partial x^2}},$$

$$\sin\mathrm{am}\,3u = x^3\cdot\frac{\frac{\partial^2 B}{(\partial x^2)^2}}{\frac{\partial^2 A}{(\partial x^2)^2}},$$

$$\sin\mathrm{am}\,4u = \frac{1}{x^4}\cdot\frac{\frac{\partial^3 A}{2.3(\partial x^2)^3}}{\frac{\partial^2 B}{2(\partial x^2)^2}\cdot\frac{\partial^2 B}{2(\partial x^2)^2} - \frac{\partial B}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^3 B}{2.3(\partial x^2)^3}},$$

$$\sin\mathrm{am}\,5u = x^5\cdot\frac{\frac{\partial^3 B}{2.3(\partial x^2)^3}\cdot\frac{\partial^3 B}{2.3(\partial x^2)^3} - \frac{\partial^2 B}{2(\partial x^2)^2}\cdot\frac{\partial^4 B}{2.3.4(\partial x^2)^4}}{\frac{\partial^3 A}{2.3(\partial x^2)^3}\cdot\frac{\partial^3 A}{2.3(\partial x^2)^3} - \frac{\partial^2 A}{2(\partial x^2)^2}\cdot\frac{\partial^4 A}{2.3.4(\partial x^2)^4}},$$

. . . . . .

La loi générale de la composition de ces expressions est aisée à saisir. On aura des formules analogues si l'on veut employer au lieu des différentielles de $\sqrt{[x^2(1-x^2)(1-n^2x^2)]}$, $\sqrt{\left[\frac{(1-x^2)(1-n^2x^2)}{x^2}\right]}$ celles des quantites $\frac{1}{\sqrt{[x^2(1-x^2)(1-n^2x^2)]}}$, $\frac{1}{\sqrt{\left[\frac{(1-x^2)(1-n^2x^2)}{x^2}\right]}}$,

III.

Nous allons établir dans ce qui suit les formules générales relatives à la transformation des intégrales elliptiques de la seconde et de la troisième espèce.

Soit n un nombre impair quelconque, ω une quantité telle que $\sin\mathrm{am}(2n\omega) = 0$ et soit en même tems n le nombre le plus petit pour lequel $\sin\mathrm{am}(2n\omega)$ s'évanouit, si l'on met

$$\lambda = \varkappa^n\{\sin\mathrm{co}\,\mathrm{am}\,2\omega.\sin\mathrm{co}\,\mathrm{am}\,4\omega\ldots.\sin\mathrm{co}\,\mathrm{am}\,2(n-1)\omega\}^4,$$

$$\mu = \left\{\frac{\sin\mathrm{co}\,\mathrm{am}\,2\omega.\sin\mathrm{co}\,\mathrm{am}\,4\omega\ldots.\sin\mathrm{co}\,\mathrm{am}\,2(n-1)\omega}{\sin\mathrm{am}\,2\omega.\sin\mathrm{am}\,4\omega\ldots.\sin\mathrm{am}\,2(n-1)\omega}\right\}^2,$$

on a la formule connue

$$1)\quad \frac{\lambda}{\varkappa M}\sin\mathrm{am}\left(\frac{u}{M},\lambda\right)$$
$$=\sin\mathrm{am}(u)+\sin\mathrm{am}(u+4\omega)+\sin\mathrm{am}(u+8\omega)+\ldots+\sin\mathrm{am}[u+4(n-1)\omega]$$

Cela posé, je remarque qu'on a

$$\sin^2\mathrm{am}(u+a')-\sin^2\mathrm{am}(u+a)=\sin\mathrm{am}(a'-a)\frac{\partial.\sin\mathrm{am}(u+a)\sin\mathrm{am}(u+a')}{\partial u},$$

formule facile à vérifier. Soit $a'=a+b$, $a''=a+2b$, et généralement $a^{(m)}=a+mb$; en mettant successivement a', a''; a''', a''; etc. $a^{(n-1)}$, $a^{(n)}$ au lieu de a, a' et ajoutant, il vient:

$$\sin^2\mathrm{am}(u+a^{(n)})-\sin^2\mathrm{am}(u+a)=\sin\mathrm{am}(b).\frac{\partial\Sigma\sin\mathrm{am}(u+a)\sin\mathrm{am}(u+a')}{\partial u},$$

Or on a en même tems

$$\sin^2\mathrm{am}(u+a^{(n)})-\sin^2\mathrm{am}(u+a)=\sin\mathrm{am}(nb).\frac{\partial\sin\mathrm{am}(u+a)\sin\mathrm{am}(u+a^{(n)})}{\partial u},$$

delà on tire, en intégrant, cette formule remarquable:

$$2)\quad \sin\mathrm{am}(b)\Sigma\sin\mathrm{am}(u+a)\sin\mathrm{am}(u+a')$$
$$=\sin\mathrm{am}(nb)\sin\mathrm{am}(u+a)\sin\mathrm{am}(u+a^{(n)})+\text{const.}$$

Soit $\sin\mathrm{am}(nb)=0$, il vient

$$3)\quad \Sigma\sin\mathrm{am}(u+a)\sin\mathrm{am}(u+a')=\text{const.}$$

Au moyen de cette formule on tire de la formule 1. la suivante

$$\frac{\lambda^2}{\varkappa^2M^2}\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{u}{M},\lambda\right)$$
$$=\sin^2\mathrm{am}(u)+\sin^2\mathrm{am}(u+4\omega)+\ldots.+\sin^2\mathrm{am}[u+4(n-1)\omega]+\text{const.},$$

ou puisqu'on a $\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{u}{M},\lambda\right)=0$, pour $u=0$, celle qui suit,

$$4)\quad \frac{\lambda^2}{\varkappa^2M^2}.\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{u}{M},\lambda\right)$$
$$=\sin^2\mathrm{am}(u)+\sin^2\mathrm{am}(u+4\omega)+\ldots.+\sin^2\mathrm{am}[u+4(n-1)\omega]$$
$$-2\{\sin^2\mathrm{am}\,4\omega+\sin^2\mathrm{am}\,8\omega+\ldots.+\sin^2\mathrm{am}\,2(n-1)\omega\}.$$

Cela donne aussi

$$5)\quad \frac{\lambda^2}{\varkappa^2M^2}\cos^2\mathrm{am}\left(\frac{u}{M},\lambda\right)$$
$$=\cos^2\mathrm{am}(u)+\cos^2\mathrm{am}(u+4\omega)+\ldots.+\cos^2\mathrm{am}[u+4(n-1)\omega]$$
$$-2\{\cos^2\mathrm{co\,am}(4\omega)+\cos^2\mathrm{co\,am}(8\omega)+\ldots.+\cos^2\mathrm{co\,am}\,2(n-1)\omega\},$$

$$6)\quad \frac{1}{M^2}\Delta^2\mathrm{am}\left(\frac{u}{M},\lambda\right)=\Delta^2\mathrm{am}(u)+\Delta^2\mathrm{am}(u+4\omega)+\ldots.+\Delta^2\mathrm{am}[u+4(n-1)\omega]$$
$$+2\{\mathrm{cotg}^2\mathrm{am}(4\omega)+\mathrm{cotg}^2\mathrm{am}(8\omega)+\ldots.+\mathrm{cotg}^2\mathrm{am}\,2(n-1)\omega\}.$$

En intégrant on a, pour la fonction entière de la seconde espèce,

$$7)\quad \frac{E^1(\lambda)}{M^2F^1(\lambda)}-n.\frac{E^1(\varkappa)}{F^1(\varkappa)}=2\{\mathrm{cotg}^2\mathrm{am}(4\omega)+\mathrm{cotg}^2\mathrm{am}(8\omega)+\ldots+\mathrm{cotg}^2\mathrm{am}2)n-1)\omega\}.$$

Soit $\varphi = \mathrm{am}(u)$, si l'on met

$$Z(u) = \frac{F^1 E(\varphi) - E^1 F(\varphi)}{F^1},$$

on tire des formules 6., 7. cette autre qui offre la transformation des intégrales elliptiques indéfinies de la seconde espèce:

$$8)\quad \frac{1}{M} Z\left(\frac{u}{M}, \lambda\right) = Z(u) + Z(n+4\omega) + \ldots + Z[u+4(n-1)\omega],$$

formule qui peut être transformée dans celle-ci:

$$9)\quad nZ(u) - \frac{1}{M} Z\left(\frac{u}{M}, \lambda\right) =$$

$$2\varkappa^2 \sin\mathrm{am}(u)\cos\mathrm{am}(u)\,\Delta\mathrm{am}(u)\,\Sigma \frac{\sin^2\mathrm{am}(2m\omega)}{1-\varkappa^2\sin^2\mathrm{am}(2m\omega)\sin^2\mathrm{am}(u)},$$

où l'on donnera à m toutes les valeurs 1, 2, 3, . . ., $\frac{n-1}{2}$.

Soit $\alpha = \mathrm{am}(a)$, je considère les fonctions elliptiques de la troisième espèce sous la forme:

$$\varkappa^2 \sin\alpha\cos\alpha\,\Delta(\alpha)\int_0^{\varphi} \frac{\sin^2\varphi\,.\,\partial\varphi}{\{1-\varkappa^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi\}\,\Delta(\varphi)} = \Pi(u, a).$$

En introduisant la nouvelle transcendante

$$\sqrt{\left(\frac{2\varkappa' F^1}{\pi}\right)} e^{\int_0^{\varphi} \frac{F^1 E(\varphi) - E^1 F(\varphi)}{F^1 \Delta(\varphi)}} = \Theta(u),$$

on a

$$Z(u) = \frac{\partial\Theta(u)}{\Theta(u)\,\partial u},$$

$$\Pi(u, a) = uZ(a) + \log\sqrt{\frac{\Theta(u-a)}{\Theta(u+a)}}.$$

Cette dernière formule fait voir que les fonctions elliptiques de la troisième espèce, lesquelles dépendent de trois élémens, peuvent être réduites à d'autres transcendantes qui n'en ont que deux. L'intégration de la formule 9. donne les formules générales pour la transformation de le fonction $\Theta(u)$, desquelles on peut déduire celles des fonctions elliptiques de la troisième espèce. Quant à ces dernières, on trouve

$$10)\quad \Pi\left(\frac{u}{M}, \frac{a}{M}, \lambda\right) - n\Pi(u, a, \varkappa)$$

$$= \frac{u}{M} Z\left(\frac{a}{M}, \lambda\right) - nuZ(a, k) + \log\sqrt{\Pi \frac{1-\varkappa^2\sin^2\mathrm{am}(2m\omega)\sin^2\mathrm{am}(u-a)}{1-\varkappa^2\sin^2\mathrm{am}(2m\omega)\sin^2\mathrm{am}(u+a)}},$$

en désignant par Π le produit de tous les facteurs, que l'on obtient en donnant à m les valeurs 1, 2, 3, . . ., $\frac{n-1}{2}$.

On peut aussi parvenir directement de la fonction $\Theta(u)$ aux formules de transformation en partant de son développement en produit infini, comme nous l'avons montré dans le trosième volume de ce journal. De là, en suivant une marche inverse de celle qu'on vient de présenter, on tire sur le champ les formules relatives à la transformation des fonctions elliptiques de la première et de la troisième espèce, et en différentiant, celles de transformation des fonctions elliptiques de la seconde espèce. Tout cela s'applique encore, quelques légères modifications près, au cas où n est un nombre pair.

IV.

Pour exprimer $\sin\mathrm{am}(u, \varkappa)$ par $\sin\mathrm{am}\left(\frac{n}{M}, \lambda\right)$ ou $\sin\mathrm{am}\left(\frac{u}{M}, \lambda\right)$ par $\sin\mathrm{am}(nu)$, il y a à resoudre une équation algébrique du $n^{\text{ième}}$ degré. Nous allons présenter les expressions algébriques et générales de ces racines.

Désignons par $\Phi(u, \omega, \varkappa)$ l'expression suivante:

$$\Pi[1-\varkappa^2\sin^2\mathrm{am}(2m\omega)\sin^2\mathrm{am}\,u],$$

en donnant toujours à m les valeurs $1, 2, 3, \ldots, \frac{n-1}{2}$; soit ω' une quantité telle qu'on ait

$$\varkappa = \lambda^n\{\sin\mathrm{co}\,\mathrm{am}(2\omega', \lambda)\sin\mathrm{co}\,\mathrm{am}(4\omega', \lambda)\ldots.\sin\mathrm{co}\,\mathrm{am}[(n-1)\omega', \lambda]\}^4\ *),$$

soit de plus

$$A_p = \frac{\Phi(4p\omega', \omega', \lambda)\ \Phi\left(\frac{u}{M}, \omega', \lambda\right)}{\Phi\left(\frac{u}{M}+4p\omega', \omega', \lambda\right)},$$

on aura, en désignant par p l'un des nombres $0, 1, 2, 3, \ldots, n-1$:

$$1)\quad \frac{n\varkappa M}{\lambda}\sin\mathrm{am}\left(u+\frac{4p\omega}{n}, \varkappa\right)$$

$$=\sin\mathrm{am}\left(\frac{u}{M}, \lambda\right)+\alpha\sin\mathrm{am}\left(\frac{u}{M}+4\omega', \lambda\right)\sqrt[n]{A_1}+\alpha^2\sin\mathrm{am}\left(\frac{u}{M}+8\omega', \lambda\right)\sqrt[n]{A_2}$$

$$+\ldots.+\alpha^{n-1}\sin\mathrm{am}\left(\frac{u}{M}+4(n-1)\omega', \lambda\right)\sqrt[n]{A_{n-1}},$$

α étant une racine quelconque de l'équation $x^n=1$. En mettant au lieu de α toutes ses valeurs, on aura toutes les racines de l'équation proposée, qui répondent aux différentes valeurs du nombre p. Il faut remarquer encore qu'on a

---

*) Soit $\omega=\frac{mK+m'iK'}{n}$, on aura $\omega'=\frac{\mu K+\mu' iK'}{nM}$, μ, μ' étant des nombres entiers quelconques positifs ou négatifs, tels que $m\mu'-\mu m'=1$.

$$\sqrt[n]{A_m}\sqrt[n]{A_{n-m}} = 1 - \varkappa^2 \sin^2 \mathrm{am}(4p\omega', \lambda) . \sin^2 \mathrm{am}\left(\frac{u}{M}, \lambda\right).$$

On pourra exprimer généralement tous les radicaux $\sqrt[n]{A_1}, \sqrt[n]{A_2}, \ldots, \sqrt[n]{A_{n-1}}$, par les puissances de l'un entre eux.

Ce théorème est un des plus importans, trouvés jusqu'ici dans la théorie des fonctions elliptiques. Il fournit aussi la solution algébrique et générale de l'équation du degré $n\,n$, de laquelle dépend la division de la fonction elliptique en n parties, comme on va le voir dans ce qui suit.

Supposons pour plus de simplicité que n soit un nombre premier *), le nombre de toutes les transformations correspondantes au nombre n sera $n+1$. Ce sont celles qui répondent aux valeurs suivantes de ω:

$$\frac{K}{n}, \frac{iK'}{n}, \frac{iK'}{n} + \frac{K}{n}, \frac{iK'}{n} + \frac{2K}{n}, \ldots., \frac{iK'}{n} + \frac{(n-1)K}{n}.$$

Soient les valeurs de λ et de M qui répondent à ces différentes valeurs de ω:

$$\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots., \lambda_n,$$
$$M, M_1, M_2, M_3, \ldots., M_n,$$

on prouvera aisément la formule remarquable

$$2) \quad \sin \mathrm{am}(nu, \varkappa)$$
$$= \frac{\lambda}{n\varkappa M} \sin \mathrm{am}\left(\frac{u}{M}, \lambda\right) + \frac{\lambda_1}{n\varkappa M_1} \sin \mathrm{am}\left(\frac{u}{M_1}, \lambda_1\right) + \frac{\lambda_2}{n\varkappa M_2} \sin \mathrm{am}\left(\frac{u}{M_2}, \lambda_2\right) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{\lambda_n}{n\varkappa M_n} \sin \mathrm{am}\left(\frac{u}{M_n}, \lambda_n\right).$$

En changeant dans la formule (1.) u en $\frac{u}{M_p}$, $\varkappa$ en λ_p, λ_p en $\varkappa$, M_p en $\frac{1}{n M_p}$, $\frac{u}{M_p}$ en nu, on parviendra à exprimer toutes les quantités

$$\frac{\lambda_p}{n\varkappa M_p} . \sin \mathrm{am}\left(\frac{u}{M_p}, \lambda_p\right) \text{ par } \sin \mathrm{am}(nu, \varkappa).$$

Soit

$$\frac{\Phi(4p\omega, \omega)\,\Phi(nu, \omega)}{\Phi(nu + 4p\omega, \omega)} = B_p,$$

et désignons par B_p, B_p', B_p'', B_p''', . . ., $B_p^{(n)}$ les valeurs de B_p qui répondent aux différentes valeurs de ω, et par ω, ω_1, ω_2, ω_3, . . ., ω_n les différentes valeurs de ω, on a:

---

*) Il n'y a qu'à faire de légères modifications dans le cas où n est un nombre composé.

$$3)\quad n \sin\mathrm{am}\left(u+\frac{4mK+4m'iK'}{n}\right) = \sin\mathrm{am}(nu)$$
$$+\alpha \sin\mathrm{am}(nu+4\omega)\sqrt[n]{B_1} +\ldots.+\alpha^{n-1}\sin\mathrm{am}[nu+4(n-1)\omega]\sqrt[n]{B^{n-1}}$$
$$+\beta \sin\mathrm{am}(nu+4\omega_1)\sqrt[n]{B'_1} +\ldots.+\beta^{n-1}\sin\mathrm{am}[nu+4(n-1)\omega_1]\sqrt[n]{B'_{n-1}}$$
$$+\alpha\beta \sin\mathrm{am}(nu+4\omega_2)\sqrt[n]{B''_1} +\ldots.+\alpha^{n-1}\beta^{n-1}\sin\mathrm{am}[nu+4(n-1)\omega_2]\sqrt[n]{B''_{n-1}}$$
$$+\alpha^2\beta \sin\mathrm{am}(nu+4\omega_3)\sqrt[n]{B'''_1} +\ldots.+\alpha^{2(n-1)}\beta^{n-1}\sin\mathrm{am}[nu+4(n-1)\omega_3]\sqrt[n]{B'''_{n-1}}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+\alpha^{n-1}\beta \sin\mathrm{am}(nu+4\omega_n)\sqrt[n]{B_1^{(n)}} +\ldots.+\alpha^{(n-1)^2}\beta^{n-1}\sin\mathrm{am}[nu+4(n-1)\omega_n]\sqrt[n]{B_{n-1}^{(n)}};$$

m et m' étant des nombres entiers quelconques, et α, β des racines de l'équation $x^n=1$. En donnant à α, β toutes les valeurs dont elles sont susceptibles, on aura les valeurs différentes de l'expression $\sin\mathrm{am}\left(u+\frac{4(mK+m'iK')}{n}\right)$, qui sont au nombre de nn. Ce sont les nn racines de l'équation à résoudre, presentées sous la forme la plus simple, telle que je l'avais présentée dans le troisième vol. de ce journal (cah. 1.). Je remarque encore que l'on peut exprimer tous les radicaux, qui sont au nombre $nn-1$, par les puissances de deux quelconques entre eux qui ne se trouvent pas dans la même série horizontale.

V.

Puisqu'on peut exprimer rationellement $\sin\mathrm{am}\left(\frac{u}{M},\lambda\right)$, $\sin\mathrm{am}\left(\frac{u}{M_1},\lambda_1\right)$, ..., $\sin\mathrm{am}\left(\frac{u}{M_n},\lambda_n\right)$ par $\sin\mathrm{am}(u,\varkappa)$, on pourra aussi exprimer les premières quantités par une quelconque entr'elles; mais pour cela il y a à résoudre une équation algébrique du $n^{\text{ième}}$ degré dans chaque cas. Nous allons rapporter dans ce qui suit les expressions générales et algébriques des racines des ces équations.

En conservant les notations du numéro précédent, soit

$$C_p = \frac{\Phi\left(\frac{u}{M}+4p\omega',\omega',\lambda\right)}{\Phi\left(\frac{u}{M},\omega',\lambda\right)},$$

on aura

$$1)\quad \sqrt{\left(\frac{\lambda_m}{\lambda}\right)}\sin\mathrm{am}\left(\frac{u}{M_m},\lambda_m\right) =$$
$$\frac{\sin\mathrm{am}\left(\frac{u}{M},\lambda\right)+\alpha\sin\mathrm{am}\left(\frac{u}{M}+4\omega',\lambda\right)\sqrt[n]{C_1}+\alpha^4\sin\mathrm{am}\left(\frac{u}{M}+8\omega',\lambda\right)\sqrt[n]{C_2}+\ldots}{+\alpha^{(n-1)^2}\sin\mathrm{am}\left(\frac{u}{M}+4(n-1)\omega',\lambda\right)\sqrt[n]{C_{n-1}}}$$
$$\overline{1+\alpha\sqrt[n]{C_1}+\alpha^4\sqrt[n]{C_2}+\alpha^9\sqrt[n]{C_3}+\ldots.+\alpha^{(n-1)^2}\sqrt[n]{C_{n-1}}},$$

α étant une racine quelconque de l'équation $x^n = 1$. En donnant à α toutes ses valeurs, on aura les n expressions qui répondent aux différens modules $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Chaque expression, telle que

$$\sqrt{\left(\frac{\lambda_m}{\lambda}\right)} \sin\mathrm{am}\left(\frac{u}{M_m}, \lambda_m\right),$$

étant donnée par la résolution d'une équation algébrique du $n^{\text{ième}}$ degré dont les racines ont pour expression générale

$$\sqrt{\left(\frac{\lambda_m}{\lambda}\right)} \sin\mathrm{am}\left(\frac{u}{M_m} + 4p\omega'_m, \lambda_m\right),$$

ω'_m étant la même chose par rapport au module λ_m que ω' l'est par rapport à λ_m: on aura les expressions algébriques de toutes ces racines, qui sont au nombre n et qui répondent à un même module λ_m, en multipliant les radicaux par $\alpha^{pp}\beta^p$ au lieu de α^{pp}, β étant encore une racine quelconque de l'équation $x^n = 1$. On pourra aussi exprimer tous les radicaux par les puissances d'un entre eux. Du reste, ayant supposé que n est un nombre premier, la formule 1. aura à subir quelques modifications lorsque n est un nombre quelconque.

VI.

Je termine ces remarques par l'enoncé du théorème suivant, fourni par les mêmes méthodes qui m'ont conduit aux résultats précédens.

„Etant supposés connus tous les modules dans lesquels on peut transformer un module donné $\varkappa$ à l'aide d'une transformation correspondante au nombre n, on peut exprimer par ces modules toutes les quantités de la forme $\sin\mathrm{am}\frac{2mK + 2m'iK'}{n}$, m, m' étant des nombres quelconques, sans qu'il étoit nécessaire de résoudre une équation algébrique."

Les résultats dont je viens de donner ici une exposition rapide, font partie de ceux qu'on trouvera dans la seconde partie de mon ouvrage sur les fonctions elliptiques (*Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum*). La première partie de cet ouvrage paroitra incessament *).

*) Elle se vendra à Paris chez Mr. Ponthieu et Comp., Palais royal, Gallérie de Bois No. 252.

Königsberg, le 11. Janvier 1829.

13.
Théorèmes sur les fonctions elliptiques.

(Par Mr. *N. H. Abel.*)

La formule donnée par Mr. Jacobi dans le tome III. pag. 86. de ce journal peut être établie facilement à l'aide d'un théorème que nous allons démontrer dans ce qui suit.

En faisant $\varphi\theta = x$, on aura, en vertu de ce qu'on a vu dans le §. III. du mémoire No. 12. tome 2. de ce journal p. 117.,

$$1. \quad \Phi(2n+1)\theta = R,$$

où R est une fonction rationnelle de x, le numérateur étant du degré $(2n+1)^2$ et le dénominateur du degré $(2n+1)^2 - 1$. L'équation (1.) est donc du degré $(2n+1)^2$ et ses racines peuvent être exprimées par la formule:

$$2. \quad x = \varphi\left(\theta + \frac{2m\omega + 2\mu\varpi i}{2n+1}\right),$$

en donnant à m et μ toutes les valeurs entières depuis zéro jusqu'à $2n$ incl.

Soit pour abréger

$$3. \quad \frac{2\omega}{2n+1} = \alpha, \quad \frac{2\varpi i}{2n+1} = \beta,$$

l'expression des racines sera:

$$4. \quad x = \varphi(\theta + m\alpha + \mu\beta).$$

Celà posé, nous allons démontrer le théorème suivant:

Théorème 1. Soit $\psi\theta$ une fonction entière quelconque de la quantité $\varphi(\theta + m\alpha + \mu\beta)$ qui reste la même en changeant θ en $\theta + \alpha$ et en $\theta + \beta$. Soit ν le plus grand exposans de la quantité $\varphi\theta$ dans la fonction $\psi\theta$, on aura toujours

$$5. \quad \psi\theta = p + q.f(2n+1)\theta.F(2n+1)\theta$$

où p et q sont deux fonctions entières de $\varphi(2n+1)\theta$, la première du degré ν et la seconde du degré $\nu - 2$.

Démonstration. En vertu de la formule (10.) tome 2. pag. 105. on a

$$\varphi(\theta + m\alpha + \mu\beta) = \frac{\varphi\theta.f(m\alpha+\mu\beta).F(m\alpha+\mu\beta) + \varphi(m\alpha+\mu\beta).f\theta.F\theta}{1 + e^2c^2.\varphi^2(m\alpha+\mu\beta).\varphi^2\theta}.$$

Cela fait voir que $\psi\theta$ pourra s'exprimer rationnellement en $\varphi\theta$ et $f\theta.F\theta$.

Or le carré de $f\theta.F\theta$ est rationnel en $\varphi\theta$, savoir

$$(f\theta.F\theta)^2 = (1-c^2\varphi^2\theta)(1+e^2\varphi^2\theta),$$

donc on pourra faire en sorte que l'expression de $\psi\theta$ ne contienne la quantité $f\theta.F\theta$ qu'à la première puissance. On pourra donc faire

$$7.\quad \psi\theta = \psi_1\{\varphi\theta\} + \psi_2\{\varphi\theta\}.f\theta.F\theta,$$

où $\psi_1\{\varphi\theta\}$ et $\psi_2\{\varphi\theta\}$ sont des fonctions rationnelles de $\varphi\theta$.

Si l'on met $\omega-\theta$ à la place de θ, on aura, en remarquant que $\varphi(\omega-\theta)=\varphi\theta$, $f(\omega-\theta)=-f\theta$, $F(\omega-\theta)=F\theta$:

$$8.\quad \psi(\omega-\theta) = \psi_1\{\varphi\theta\} - \psi_2\{\varphi\theta\}.f\theta.F\theta.$$

Des équations (7. et 8.) on tire:

$$9.\quad \psi_1\{\varphi\theta\} = \tfrac{1}{2}.\{\psi\theta+\psi(\omega-\theta)\},$$

$$10.\quad \psi_2\{\varphi\theta\}.f\theta.F\theta = \tfrac{1}{2}.\{\psi\theta-\psi(\omega-\theta)\}.$$

Considérons d'abord la fonction $\psi_1\{\varphi\theta\}$. En y mettant $\theta+\alpha$ au lieu de θ, il viendra:

$$\psi_1\{\varphi(\theta+\alpha)\} = \tfrac{1}{2}.\{\psi(\theta+\alpha)+\psi(\omega-\alpha-\theta)\};$$

or on a $\psi(\theta+\alpha)=\psi\theta$, et par conséquent aussi, en mettant $\omega-\alpha-\theta$ au lieu de θ:

$$\psi(\omega-\theta) = \psi(\omega-\alpha-\theta);$$

donc

$$\psi_1\{\varphi(\theta+\alpha)\} = \tfrac{1}{2}\{\psi\theta+\psi(\omega-\theta)\},$$

c'est-à-dire

$$\psi_1\{\varphi(\theta+\alpha)\} = \psi_1(\varphi\theta\}.$$

On aura de la même manière:

$$\psi_1\{\varphi(\theta+\beta)\} = \psi_1\{\varphi\theta\}.$$

La première de ces équations donne, en mettant successivement $\theta+\alpha$, $\theta+2\alpha$, ... au lieu de θ:

$$11.\quad \psi_1\{\varphi(\theta+m\alpha)\} = \psi_1\{\varphi\theta\},$$

où m est un nombre entier quelconque.

La seconde équation donne également

$$\psi_1\{\varphi(\theta+\mu\beta)\} = \psi_1\{\varphi\theta\},$$

d'où, en mettant $\theta+m\alpha$ au lieu de θ, et ayant égard à l'équation (11.) on tire:

$$12.\quad \psi_1\{\varphi(\theta+m\alpha+\mu\beta)\} = \psi_1\{\varphi\theta\}.$$

Donc la fonction $\psi_1\{\varphi\theta\}$ reste la même, en y substituant au lieu de $\varphi\theta$ une autre racine quelconque de l'équation (1.). En attribuant à m et μ toutes les valeurs entières depuis zéro jusqu'à $2n$ et puis ajoutant, la formule (12.) donne:

$$13.\quad \psi_1\{\varphi\theta\} = \frac{1}{(2n+1)^2}\cdot\sum_{\circ}^{2n}{}_m\sum_{\circ}^{2n}{}_\mu\psi_1\cdot\{\varphi(\theta+m\alpha+\mu\beta)\}.$$

Le second membre de cette équation est une fonction rationnelle et symétrique des racines de l'équation (1.), donc on pourra l'exprimer rationnellement par les coëfficiens de cette équation, c'est-à-dire en $\varphi(2n+1)\theta$. Soit

$$\psi_1\{\varphi\theta\} = p,$$

la quantité p sera une fonction rationnelle de $\varphi(2n+1)\theta$. Or je dis que p sera toujours entier. En effet soit $\varphi(2n+1)\theta = y$ et $p = \frac{p'}{q'}$, où p' et q' sont des fonctions entières de y sans diviseur commun. Soit $y = \varphi(2n+1)\delta$ une racine de l'équation $q'=0$: la quantité $p = \frac{1}{2}\{\varphi\theta+\psi(\omega-\theta)\}$ sera infinie en faisant $\theta = \delta$, donc on aura $\psi\delta+\psi(\omega-\delta) = \frac{1}{\circ}$; maintenant il est évident par la forme de la fonction $\psi\theta$, que cette équation ne peut subsister à moins qu'une quantité de la forme

$$\varphi(\delta+m\alpha+\mu\beta) \text{ ou } \varphi(\omega-\delta+m\alpha+\mu\beta)$$

n'ait une valeur infinie. Soit donc $\varphi(\delta+m\alpha+\mu\beta) = \frac{1}{\circ}$, on aura en vertu de l'équation 30. tome 2, pag. 113:

$$\delta = (m'+\tfrac{1}{2})\omega + (n'+\tfrac{1}{2})\varpi i - m\alpha - \mu\beta,$$

où m' et n' sont des nombres entiers; or cette valeur de δ donne:

$$\varphi(2n+1)\delta = \varphi\left\{[(2n+1)m'+n-2m]\omega + [(2n+1)n'+n-2\mu]\varpi i + \frac{\omega}{2} + \frac{\varpi}{2}i\right\},$$

c'est-à-dire (26. pag. 111.):

$$\varphi(2n+1)\delta = \tfrac{1}{\circ}.$$

Mais cela est impossible, car une racine quelconque de l'équation $q'=0$ doit être finie. On trouvera également que $\varphi(\omega-\delta+m\alpha+\mu\beta)$ donne $\varphi(2n+1)\delta = \frac{1}{\circ}$. La quantité p est donc une fonction entière de $\varphi(2n+1)\theta$.

Considérons maintenant l'équation (10.). En divisant les deux membres par $f(2n+1)\theta.F(2n+1)\theta$, on aura:

$$\frac{\psi_2\{\varphi\theta\}.f\theta.F\theta}{f(2n+1)\theta.F(2n+1)\theta} = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{\psi\theta-\psi(\omega-\theta)}{f(2n+1)\theta.F(2n+1)\theta}.$$

En vertu de ce qu'on a vu tome 2. 45. pag. 117, on aura $f(2n+1)\theta = f\theta.u$, $F(2n+1)\theta = F\theta.v$, où u et v sont des fonctions rationnelles de $\varphi\theta$; donc le second membre de l'équation précédente sera une fonction rationnelle de $\varphi\theta$. En la désignant par $\chi\{\varphi\theta\}$, on aura:

$$\chi\{\varphi\theta\} = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{\psi\theta-\psi(\omega-\theta)}{f(2n+1)\theta.F(2n+1)\theta}.$$

En mettant $\theta+\alpha$ au lieu de θ, il viendra $\psi(\theta+\alpha=\psi\theta$, $\psi[\omega-(\theta+\alpha)]=\psi(\omega-\theta)$,

$$f(2n+1)(\theta+\alpha)=f[(2n+1)\theta+2m\omega+2\mu\varpi i]=f(2n+1)\theta,$$
$$F(2n+1)(\theta+\alpha)=F[(2n+1)\theta+2m\omega+2\mu\varpi i]=F(2n+1)\theta,$$

donc on aura

$$\chi\{\varphi(\theta+\alpha)\}=\chi(\varphi\theta).$$

De la même manière on trouvera

$$\chi\{\varphi(\theta+\beta)\}=\chi(\varphi\theta).$$

On en tire, comme plus haut, à l'égard de la fonction $\psi_1(\varphi\theta)$, que $\chi(\varphi\theta)$ peut être exprimé par une fonction entière de $\varphi(2n+1)\theta$. Soit donc

$$\chi(\varphi\theta)=q,$$

on aura:

$$\psi_2(\varphi\theta).f\theta.F\theta=q.f(2n+1)\theta.F(2n+1)\theta,$$

et enfin:

$$14.\quad \psi\theta=p+q.f(2n+1)\theta.F(2n+1)\theta,$$

où p et q sont des fonctions entières de $\varphi(2n+1)\theta$.

Pour trouver les degrés de ces fonctions, soit $(\varphi\theta)^\nu.\chi\theta$ le terme de $\psi\theta$, dans lequel $\varphi\theta$ est élevé à la plus haute puissance, on aura, en supposant $\varphi\theta$ infini:

$$\psi\theta=A.(\varphi\theta)^\nu,$$

où A est une constante. De même on aura

$$\psi(\omega-\theta)=A'.(\varphi\theta)^\nu,$$

et par suite:

$$p=\tfrac{1}{2}(A+A').(\varphi\theta)^\nu;$$

mais pour $\varphi\theta$ infini, on a $\varphi(2n+1)\theta=B.\varphi\theta$, où B est une constante. Il suit de là que p sera du degré ν par rapport à $\varphi(2n+1)\theta$. On démontrera de la même manière que la fonction q sera du degré $\nu-2$, tout au plus.

Voilà demontré notre théorème.

Dans le cas où la quantité $\varphi\theta$ ne monte qu'à la première puissance dans $\psi\theta$, on a $\nu=1$; par conséquent q sera du degré -1, c'est-à-dire $q=0$. Donc on a dans ce cas

$$15.\quad \psi\theta=A+B.\varphi(2n+1)\theta,$$

où A et B sont des quantités constantes, qu'on trouvera facilement en faisant $\theta=0$ et $\varphi\theta=\frac{1}{0}$.

Soit par exemple $\pi\theta$ le produit d'un nombre quelconque des racines de l'équation (1.), et faisons

$$\psi\theta = \sum_{0}^{2n}{}_m \sum_{0}^{2n}{}_\mu \pi(\theta + m\alpha + \mu\beta),$$

il est clair qu'on aura $\psi(\theta) = \psi(\theta+\alpha) = \psi(\theta+\beta)$, en remarquant que

$$\pi[\theta + (2n+1)\alpha + \mu\beta] = \pi(\theta + \mu\beta)$$

et

$$\pi[\theta + (2n+1)\beta + m\alpha] = \pi(\theta + m\alpha).$$

Donc:

$$16.\quad \sum_{0}^{2n}{}_m \sum_{0}^{2n}{}_\mu \pi(\theta + m\alpha + \mu\beta) = A + B.\varphi(2n+1)\theta.$$

Il faut remarquer que l'une des quantités A et B est toujours égale à zéro. On a $A = 0$, si le nombre des facteurs de $\pi\theta$ est un nombre impair, et $B = 0$, si ce nombre est pair. Donc la quantité $\psi\theta$ est indépendante de la valeur de θ. Dans ce dernier cas, par conséquent, en faisant, $\theta = 0$ on a:

$$17.\quad \sum_{0}^{2n}{}_m \sum_{0}^{2n}{}_\mu \pi(\theta + m\alpha + \mu\beta) = \sum_{0}^{2n}{}_m \sum_{0}^{2n}{}_\mu \pi(m\alpha + \mu\beta).$$

Donc en faisant

$$\pi\theta = \varphi\theta.\varphi(\theta + k\alpha + k'\beta),$$

on a:

$$18.\quad \begin{cases} \sum_{0}^{2n}{}_m \sum_{0}^{2n}{}_\mu \varphi(\theta + m\alpha + \mu\beta).\varphi[\theta + (m+k)\alpha + (\mu+k')\beta] \\ = \sum_{0}^{2n}{}_m \sum_{0}^{2n}{}_\mu \varphi(m\alpha + \mu\beta).\varphi[(m+k)\alpha + (\mu+k')\beta], \end{cases}$$

où k et k' sont des nombres entiers quelconques, moindres que $2n+1$. Cependant on ne peut pas supposer à la fois $k = 0$, $k' = 0$. Car cela donne $\pi\theta = (\varphi\theta)^2$ et par suite $\nu = 2$, tandis qu'on doit avoir

$$\nu = 1.$$

De la même manière que nous avons demontré le théorème précédent on pourra encore établir les deux suivans:

Théorème II. Soit $\psi\theta$ une fonction quelconque entière des quantités de la forme $f(\theta + m\alpha + \mu\beta)$, telle que

$$\psi\theta = \psi(\theta+\alpha) = \psi(\theta+\beta),$$

on aura:

$$\psi\theta = p + q.\varphi(2n+1)\theta.F(2n+1)\theta,$$

où p et q sont des fonctions entières de $f(2n+1)\theta$, la première du degré ν et la seconde du degré $\nu-2$, tout au plus, en désignant par ν le plus grand exposant de $f\theta$ dans $\psi\theta$.

Théorème III. Soit $\psi\theta$ une fonction quelconque entière des quantités de la forme $F(\theta + m\alpha + \mu\beta)$, telle que

$$\psi(\theta) = \psi(\theta+\alpha) = \psi(\theta+\beta),$$

on aura

$$\psi\theta = p + q.\varphi(2n+1)\theta.f(2n+1)\theta,$$

où p et q sont des fonctions entières de $F(2n+1)\theta$, la première du degré ν et la seconde du degré $\nu-2$, tout au plus, en désignant par ν le plus grand exposant de $F\theta$ dans $\psi\theta$.

En vertu du premier théorème on voit sans difficulté que la valeur de $\varphi\left(\frac{\theta}{2n+1}\right)$, exprimée en fonction de $\varphi\theta$, sera:

$$\varphi\left(\frac{\theta}{2n+1}\right) = \frac{1}{2n+1}\cdot\left\{\sum_{0}^{4n^2+4n}{}_m \sqrt[2n+1]{(p_m + q_m.F\theta.f\theta)}\right\},$$

où p_m et q_m sont deux fonctions entières de $\varphi\theta$, la première impaire et du degré $2n+1$, la seconde paire et du degré $2n-2$. D'ailleurs ces fonctions sont déterminées par l'équation

$$p_m^2 - q_m^2(f\theta)^2.(F\theta)^2 = (\varphi^2\theta - a_m^2)^{2n+1},$$

où a_m est une constante.

Christiania, le 27. Août 1828.

14.

Démonstration d'une propriété générale d'une certaine classe de fonctions transcendentes.

(Par Mr. *N. H. Abel.*)

Théorème. Soit y une fonction de x qui satisfait à une équation quelconque irréductible de la forme:

$$1. \quad 0 = p_0 + p_1 \cdot y + p_2 \cdot y^2 + \ldots + p_{n-1} \cdot y^{n-1} + y^n,$$

où $p_0, p_1, p_2, \ldots p_{n-1}$ sont des fonctions entières de la variable x. Soit

$$2. \quad 0 = q_0 + q_1 \cdot y + q_2 \cdot y^2 + \ldots + q_{n-1} \cdot y^{n-1},$$

une équation semblable, $q_0, q_1, q_2, \ldots q_{n-1}$ étant également des fonctions entières de x, et supposons variables les coëfficiens des diverses puissances de x dans ces fonctions. Nous désignerons ces coëfficiens par a, a', a'', ... En vertu des deux équations (1.) et (2.) x sera fonction de a, a', a'', ... et on en déterminera les valeurs en éliminant la quantité y. Désignons par:

$$3. \quad \varrho = 0$$

le résultat de l'élimination, en sorte que ϱ ne contiendra que les variables x, a, a', a'', ... Soit μ le degré de cette équation par rapport à x, et désignons par

$$4. \quad x_1, x_2, x_3, \ldots x_\mu$$

ses μ racines, qui seront autant de fonctions de a, a', a'', ... Cela posé, si l'on fait

$$5. \quad \psi x = \int f(x, y) . \partial x$$

où $f(x, y)$ désigne une fonction rationnelle quelconque de x et de y, je dis, que la fonction transcendente ψx jouira de la propriété générale exprimée par l'équation suivante:

$$6. \quad \psi x_1 + \psi x_2 + \ldots + \psi x_\mu = u + k_1 \log v_1 + k_2 \log v_2 + \ldots + k_n \log v_n,$$

$u, v_1, v_2, \ldots v_n$ étant des fonctions rationnelles de a, a', a'', ..., et $k_1, k_2, \ldots k_n$ des constantes.

Démonstration. Pour prouver ce théorème il suffit d'exprimer la différentielle du premier membre de l'équation (6.) en fonction de a, a', a'', ...; car il se réduira par la à une différentielle ration-

nelle, comme on le verra. D'abord les deux équations (1.) et (2.) donneront y en fonction rationnelle de x, a, a', a'', ... De même l'équation (3.): $\varrho = 0$ donnera pour ∂x une expression de la forme:

$$\partial x = \alpha . \partial a + \alpha' . \partial a' + \alpha'' . \partial a'' + \ldots .,$$

où α, α', α'', ... sont des fonctions rationnelles de x, a, a', a'', ... De là il suit que la différentielle $f(x, y) . \partial x$ pourra être mise sous la forme:

$$f(x, y) \partial x = \varphi x . \partial a + \varphi_1 x . \partial a' + \varphi_2 x . \partial a'' + \ldots .,$$

où φx, $\varphi_1 x$, ... sont des fonctions rationnelles de x, a, a', a'', ... En intégrant, il viendra:

$$\psi x = \int \{\varphi x . \partial a + \varphi_1 x . \partial a' + \ldots .\}$$

et de là on tire, en remarquant que cette équation aura lieu en mettant pour x les μ valeurs de cette quantité:

$$7. \quad \psi x_1 + \psi x_2 + \ldots . + \psi x_\mu$$
$$= \int [\{\varphi x_1 + \varphi x_2 + \ldots . + \varphi x_\mu\} \partial a + \{\varphi_1 x_1 + \varphi_1 x_2 + \ldots . + \varphi_1 x_\mu\} \partial a' + \ldots .]$$

Dans cette équation les coëfficiens des différentielles ∂a, $\partial a'$, ... sont des fonctions rationnelles de a, a', a'', ... et de x_1, x_2, ... x_μ, mais d'ailleurs ils sont symétriques par rapport à x_1, x_2, ... x_μ; donc, en vertu d'un théorème connu, on pourra exprimer ces fonctions rationnellement par a, a', a'', ... et par les coëfficiens de l'équation $\varrho = 0$; mais ceux-ci sont eux-mêmes des fonctions rationnelles des variables a, a', a'', ..., donc enfin les coëfficiens de ∂a, $\partial a'$, $\partial a''$, ... de l'équation (7.) le seront également. Donc, en intégrant, on aura une équation de la forme (6.).

Je me propose de développer dans une autre occasion des nombreuses applications de ce théorème, qui jetteront un grand jour sur la nature des fonctions transcendentes dont il s'agit.

Christiania, le 6. Janvier 1829.

15.
Ueber die Theorie der Schraube.

(Vom Herrn Prof. Dr. *Lehmus* zu Berlin.)

Gegen diese einfache Theorie, wie sie gewöhnlich vorgetragen wird, sind einige Erinnerungen zu machen. Der gewöhnliche Vortrag ist folgender:

Wenn auf einer schiefen Ebene, welche unter dem Winkel α gegen den Horizont geneigt ist, ein Gewicht Q liegt, die Kraft P aber horizontal auf Erhebung von Q wirkt, und μ den Reibungs-Coëfficienten bezeichnet, so ist

$$P = \frac{\text{tang}\,\alpha + \mu}{1 - \mu\,\text{tang}\,\alpha} \cdot Q.$$

Wirkt nun bei einer Schraube mit lothrechter Spindel, deren Gewicht, nebst der daran hängenden Last, $= Q$ ist, die Kraft R horizontal in der Entfernung b von der lothrechten Achse, und bezeichnet α den Winkel der Schrauben-Gänge gegen den Horizont, r den mittleren Halbmesser der Spindel und h die Höhe jedes Schraubengangs, so wäre die in der Peripherie $2r\pi$ tangential thätige Kraft p nach obiger Formel:

$$= \frac{\text{tang}\,\alpha + \mu}{1 - \mu\,\text{tang}\,\alpha} \cdot Q,$$

oder

$$p = \frac{h + \mu . 2r\pi}{2r\pi - \mu h} \cdot Q,$$

und folglich, wenn dieselbe auf den Hebelsarm b reducirt wird:

$$R = \frac{pr}{b},$$

oder

$$R = \frac{r}{b} \cdot \frac{h + \mu . 2r\pi}{2r\pi - \mu h} \cdot Q.$$

Dieser Formel liegt aber, obgleich etwas versteckt, folgende, wie es scheint, irrige Ansicht zum Grunde.

Reducirt man nemlich die in der Entfernung b erforderliche Kraft R in die Entfernung r, so hat man $\frac{Rb}{r}$, und aus dieser horizontalen Thätigkeit entspringen die Kräfte $\frac{Rb}{r}\cos\alpha$ und $\frac{Rb}{r}\sin\alpha$, erstere parallel mit der

Schraubenlinie, letztere normal darauf, und eben so zerlegt sich Q in $Q\sin\alpha$ und $Q\cos\alpha$. Die Normal-Pressung, welche Reibung erzeugt, is daher $= \frac{Rb}{r}\sin\alpha + Q\cos\alpha$, und die Bedingungsgleichung also

$$\frac{Rb}{r}\cos\alpha = Q\sin\alpha + \mu\left[\frac{Rb}{r}\sin\alpha + Q\cos\alpha\right],$$

woraus wie oben:

$$R = \frac{r}{b}.\frac{h+\mu.2r\pi}{2r\pi-\mu h}.Q$$

folgt.

Das Unrichtige dieser Vorstellung besteht nun darin, dafs der aus R entspringende, Reibung erzeugende Normaldruck $= \frac{Rb}{r}\sin\alpha$ gesetzt wurde, obgleich derselbe nur der wirklich vorhandenen Kraft R, nicht der blofs thätig gedachten $\frac{Rb}{r}$ entsprechen kann, also nur die Gröfse $R\sin\alpha$ hat. Bringt man daher, wie gehörig, diese in Rechnung, so ist die Gleichung:

$$\frac{Rb}{r}\cos\alpha = Q\sin\alpha + \mu\,[R\sin\alpha + Q\cos\alpha],$$

und hieraus folgt:

$$R = \frac{h+\mu.2r\pi}{2b\pi-\mu h}Q,$$

welches die genauere, auch in meinem Lehrbuch der angewandten Mathematik, 2ter Band, Berlin 1818, gegebene Formel ist.

Bequemer ist übrigens folgende Herleitung:
Die Kräfte, welche einander das Gleichgewicht halten sollen, sind:

$$R;\ Q \text{ und } \mu[R\sin\alpha + Q\cos\alpha],$$

und die ihnen zugehörigen gleichzeitigen Wege:

$$2b\pi;\ -h \text{ und } -2r\pi\sec\alpha;$$

folglich die Gleichung:

$$R.2b\pi - Qh - \mu[R\sin\alpha + Q\cos\alpha]\,2r\pi\sec\alpha = 0,$$

woraus sich ebenfalls

$$R = \frac{h+\mu.2r\pi}{2b\pi-\mu h}.Q$$

ergiebt.

16.
Aufgaben.

(Von Herrn *Th. Clausen* zu München.)

1. Sei

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4.5.6.x} + \frac{1}{6.7.8.9.10.x^2} - \frac{1}{8.9.10.11.12.13.14.x^3} + \ldots.$$
$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{f(1)}{x}\right).\left(1 - \frac{f(2)}{x}\right).\left(1 - \frac{f(3)}{x}\right)\ldots.$$

Man sucht die Function $f(x)$, die der obigen Gleichung Genüge thut.

2. Man nehme zwei beliebige positive Gröfsen a und b; sei

$$a' = \sqrt[m+n]{(a^m b^n)}, \qquad b' = \frac{ma+nb}{m+n},$$
$$a'' = \sqrt[m+n]{(a'^m b'^n)}, \qquad b'' = \frac{ma'+nb'}{m+n},$$
$$a''' = \sqrt[m+n]{(a''^m b''^n)}, \quad b''' = \frac{ma''+nb''}{m+n},$$

etc.

man verlangt den Werth $a^{(\infty)} = b^{(\infty)}$ im algebraischen Ausdrucke.

(Von Herrn *W. Horn* zu Burg.)

3. An einer gegebenen beliebigen Curve, zwischen zwei gegebenen Tangenten, n Tangenten so zu ziehen, dafs die Dreiecke, welche von je zwei zunächst auf einander folgenden Tangenten und der Verbindungslinie ihrer Berührungspuncte begrenzt werden, Kreise von gleicher Gröfse umschliefsen.

17.

Über die bei verschiedenen Völkern üblichen Systeme von Zahlzeichen und über den Ursprung des Stellenwerthes in den indischen Zahlen.

(Vorgelesen in einer Klassen-Sitzung der Königl. Academie der Wissenschaften zu Berlin, den 2. März 1829.)

(Von Sr. Excellenz dem Königl. wirkl. Geheimen-Rathe, Herrn Freiherrn *Alex. von Humboldt.*)

Man hat sich bisher, in den Untersuchungen über die numerischen Zeichen (den einzigen Hieroglyphen, welche sich bei den Völkern des Alten Continents neben der Tonzergliedernden Buchstaben-Schrift erhalten haben,) ernster mit der characteristischen Physiognomik der Zeichen und ihrer individuellen Gestaltung, als mit dem Geist der Methoden beschäftiget, durch welche es dem menschlichen Scharfsinne geglückt ist, Gröfsen mit mehr oder weniger Einfachheit auszudrücken. Der Gang der Untersuchung ist hier fast eben so einseitig, als in den Sprachen gewesen, die lange Zeit hindurch mehr nach der Frequenz gewisser Töne und Endungen, nach der Gestalt der Wurzeln, als nach dem organischen Bau ihrer Grammatik verglichen worden sind. Ich bin seit mehreren Jahren anhaltend und mit besonderer Vorliebe bemüht gewesen, die bei verschiedenen Völkern alter und neuerer Zeit üblichen Systeme von Zahlzeichen unter einen allgemeinen Gesichtspunct zu stellen. Die Kenntnifs gewisser Ziffern bei den Azteken (Mexikanern) und bei den Muyscas *) (den Bewohnern der Hoch-Ebene von Cundinamarca), die ich von meiner Reise zurückgebracht habe; Thomas Young's Entdeckung der ägyptischen Zahlzeichen, die (wie wir jetzt wissen) nicht alle durch Nebeneinanderstellung (*juxtaposition*) das Vielfache der Gruppen aus-

*) Ueber die Meinung, dafs die Zahlzeichen der Muyscas (zugleich Hieroglyphen der Monddtage des zunehmenden Alters des Mondes) mit dem sich nach den verschiedenen Phasen allmälig entwickelnden Mondgesichte zusammenhängen, siehe Humboldt, *Vues des Cord. et Monumens des peuples indigènes de l'Amérique T. II. pag.* 237 — 243. *Pl. XLIV.*

drücken; die so wenig beachtete arabische Gobar (Staub)-Schrift, welche Silvestre de Sacy in einem Pariser Manuscript auffand; die Vergleichung, welche ich zwischen dieser Bezeichnungsart und den mexicanischen und chinesischen Zahlzeichen anstellte; die durch viele in Indien erschienene Sprachlehren erlangte Gewifsheit, dafs diesseits und jenseits des Ganges nicht blofs ganz verschieden gestaltete Ziffern und Buchstaben-Zahlen, sondern auch ganz verschiedene Zahlen-Systeme, mit und ohne Stellenwerth, herrschen; endlich eine ganz unbekannte indische Methode, die ein Scholion des griechischen Mönchs Neophytos darbietet, lieferten mir eine Reihe von Materialien, welche einiges Licht auf unser sogenanntes arabisches Zahlen-System werfen können. Ich habe zuerst im Jahre 1819 in einer Abhandlung, welche ich zu Paris in den Sitzungen der *Académie des inscriptions et belles-lettres* gelesen, zu zeigen gesucht, wie bei Völkern, welche die rohe Methode der Juxtaposition dadurch abkürzen, dafs sie (nach Art der Mexikaner, in den Ligaturen von 4 mal 13 oder 52 Jahren, der Chinesen, Japanesen und Tamulen) Exponenten oder Indicatoren über die Zahlenzeichen schreiben, aus diesen Indicatoren, durch Suppression der senkrecht oder horizontal gereiheten Gruppenzeichen, das herrliche indische System des Stellenwerthes entstehen konnte. Die Verbreitung dieses Systems mufste durch den uralten Gebrauch der Erinnerungs- und Zahlschnüre, welche theils lose, als *quippos* der Tataren, Chinesen, Aegypter, Peruaner*) und Mexikaner, zu christlichen Paternostern oder Ritual-Rechenmaschinen**) umgeformt wurden, theils in feste Rahmen gespannt, den *Suanpan* von ganz Inner-Asien, den *abacus* der Römer und Tusker***) und die Werkzeuge der palpabeln Arithmetik slavischer Stämme†) bilden, ansehnlich begünstigt werden. Diese Schnur- und Drathreihen des einfachsten asiatischen *Suanpan* repräsentiren höhere und niedere Gruppen eines Zahlen-Systems, gleichviel ob Zehner, Hunderte und Tausende, oder in 60theiliger Abtheilung: Grade, Minuten, Secunden. Der Geist der Methode ist derselbe.

---

*) Ueber die *quippos* zur Abzählung der Sünden im Beichtstuhle s. Acosta *Hist. natural de las Indias, lib.* 6. *cap.* 8. *El Inca* Garcilaso, *lib.* 6. *cap.* 9. Fréret *Mém. de l'acad. T.* 6. *p.* 609.

**) Klaproth Asiat. Mag. Th. II. S. 78.

***) Otfried Müller, Etrusker, T. II. p. 318.

†) Im Russischen heifst der Rosenkranz *tschotki;* das Rechenbrett mit Schnüren (der *Suanpan* der Tataren) *tschotü.*

Die Perlen auf jeder Schnurreihe sind wieder die Indicatoren der Gruppen, und eine leere Schnur deutet auf Null, also auf das leere *Sunya* (sanscr.) *sifr* oder eigentlich *sifron sihron* (arabisch, nach Meninski: *prorsus vacuum*). Ich kann nicht historisch entwickeln, dafs der Ursprung des indischen Stellenwerthes von 9 Ziffern wirklich der sei, welchen ich angegeben; aber ich glaube einen Weg gefunden zu haben, auf welchem allmälig die Entdeckung gemacht werden konnte. Auf die Einsicht solcher Möglichkeiten führt ja überhaupt nur die dunkle und eben darum so anziehende Geschichte der alterthümlichen Entwickelung geistiger Kräfte und Bildung des Menschen-Geschlechts.

Von jener in der *Académie des inscriptions* gelesenen Abhandlung ist nur ein kurzer Auszug gedruckt worden, und an einem Orte *), wo man ihn schwerlich sucht. Das Manuscript selbst ist in Herrn Champollion's Händen, der es mit weit wichtigeren, von ihm in Turin entdeckten Thatsachen über die verschiedenen Methoden der ägyptischen Zahlzeichen, bekannt machen wollte. Ich habe seitdem von Zeit zu Zeit fortgefahren, meine erste Arbeit zu vervollständigen; aber da ich nicht hoffen darf, Mufse genug zu finden, sie in ihrer ganzen Ausdehnung herauszugeben, so werde ich in dieser Abhandlung mehrere der Haupt-Resultate zusammendrängen. Bei der neuen und glücklichen Richtung, welche das Studium der Sprachen und Monumente genommen, bei dem wachsenden Verkehr mit den süd- und ost-asiatischen Völkern, ist es wohl nicht ohne einigen Nutzen, Probleme zur Sprache zu bringen, welche mit dem Gange des menschlichen Geistes, und (durch die letzten Verzweigungen der Zahlen-Hieroglyphik und einfacher graphischer Methoden) mit den glänzendsten Fortschritten der Mathematik in so enger Verbindung stehen. „Der Gedanke, alle Quantitäten durch neun Zeichen auszudrücken, indem man ihnen zugleich einen absoluten und einen Stellungswerth giebt, sagt einer der gröfsten Geometer unserer Zeit und aller Zeiten, der Verfasser der *Mécanique céleste* **), ist so einfach, dafs

---

*) Gay Lussac *et* Arago, *Annales de chimie et de physique T. XII. p.* 93. in der monatlichen Anzeige der Verhandlungen des Instituts. Humboldt *Essais pol. sur la nouv. Espagne* (2 *édit.*) *T. III. p.* 122—124.

**) Laplace *Expos. du système du monde* (5. *édit.*) *p.* 325. Mit diesem Urtheile contrastirte sonderbar die Behauptung von Delambre in seinem Streite über das Verdienst der altindischen Arithmetik, wie sie in Bhascara Acharya's *Lilawati* enthalten ist (*Hist. de l'astronomie ancienne T. I. p.* 543.). Sprache allein führt wohl nicht auf Suppression der Gruppenzeichen.

man eben deshalb nicht genugsam erkennt, welche Bewunderung er verdient. Aber eben diese Einfachheit und die Leichtigkeit, welche die Methode dem Calcul zusichert, erheben das arithmetische System der Inder zu dem Range der nützlichsten Entdeckungen. Wie schwer es war, eine solche Methode aufzufinden, kann man daraus abnehmen, dafs sie dem Genie des Archimedes und Apollonius von Perga, zweier der gröfsten Geister des Alterthums, entgangen war." Die nachfolgenden Bemerkungen werden zeigen, wie ich hoffe, dafs die indische Methode allmälig aus früheren, noch jetzt im östlichen Asien üblichen, entstehen konnte.

So wie Sprache im Allgemeinen auf Schrift, und Schrift, unter gewissen, von Silvestre de Sacy und meinem Bruder untersuchten Bedingungen, auf die Sprache zurückwirkt, so stehen auch die, bei verschiedenen Völkern so verschiedenen Arten zu zählen mit der Zahlen-Hieroglyphik in genauer Wechselwirkung. Doch ist von dieser Wechselwirkung nicht immer strenge Consequenz zu erwarten. Die Zahlzeichen folgen nicht immer denselben Gruppirungen von Einheiten, als die Sprache; in der Sprache finden wir nicht immer dieselben Ruhepuncte (dieselben quinären Zwischenstufen) als in den Zahlzeichen. Fasset man aber, was Sprache (Zahlworte) und numerische Graphik in den entferntesten Erdstrichen darbieten, unter einen Blick zusammen, gleichsam als gemeinsames Product der menschlichen Intelligenz, auf quantitative Verhältnisse angewandt, so endeckt man in der Zahlenschrift des einen Völkerstammes die isolirt scheinenden Sprachsonderbarkeiten eines anderen Stammes; ja, man mufs hinzusetzen, dafs eine gewisse Unbehülflichkeit im numerischen Gebiete der Sprache und Schrift einen sehr trüglichen Maafsstab für den sogenannten Cultur-Zustand der Menschheit giebt. Hier finden dieselben verwickelten, unter einander contrastirenden Verhältnisse Statt, als bei Völkern, die Buchstabenschrift oder blofs ideographische Zeichen, die den üppigsten Reichthum grammatischer Formen, aus dem Innern des Wurzellautes sich organisch-entwickelnde Flexionen, oder fast ganz Flexions- und Formenlose, wie im ersten Ausbruche erstarrte Sprachen (und alles dies in den verschiedensten Gradationen intellectueller Bildung und politischer Einrichtungen) besitzen. So fühlt sich das einige Menschengeschlecht durch Wechselwirkung der inneren und äufseren Welt (eine Wechselwirkung, deren erste bestimmenden Gründe in dem mythi-

schen Dunkel der Vorwelt verhüllt bleiben) in die verschiedensten Richtungen gestofsen; meist unaufhaltsam, die alte Natur bewahrend, auch wenn grofse Welt-Erschütterungen die heterogensten Sprachstämme einander geographisch näher bringen; aber Ähnlichkeit der durch die fernsten Erdstriche wiederhallenden Anklänge, in grammatischen Sprachformen und graphischen Versuchen grofse Zahlen auszudrücken, bezeugen die Einheit des alten Geschlechts, das Übergewicht dessen, was aus der inneren Intelligenz, aus der gemeinsamen Organisation der Menschheit entspringt.

Reisende, welche beim Zählen Steinchen und Samenkörner in Haufen von 5 oder 20 zusammenlegen sahen, behaupten, dafs viele Nationen nicht über 5 oder 20 zählen *). Eben so könnte man behaupten, dafs die Europäer nicht über 10 zählen, da siebenzehn aus 10 und 7 Einheiten zusammengesetzt ist. Bei den cultivirtesten Völkern des Abendlandes, z. B. bei Griechen und Römern, deuten bekanntlich die Sprachen noch auf jene Haufen- und Gruppen-Bildung hin; daher die Ausdrücke *psephizein, ponere calculum, calculum detrahere.* Gruppen von Einheiten gewähren Ruhepuncte beim Zählen, und die verschiedensten Völker, in Folge der gleichen körperlichen Gliederung (4 fünffach getheilter Extremitäten) stehen still, entweder bei einer Hand, oder bei beiden, oder bei Händen und Füfsen. Nach dieser Verschiedenheit der Ruhepunkte bilden sich Gruppen von 5, 10 und 20. Merkwürdig ist es immer, dafs im Neuen Continent, wie bei den africanischen Mandingas, den Basken und den kymrischen (galischen) Stämmen des Alten Continents, meist Gruppen von 20 herrschen **). In der Chibcha-Sprache der Muyscas (eines Volkes, das, wie die Japanesen und Tibetaner, ein geistliches und ein weltliches Oberhaupt hatte und dessen Nordindische Intercalations-Methode eines 37sten Monats ich bekannt gemacht habe ***)) heifsen 11, 12, 13: Fufs eins (*quihieha ata*); Fufs zwei (*quihieha bosa*); Fufs drei (*quihieha mica*) von *quihieha* oder *ghieha* (Fufs) und den 3 ersten Einheiten *ata*, *bozha* oder *bosa* und *mica*. Das Zahlwort Fufs bedeu-

---

*) Pauw, *Recherches philos. sur les Américains. T. II. p.* 162. (Humboldt *Monumens américains. T. II. p.* 232 — 237.)

**) Beispiele solcher Zahlgruppen von 20 Einheiten liefern in America: die Muyscas, die Otomiten, die Azteken, die Cora-Indianer u. s. f.

***) *Monum. amér. T. II. p.* 250 — 253. Die Muyscas hatten Steine mit Zahlzeichen bedeckt, die in ihrer Folge den Priestern (*xeques*) die Intercalation des rituellen Jahres erleichterten. Siehe die Abbildung eines solchen Intercalations-Steines a. a. Orte, Tab. XLIV.

tet zehn, weil man den Fufs nennt, wenn schon beide Hände durchgezählt sind. Zwanzig heifst demnach in dem Sprachsysteme der Muyscas: Fufs-zehn oder ein Häuschen (*gueta*), vielleicht weil man mit Maiskörnern statt der Steinchen zählte, und ein Häufchen Mais an das Vorraths-Haus, die Mais-Scheuer, erinnert. Aus dem Worte Haus, *gueta*, oder zwanzig (beide Füfse und Hände) entstehen nun 30, 40, 80 mit den Benennungen: zwanzig *plus* 10; zweimal zwanzig; viermal zwanzig; ganz wie die celtischen, in die romanischen Sprachen übergegangenen Ausdrücke *quatre-vingt*, und *quinze vingt*, ja die seltenern *six vingt*, *sept vingt*, *huit vingt*. *Deux-* und *trois vingt* sind im Französischen nicht üblich, da doch im galischen oder celtischen Dialecte der westlichen Bretagne, die ich vor wenigen Jahren durchstrichen bin, von *ugent* zwanzig, *daou-ugent* zwei-zwanzig oder 40; *tri-ugent* drei-zwanzig oder 60; ja *deh ha nao ugent* 190 oder zehn über neun Zwanziger heifsen *).

Von der Analogie der Sprache und der Zahlen-Hieroglyphik könnte ich noch andere merkwürdige Beispiele anführen, in der Juxtaposition, im Abziehen von Einheiten, indem man sie graphisch der Gruppe vorsetzt; in Mittelstufen von 5 zu 15, bei Völkern, die nach Gruppen von 10 oder 20 zählen. Bei sehr rohen amerikanischen Stämmen, z. B. bei den Guaranis und Lulos, heifsen 6, 7 und 8 vier mit zwei, vier mit drei, fünf mit drei. Bei den gebildeteren Muyscas finden wir zwanzig (oder Haus) mit zehn für 30, wie die Kymren in Wales *deg* (zehn) *or ugain* (mit zwanzig), die Franzosen für 70 *soixante et dix* sagen. Summirungen durch Juxtaposition finden wir überall bei Etruskern, Römern, Mexikanern und Aegyptern; subtractive oder mindernde Sprachformen **) im Sanscrit bei den Indern: in 19 oder *una-*

---

*) Davies *Celtic Researches* 1804. *p.* 321. Legodinec *grammaire celto-bretonne* 1807. *p.* 55. Im celtischen oder kymrischen Dialecte von Wales heifst 5 *pump;* 10 *deg;* 20 *ugain;* 30 *deg ar ugein* (10 und 20); 40 *deugain;* 60 *trigain.* (William Owen *Dict. of the Welsh language. Vol. I. p.* 134.) Nach demselben Systeme der Zwanziger finden wir im Baskischen: *bi* 2; *lau* 4; *amar* 10; *oguai* 20; *birroguai* 40; *lauroguai* 80; *berroguetamar* 50, d. i. 40 und (*ata*) zehn. Larramendi, *Arte de la lengua bascongada* 1729. *p.* 38. (Die baskischen und kymrischen Zahlwörter sind in meinen *Monum. II. p.* 237. nicht vermengt, aber um die Vergleichung zu erleichtern, zusammengestellt: nur steht durch einen Druckfehler *les premiers* statt *les deux* oder *les uns et les autres.*)

**) Herr Bopp führt selbst 95 oder ein um 5 verringertes Hundert an, *pantschonam satam* (aus *pantscha* 5 und *una* weniger zusammengezogen.)

vinsati; 99 *unusata;* bei den Römern in *undeviginti* für 19 (*unus de viginti*). *undeoctoginta* für 79; *duo de quadraginta* für 38; bei den Griechen *eikosi deonta henos* 19 und *pentekonta düoin deontoin* 48, d. i. fehlend 2 an 50. Dieselbe minorative Sprachform ist in die numerische Graphik übergegangen, wenn den Gruppenzeichen 5, 10, ja selbst ihren Vielfachen, z. B. 50 oder 100, Charactere zur Linken gesetzt werden. (IV und IΛ, XL und XT für 4 und 40 bei Römern und Tuskern *), obgleich bei den letzteren, nach Otfried Müller's neuen Untersuchungen, die Ziffern wahrscheinlich ganz von dem Alphabet herstammen.) In seltenen römischen Inschriften, die Marini gesammlet **), finden sich sogar 4 Einheiten vor 10, z. B. IIIIX für 6. Wir werden bald sehen, dafs es graphische Methoden bei indischen Völkerstämmen giebt, in welchen der Stellenwerth, welcher bei Tuskern und Römern nur additiv oder subtractiv ist, nach Maafsgabe der Stellung oder Richtung der Zeichen, auf Addition und Multiplication hindeutet. In diesen indischen Systemen ist (um mich römischer Ziffern zu bedienen) IIX zwanzig, und XII zwölf.

In einer grofsen Zahl von Sprachen werden die Normal-Gruppen 5, 10, 20 eine Hand, zwei Hände, und Hand und Fufs (bei den Guaranis *mbombiabe*) genannt. Hat man an beiden Extremitäten die Finger abgezählt, so erscheint der ganze Mensch als ein Symbol von 20; daher heifst in der Sprache der Yaruros (von denen ich volkreiche Missions-Dörfer am Apure-Flusse, der sich in den Orinoco einmündet, gefunden) 40 zwei Menschen, *noeni pume* von *noeni* zwei und *pume* Mensch. Im Persischen drückt bekanntlich *pentscha* die Faust, *pendj* fünf aus, herstammend von dem Sanscrit-Worte *pantscha.* „Letzteres hat (nach Hrn. Bopp's scharfsinniger Bemerkung) auf das römische *quinque* geführt, wie das indische *tschatur* auf *quatuor.* Der Plural von *tschatur* (4.) ist *tschatvaras,* und steht dem Dorisch-Aeolischen *tettares* sehr nahe. Das indische *ch,* wie im Englischen ausgesprochen, also *tsch,* wird nemlich im Griechischen ein *t;* daher sich *tschatvaras* in *tatvaras,* wie *pantscha* (5) in *panta* (das griechische *pente,* äolisch *pempe,* davon *pempazein* an den Fingern oder Fünfen zählen) umwandelt. Im Lateinischen entspricht dagegen *qu* dem indischen *ch* oder vielmehr *tsch;* daher *tschatur* und

*) Otfried Müller, Etrusker, II. p. 317 — 320.

**) *Iscrizioni della Villa di Albano, p.* 193. Hervas *Aritmetica delle nazioni* 1786. *p.* 11. 16.

pantscha in *quatuor* und *quinque* übergehen. *Pantscha* selbst heifst im Sancrit nie Hand, sondern bedeutet einzig die Zahl 5. Doch ist *pantscha-sakha* ein beschreibender Ausdruck für Hand, als eines fünfästigen Organs *)."

Wie nun in der Sprache und, mit besonderer Naivität, in den südamerikanischen Sprachen, die Gruppen von 5, 10, 20, gleichsam als Ruhepuncte bezeichnet sind, so erkennen wir dieselben Gruppen in der Zahlen-Hieroglyphik. Die Römer und Tusker haben einfache Ziffern **) für 5, 50, 500. Das quinare System hat sich neben dem denaren erhalten. Im Aztekischen (Mexikanischen) finden wir nicht blofs Gruppenzeichen für 20 eine Fahne; für das Quadrat von 20 oder 400 eine Feder mit Goldkörnern gefüllt, die in einigen mexikanischen Provinzen als Münze dienten; für den Cubus von 20 oder 8000 ein Säckchen, *xiquipilli*, mit 8000 Cacao-Bohnen, ebenfalls zum Tauschhandel bestimmt; sondern auch (da die Fahne in 4 Fächer getheilt und halb oder zu $\frac{3}{4}$ colorirt ist) Zahlzeichen für halb-zwanzig oder 10, und für $\frac{3}{4}$ zwanzig oder 15, gleichsam 2 Hände und 1 Fufs ***). Den denkwürdigsten von allen Beweisen der Wechselwirkung zwischen Graphik und Sprache bietet aber Indien dar. Der Stellenwerth der Einheiten ist im Sanscrit selbst in die Rede eingedrungen. Die Indier haben nemlich eine gewisse bildliche Methode, Zahlen durch die Namen von Gegenständen auszudrücken, deren eine bestimmte Zahl bekannt ist. *Surya* (Sonne), zum Beispiel, bedeutet 12; denn in indischen Mythen werden 12 Sonnen nach der Reihe der Monate angenommen. Die auch in den Mondhäusern oder *naktschatras* vorkommenden beiden *Aswinas* (Castor und Pollux) drücken die Zahl 2 aus; *Manu* bedeutet 14, nach den Menus der Mythologie. Aus diesen vorläufigen Andeutungen erhellet nun, wie *Surymanu*, die Zusammenstellung der Symbole von 12 und 14, die Jahrszahl 1214 bezeichnet. Diese Thatsache verdanke ich der gütigen Mittheilung des gelehrten Colebrooke. Wahrscheinlich heifst, nach demselben Prinzip, 1412 *Manusurya* und 214 *Aswinimanu*. Im Sanscrit ist

*) Ueber die Sanscrit-Zahlwörter in Vergleichung mit griechischen, lateinischen und gothischen Zahlwörtern hat mir Herr Prof. Bopp, in Paris, im Jahre 1820, einen interessanten handschriftlichen Aufsatz mitgetheilt, der ursprünglich bestimmt war, in meinem Werke: Ueber die Zahlzeichen der Völker" zu erscheinen.

**) Für das tuskische Zeichen von 500 s. Otfried Müller, Abth. IV. Fig. 2.

***) Humboldt, *Monum. amér. I. p.* 309.

übrigens die Numeration so vollkommen, dafs man sogar ein einfaches Wort, *koti*, für 10 Millionen findet, wie die peruanische *qquichua*-Sprache, die nicht nach Gruppen von 20 zählt, ein einfaches Wort für eine Million (*hunu*) kennt.

Rechnen wir nach Zehnern nur deshalb, wie Ovid sagt, *quia tot digiti, per quos numerare solemus*, so würde der Mensch bei 6fach getheilten Extremitäten zu einer duodenaren Scale, zu Gruppen von 12, gelangt sein *), die den grofsen Vorzug von bruchlosen Theilungen durch 2, 3, 4 und 6 gewährt, und der sich die Chinesen seit den frühesten Zeiten bei ihren Maafsen und Gewichten bedienen.

Von diesen Betrachtungen über den Verkehr zwischen Sprache und Schrift, zwischen Zahlwörtern und Zahlzeichen, gehen wir nun zu den letzteren selbst über. Ich wiederhole es, dafs in diesem Auszuge aus meinem gröfseren, unvollendeten Werke nicht sowohl von der heterogenen Gestaltung einzelner Elemente (Ziffern), als von dem Geist der Methoden die Rede sein wird, welche die verschiedenen Nationen im Ausdruck numerischer Gröfsen angewandt haben. Der Gestalt und Form der Ziffern erwähne ich hier nur, wenn sie auf die Schlüsse über Identität und Heterogeneität der Methoden einwirken. Die Art zu procediren, um die reinen und gemischten *multipla* der denaren Fundamental-Gruppen n (z. B. $4n$, $4n^2$, oder $4n+7$, $4n^2+6n$, $4n^2+6n+5$) auszudrücken, ist nemlich sehr vielfältig, und geschieht bald durch Reihung (Stellenwerth, *position*), wie bei verschiedenen indischen Völkern; bald durch rohe Juxtaposition, wie bei den Tuskern, Römern, Mexicanern und Aegyptern; bald durch nebenstehende Coefficienten, wie bei den Tamulsprechenden Bewohnern der südlichen, indischen Halbinsel; bald durch gewisse, über den Gruppenzeichen stehende Exponenten oder Indicatoren, wie bei den Chinesen, Japanesen und den Myriaden der Griechen; bald in der inversen Methode, durch eine Zahl von Nullen oder Puncten, welche neun Ziffern oben angehängt werden, um den relativen oder Stellenwerth jeder Ziffer zu bezeichnen, gleichsam Gruppenzeichen, welche über die Einheiten gesetzt werden, wie in der arabischen Gobarschrift und in einem, vom Mönch Neophytos erläuterten indischen Zahlen-Systeme. Die eben genannten 5 Metho-

*) Debrosses II. 158.

den sind von der Gestaltung der Ziffern ganz unabhängig, und um diese Unabhängigkeit noch besser zu bewähren, habe ich es mir in dieser Abhandlung zum Gesetz gemacht, keine anderen Zeichen, als die gewöhnlichsten arithmetischen und algebraischen zu gebrauchen. Die Aufmerksamkeit wird auf diese Weise mehr auf das Wesentliche, auf den Geist der Methode, gerichtet. Ich habe schon bei einem anderen, sehr heterogenen Gegenstande, in Beziehung der regelmäfsigen Aufeinander-Lagerung, oft periodischen Reihung der Gebirgsarten (in dem Anhange zu dem *Essai géognostique sur le Gisement des Roches* *) zu zeigen gesucht, wie durch pasigraphische Notationen die Verallgemeinerung der Begriffe gewinnen kann. Man unterdrückt die, ihrer Natur nach allerdings sehr richtigen Nebenbetrachtungen individueller Form und Mischung, um eine Erscheinung, die man vorzugsweise verfolgen will, in ein desto reineres Licht zu setzen; ein Vortheil, der die frostige Nüchternheit solcher Abstractionen einigermafsen rechtfertigen kann.

Man ist gewohnt, in den graphischen Methoden der Völker zu unterscheiden: Zeichen, welche von der Buchstabenschrift unabhängig sind, und Buchstaben, welche durch eine bestimmte Reihung, durch gewisse beigefügte Striche und Puncte oder (in Beziehung auf die Sprache) durch Initialen der Zahlwörter **) den numerischen Werth angeben. Es ist bekanntlich keinem Zweifel unterwofen, dafs die hellenischen, die semitischen oder aramäischen Stämme (unter letzteren die Araber selbst, bis in das 5te Jahrhundert ***) nach der Hegira, ehe sie durch die Perser die Ziffern erhielten) in der Epoche ihrer gereiften Cultur, dieselben Zeichen als Buchstaben und Ziffern benutzten. Auf der anderen Seite sehen wir im neuen Continent wenigstens zwei Völker, die Azteken und Muyscas, welche Zahlzeichen und keine Buchstaben-

---

*) *Ed. de* 1823, *p.* 364—375.

**) Die arabischen Diwani-Ziffern, aus blofsen Monogrammen oder Abbreviationen von Zahlwörtern zusammengesetzt, geben das verwickelteste Beispiel solcher Initial-Schrift. Ob die uskischen und römischen *C* und *M* der tuskischen und römischen Sprache entlehnte Initialen sind, ist zweifelhafter, als man gewöhnlich glaubt. (Leslie *Philos. of Arith. p.* 7—9. 211. Debrosses *T. I. p.* 436. Hervas *p.* 32. 35. Otfr. Müller, Etrusker, p. 304. 318.) Das griechische rechtwinklige Kreuz, ganz dem chinesischen Zeichen von 10 ähnlich, bedeutet auf den ältesten Inschriften tausend (Boeckh, *Corp. inscript. graec. vol. I. p.* 23.) und ist nichts anderes, als die uralte Form des *Chi* (*Nouveau traité de Diplom. par deux Religieux de St. Maur. Vol. I. p.* 678.)

***) Silvestre de Sacy, *Gramm. arabe*, 1810. *T. I. p.* 74. *note* 6.

schrift hatten. Bei den Aegyptern scheinen die am meisten gebrauchten numerischen Hieroglyphen für Einheiten, Zehner, Hunderte und Tausende auch nicht mit den phonetischen Hieroglyphen zusammenzuhängen. Ganz unabhängig vom Alphabet ist auch die altpersische Pehlwi-Zahlenschrift in den ersten 9 Einheiten, wie bei den Tuskern und den ältesten Griechen und den Römern. Anquetil *) bemerkt schon, dafs das Zend-Alphabet, welches mit seinen 48 Elementen die Zahlbezeichnung hätte erleichtern können, nicht als Ziffern gebraucht werde, und dafs in den Zendbüchern die Zahlen immer zugleich in Pehlwi-Ziffern und in Zendwörtern ausgedrückt sind. Sollte sich ein solcher Mangel von Zend-Zahlen durch künftige Untersuchungen bestätigen, so würde derselbe, bei der innigen Verwandtschaft der Zendsprache mit dem Sanscrit, zu der Meinung führen, das Zend-Volk habe sich von den Indern getrennt, als diese noch nicht den Stellenwerth der Ziffern kannten. Ueber 9 hinaus sind im *Pehlwi* die Gruppen-Zeichen 10, 100 und 1000 aus Buchstaben zusammengesetzt. *Dal* ist 10; *re* mit *za* verschlungen 100; *re* mit *ghain* verschlungen 1000. Wenn man von der ganzen Masse der Zahlzeichen des Menschengeschlechts das Wenige betrachtet, was wir bisher kennen gelernt, so findet man, dafs die Eintheilung in Buchstabenzahlen und eigentlich sogenannte Ziffern eben so unsicher und unfruchtbar ist, als die von ächten Sprachkennern längst aufgegebene Eintheilung in ein- und mehrsylbige Sprachen. Wer kann mit Sicherheit entscheiden, ob die Tamul-Ziffern in Süd-Indien, die keinen Stellenwerth kennen, und, bis auf die Ziffer 2, ganz von den in den Sanscrit-Handschriften gebräuchlichen abweichen, nicht von der alphabetischen Tamulschrift selbst abzuleiten sind, da man in derselben zwar nicht das Gruppenzeichen für 100, aber wohl das Gruppenzeichen 10 (im Buchstaben *ya*), und die 2 (im Buchstaben *u*) zu erkennen glaubt? Die Telugu-Ziffern **) mit Stellenwerth, ebenfalls im südlichen Theile der indischen Halbinsel gebräuchlich, weichen in 1, 8 und 9 sonderbar von allen uns bekannten indischen Ziffern ab, da sie hingegen

---

*) *Mém. de l'Acad. des belles lettres T.* 31. *p.* 357.

**) Campbell, *Grammar of the Teloogoo-Language (Madras)* 1816. *p.* 4. 208. *Teloogoo* ist die fälschlich genannte Gentoo-Sprache, von den Eingebornen *Trilinga* oder *Telenga* genannt. Man vergleiche die Ziffertafel von Campbell mit anderen Varietäten indischer Ziffern in Wahl's allgem. Geschichte der morgenländ. Sprachen 1784. Tab. I.

in 2, 3, 4 und 6 mit denselben übereinstimmen. Das Bedürfnifs, Zahlen graphisch zu bezeichnen, ist wohl am frühesten gefühlt worden, und numerische Zeichen gehören zu den ältesten aller Schriftzeichen. Die Werkzeuge der palpablen Arithmetik, wie sie Herr Leslie in seinem geistreichen Werke: *the Philosophy of Artihmetic* (1817) der figurativen oder graphischen entgegensetzt, sind beide menschlichen Hände, Häufchen von Steinen (*calculi*, *psephoi*), Samenkörner, lose Schnüre mit Knoten (Rechenschnüre, tatarische und peruanische *quippos*), eingerahmte Suanpan und Abacus-Tafeln, die slavische Rechenmaschine mit aufgezogenen Kugeln oder Samenkörnern. Alle diese Werkzeuge lieferten dem Auge die ersten graphischen Bezeichnungen von Gruppen verschiedener Abstufung. Eine Hand oder eine Schnur mit Knoten oder verschiebbaren Kugeln bezeichnet die Einheiten bis 5 oder 10 oder 20. Wie oft durch Schliefsung der einzelnen Finger eine Hand durchgezählt ist, (*pempazesthai*) giebt die andere Hand an, auf der dann jeder Finger, d. i. jede Einheit, eine Gruppe von Fünf ausdrückt. Eben so verhalten sich zwei lose Knotenschnüre gegen einander, und zu Gruppen 2ter, 3ter und 4ter Ordnung übergehend, stehen in demselben auf- und absteigenden Gruppen-Verhältnifs die aufgespannten, mit Kugeln bezogenen Rechenschnüre, der alt-asiatische Suanpan, der zu den abendländischen Völkern als *abax* oder *tabula logistica* früh (vielleicht durch Aegypter zur Zeit des Pythagoreïschen Bundes) übergegangen ist. Die *Koua's*, welche älter als die jetzige chinesische Schrift sind, ja die notenartigen, knotigen, oft gebrochenen Parallellinien der Zauberbücher (*raml*) von Inner-Asien und Mexiko scheinen nur graphische Projectionen von diesen Rechen- und Denkschnüren*). Im asiatischen Suanpan oder im Abacus, dessen die Römer sich bei ihren unbehülflichen Zahlzeichen weit mehr bedienten, als die in der Zahlen-Graphik glücklicher fortgeschrittenen

*) Im Orient wird *raml* die negromantische Kunst des Sandes genannt. Ganze oder gebrochene Linien und Puncte, welche die Elemente vorstellen, leiten den Weissager. (Richardson *and* Wilkins *Diction. Persian and Arabic.* 1806. *T. I. p.* 482.) Als ein solcher orientalischer Raml ist das merkwürdige, ächt mexikanische, wie mit Musik-Noten bedeckte Manuscript, das zu Dresden aufbewahrt wird, und welches ich in meinen *Monum. américc. pl.* 44. abgebildet, von einem gelehrten Perser, der mich in Paris besuchte, auf den ersten Blick erkannt worden. Ganz ähnliche, ächt amerikanische Koua und notenförmige Linear-Zeichnungen habe ich seitdem in mehreren aztekischen hieroglyphischen Handschriften und in den Sculpturen des Palenque, im Staat von Guatimala entdeckt. Im alten Styl der chinesischen Zahlenschriften ist das Gruppenzeichen für 10, eine Perle auf einer Schnur, offenbar (projectionsartig) vom *quippu* hergenommen.

Griechen *), erhielten sich, neben den denaren Reihen, die in geometrischer Progression auf- und absteigen, auch quinare Reihen. Zur Seite jeder Zahlenschnur der Gruppen oder Ordnungen n, n^2, n^3 stand eine kleinere Schnur, welche je fünf Kugeln der gröfseren durch eine einzige bezeichnete. Mittelst dieser Einrichtung ward die Zahl der Einheiten so vermindert, dafs die Hauptschnur nur 4, die Nebenschnüre nur 1 Kugel bedurfte **). Die Chinesen scheinen, von den frühesten Zeiten an, willkürlich irgend eine der aufeinander folgenden parallelen Schnüre, als die Schnur der Einheiten betrachtet zu haben, so dafs sie, auf- und abwärts, Decimalbrüche und ganze Zahlen und Potenzen von 10 erhielten. Wie spät ***) (im Anfange des 16ten Jahrhunderts?) ist in die Abendländer die Kenntnifs der Decimal-Brüche gekommen, zu welcher die palpable Arithmetik im Orient längst geführt hatte! Bei den Griechen war, jenseit der Einheit, die aufsteigende Scale nur im Sexagesimal-System, bei Graden, Minuten und Secunden bekannt; aber da man nicht $n-1$, das heifst, 59 Zeichen hatte, ward der Stellenwerth nur in zweigliedrigen Schichten beobachtet.

Wenden wir unsern Blick auf den Ursprung der Zahlen, so finden wir, dafs in aufgehäuften Steinchen, oder auf den mit Kugeln bedeckten Schnüren der Rechenbretter, Zahlen mit grofser Regelmäfsigkeit transitorisch geschrieben und gelesen wurden. Die Eindrücke, welche diese Operationen hinterliefsen, haben überall auf die früheste Zahlen-Graphik eingewirkt. In den historischen, rituellen und negromantischen Hieroglyphen der Mexikaner, die ich bekannt gemacht, werden die Einheiten bis 19 (das erste einfache Gruppenzeichen ist 20) als grofse runde farbige Körner nebeneinander gestellt, und, was sehr merkwürdig ist, die Rechnung geht von der Rechten zur Linken, wie die semitische Schrift. Man bemerkt diese Folge deutlichst bei 12, 15, 17, wo die erste Reihe 10 enthält, und die zweite nicht ganz ausgefüllt ist. In den älte-

---

*) Nicomachus in Ast, *Theologumena arithm.* 1817. *p.* 96. In dem Finanz-Wesen des Mittelalters wurde der Rechentisch (*abax*) zum *exchequer*.

**) So im Römischen *abacus;* im Chinesischen gebrauchte man 5 und 2 Kugeln. Die nicht zählenden Kugeln wurden dann zur Seite geschoben.

***) Ueber die ersten Versuche der Decimal-Bezeichnung von Michael Stifelius aus Eslingen, Stevinus aus Brügge und Bombelli aus Bologna s. Leslie *Phil. of Arithm.* *p.* 134.

sten Hellenischen Monumenten, in den Tuskischen Sepulcral-Inschriften, bei den Römern und Aegyptern (wie Thomas Young, Jomard und Champollion gezeigt haben) sind die Einheiten durch senkrechte Linien bezeichnet. Bei den Chinesen und in einigen von Eckhel (T. III. 410.) beschriebenen ächt phönicischen Münzen sind diese Striche bis 4 horizontal. Die Römer reiheten zuweilen (das quinare Gruppenzeichen überspringend,) in Inschriften, bis 8 Striche als Einheiten aneinander. Viele solche Beispiele giebt Marini in der merkwürdigen Schrift: *Monumenti dei fratelli Arvali* *). Die Nagelköpfe zur alten römischen Jahres-Rechnung (*annales antea in clavis fuerunt, quos ex lege vetusta figebat Praetor Maximus*, sagt Plin. VII. 40.) hätten auf die mexikanischen Einheitspuncte führen können, welche auch wirklich neben den (chinesischen und phönicischen) Horizontal-Linien, in Unter-Abtheilungen der Unzen und Fufse, vorkommen **). Diese Puncte und Striche, 9 oder 19 an der Zahl, in der denaren oder Vicesimal-Scale (Hand- oder Hand- und Fufs-Scale) des Alten und Neuen Continents sind die rohesten aller Bezeichnungen im Systeme der Juxtaposition. Man zählt dann die Einheiten mehr als man sie lieset. Das Für sich bestehen, gleichsam die Individualität einzelner Gruppen von Einheiten, als Zeichen, fängt erst an, in den Buchstabenzahlen der semitischen und hellenischen Stämme, oder bei den Tibetanern und indischen Stämmen, die durch einzelne ideographische Zeichen 1, 2, 3, 4 ausdrücken. Im altpersischen *Pehlwi* zeigt sich ein merkwürdiger Uebergang von der rohen Methode der Juxtaposition von Einheitszeichen, zur isolirten Existenz zusammengesetzter ideographischer Hieroglyphen. Der Ursprung der ersten 9 Ziffern durch Zahl der Einschnitte oder Zähne, liegen hier vor Augen; 5 bis 9 sind sogar bloſse Verschlingungen der Zeichen 2, 3 und 4, ohne Wiederkehren des Zeichens von 1. In den ächt-indischen Systemen der Devanagari, persischen und arabisch-europäischen Ziffern, sind nur in 2 und 3, Contractionen ***) von 2 und 3 Einheiten zu erkennen, gewifs nicht in den höheren Ziffern, welche in der indischen Halbinsel auf die sonderbarste Weise von einander abweichen.

---

*) *T. I. p.* 31. *T. II. p.* 675. z. B. in *Octumvir.*

**) Marini *T. I. p.* 228.

***) Abel Remusat, *Langues Tatares p. XXX.* Ueber die sonderbaren indischen Ziffern in Java s. Crawfurd II. p. 263.

Indem ich hier und in den folgenden Theilen der Abhandlung der indischen Zahlen erwähne, mufs ich mich zuerst über diese Benennung und über die alten Vorurtheile, als habe Indien einerlei gestaltete Ziffern und keine Buchstaben-Zahlen, als sei in Indien überall Kenntnifs des Stellenwerthes und Nicht-Gebrauch von eigenen Gruppen-Zeichen für n, n^2, n^3 .... erklären. So wie, nach der oftmaligen Aeufserung meines Bruders, Wilh. von Humboldt, das Sanskrit sehr unbestimmt durch die Benennungen „indische und alt-indische Sprache" bezeichnet wird, da es in der Indischen Halbinsel mehrere sehr alte, vom Sanskrit gar nicht abstammende Sprachen giebt: so ist auch der Ausdruck „indische, alt-indische Ziffern" im Allgemeinen sehr unbestimmt, und diese Unbestimmtheit bezieht sich sowohl auf die Gestaltung der Zahlzeichen als auf den Geist der Methoden, welche man durch Juxtaposition, oder durch Coefficienten, oder durch blofsen Stellenwerth der Haupt-Gruppen n, n^2, n^3 und der Vielfachen derselben $2n$, $3n$ .... bezeichnet. Selbst die Existenz eines Null-Zeichens ist, wie das Scholion des Neophytos lehrt, in indischen Ziffern noch kein nothwendiges Bedingnifs des Stellenwerthes. Im südlichen Theile der indischen Halbinsel sind die Tamul- und Telugu-Sprachen die weitverbreitetsten. Die Tamulsprechenden Inder haben von ihrem Alphabet abweichende Zahlzeichen, von denen die 2 und die 8 eine schwache Aehnlichkeit mit den indischen (Devanagari-) Ziffern von 2 und 5 haben *). Noch verschiedener von den indischen Ziffern sind die cingalesischen **). In diesen und den Tamulischen findet man keinen Stellenwerth, kein Nullzeichen, sondern Hieroglyphen für die Gruppen n, n^2, n^3 .... Die Cingalesen operiren durch Juxtaposition, die Tamulen durch Coefficienten. Jenseits des Ganges, im Burman-Reiche, sehen wir Stellenwerth und Nullzeichen; aber von den arabischen, persischen und Devanagari-indischen Ziffern gänzlich abweichende Zeichen ***). Die von den Arabern gebrauchten persischen Ziffern weichen alle 9 gänzlich von den Devanagari-Ziffern †) ab;

---

*) Robert Anderson, *Rudiments of Tamul Grammar.* 1821. *p.* 135.

**) James Chater, *Grammar of the Cingalese language, Colombo* 1815. *p.* 135.

***) Carey, *Grammar of the Burman language.* 1814. *p.* 196. Blofs die Burmanischen Ziffern 3, 4 und 7 haben einige Aehnlichkeit mit 2, 5 und 7.

†) Vergl. John Shakespear, *Grammar of the Hindustani language.* 1813. *p.* 95. u. *Pl. I.* William Jones, *Grammar of the Persian language.* 1809. *p.* 93. Silvestre de Sacy, *Grammaire arabe. Pl. VIII.*

7 ist wie eine römische, 8 wie eine tuskische 5 gestaltet. Unter dem, was wir heute arabische Ziffern nennen, sind blofs 1, 2, 3 den Devanagari-Ziffern gleicher Bedeutung ähnlich; die devanagari 4 ist unsere 8; unsere 9 ist eine devanagari 7; unsere 7 ist eine persische 6. Im Bengali ist 5 ein halber Mond und 3, 5, 6, 8 und 9 weichen ganz von den Devanagari-Ziffern ab *). Blofs verunstaltete indische Devanagari-Ziffern sind die von Guzerath **).

Betrachtungen über den Einfluſs der frühesten Zahlzeichen auf das Alphabet, über geflissentliche Verunstaltungen der Buchstaben, um sie nicht mit Ziffern zu verwechseln, über die verschiedene Reihung der Zahlbuchstaben, welche bei demselben Volke nicht immer mit dem üblichen Alphabet übereinstimmt (wie im *aboudjed* semitischer Stämme in Asien und Afrika ***), gehören nicht in diese Abhandlung, und haben zu vielen grundlosen Hypothesen im Felde der vergleichenden Alphabetik und Hieroglyphik Anlafs gegeben. Ich habe selbst ehemals die Vermuthung geäufsert, dafs die indischen Zahlen, trotz der Form von 2 und 3, Buchstaben eines alten Alphabets sind, dessen Abglanz sich noch in den phönicischen, samaritanischen, palmyrischen und ägyptischen (Mumien-) Schriftzügen, ja an den alt-persischen Monumenten von Nakschi-Rustan †) findet. Wie viele Lettern sehen nicht in diesen Alphabeten den ausschliefslich sogenannten indischen Ziffern ähnlich. Ein phönicischer Ursprung der sogenannten indischen Zahlen ist schon von anderen Gelehrten behauptet worden ††), und der scharfsinnige Eckhel machte schon darauf aufmerksam, dafs die Zahlen-Aehnlichkeit phönicischer Buchstaben so auffallend sei, dafs das Wort Abdera durch 19990 und 15550 bezeichnet werde †††). Aber über diesen Ursprung der Ziffern und Buchstaben herrscht ein Dunkel, welches bei den vorhandenen

---

*) Graves Chamney Haughton, *Rud. of Bengali Grammar.* 1821. *p.* 133.

**) Robert Drummond, *Illustrations of the Grammat. Parts of the Guzerath and Mahratt-language.* 1808. *p.* 25.

***) Silvestre de Sacy T. I. p. 10.

†) Silvestre de Sacy, *Antiquités de la Perse. Pl. I. n.* 1. Vergl. die Zahlen-Inschriften am Sinai in *Descr. de l'Egypte. Vol.* 5. *Pl.* 57.

††) Guyot de la Marne in *Mém. de Trevoux* 1736. *p.* 160. 1740. *Mars p.* 260. Jahn *Bibl. Archaeolog. B. I. p.* 479. Büttner vergl. Tafeln 1779. *St.* 2. *p.* 13. Eichhorn Einleit. in das alte Testament. B. I. p. 197. Wahl, Gesch. der morgenl. Litt. p. 601. 630. Fundgruben des Orients B. 3. p. 87.

†††) *Doctrina nummorum veterum.* 1794. *T. III. p.* 396 – 404, 421, 494.

Materialien eine gründliche philologische Untersuchung unmöglich macht, wenn man sie nicht auf negative Resultate beschränken will.

So wie oft dieselben Völker zugleich mit Buchstaben-Zahlen und ideographischen oder willkürlich gewählten Zahlzeichen rechnen, so finden sich auch in einem und demselben Zahlen-System, in Hinsicht auf den Ausdruck der *multipla* der Fundamental-Gruppe, die verschiedenartigsten Methoden, ja was in einem System gleichsam nur angedeutet ist, zeigt sich im andern vollständig entwickelt. Eben so präludiren, in den Sprachen, bei einer Nation grammatische Formen, welche eine andere mit besonderer Vorliebe und allem Aufwande intellectueller Kraft ausgebildet hat. Beschreibt man die Zahlensysteme einzeln, wie sie jedes Volk anwendet, so verdunkeln sich die Aehnlichkeiten der Methoden; man verliert die Spur, auf welcher der menschliche Geist zu dem Meisterwerke der indischen Arithmetik gelangt ist, in der jedes Zeichen einen absoluten und relativen Werth hat, in der sie in geometrischer Progression von der Rechten zur Linken wachsen. Ich verlasse daher in den folgenden Sätzen die ethnographische Folge und betrachte blofs die verschiedenen Mittel, welche angewandt wurden, um dieselben Gruppen von Einheiten (gemischte oder ungemischte Gruppen) graphisch auszudrücken.

Erste Methode. Juxtaposition; blofs additiv bei Buchstabenzahlen und eigentlichen Ziffern. So Tusker, Römer, Griechen, bis zu der Myriade, semitische Stämme, Mexikaner und der gröfsere Theil der Pehlwi-Ziffern. Diese Methode macht besonders das Rechnen beschwerlich, wenn die *multipla* der Gruppen ($2n$, $3n$, $2n^2$ ....) nicht eigene Zeichen haben. Bei den Tuskern und Römern ist Wiederholung von den Zeichen 10 bis 50, bei den Mexikanern, wo das erste Gruppenzeichen 20 (eine Fahne) ist, findet Wiederholung desselben Hieroglyphen bis 400 statt. Dagegen haben die Griechen in den beiden Reihen der Zehner und Hunderter, die mit *iota* und *rho* anfangen, Zeichen für 20, 30, 400 und 600. Drei Episemen (Buchstaben eines veralteten Alphabets) *bau*, *koppa* und *sampi* drücken aus: 6, 90 und 900; die letzteren beiden schliefsen die Reihen der Zehner und Hunderter, wodurch der Zahlenwerth der griechischen Buchstaben dem des semitischen *aboudjed's* etwas ähnlicher wird *). Herr Böckh hat in seinen gelehrten Un-

*) Hervas *Arithm. delle nazioni. p.* 78. Ueber alte Reihenfolge der Lettern in semitischen Alphabeten: *Descript. de l'Egypte moderne. T. II. P. II. p.* 208.

tersuchungen über das Digamma gezeigt, dafs *bau* das *wau* der Semiten (der Lateiner) ist; *koppa* war das semitische *koph* (9) und *sampi* das semitische *schin* *). Die Reihe der Einheiten von *alpha* bis *theta* bildet bei den Griechen die Wurzelzahlen (*püthmenes*), mit welchen man durch Kunstgriffe, die Apollonius erfand **), im Rechnen so operirte, dafs man sie, im letzten Resultate, auf die correspondirenden Glieder der 2ten und 3ten Reihen (der Analogen) reducirte.

Zweite Methode. Vervielfachung oder Verminderung des Werthes durch darüber oder darunter gesetzte Zeichen. In der vierten Reihe der griechischen Notation kehren bekanntlich die *püthmenes* aus Analogie wieder, tausendfach vermehrt, durch Hinzufügung eines Strichs nach unten. So reichte man bis zur Myriade; man schrieb bis 9999. Hätte man die Strich-Notation für alle Gruppen angewandt, und alle Zeichen nach dem *theta* (9) unterdrückt, so hätte man für β, mit einem oder 2 oder 3 Strichen, Ausdrücke für 20, 200 und 2000 gehabt, und sich, wie wir bald sehen werden, den wenig bekannten arabischen Gobar-Zahlen, und mit ihnen den Stellenwerthen genähert; aber mit einer unglücklichen Uebersprungung der Gruppen von Zehnern und Hunderten, fing die Strich-Notation erst mit den Tausenden an, und ward selbst nicht in höheren Gruppen versucht.

Wenn ein Strich, der unten zugefügt wird, die Zahl tausendfach vermehrt, so bezeichnet dagegen bei den Griechen ein senkrechter Strich, oben hinzugefügt, einen Bruch, dessen Zähler die Einheit und dessen Nenner die Zahl ist, welche unter dem Strich notirt wird. So ist im Diophantus $\gamma' = \frac{1}{3}$; $\delta' = \frac{1}{4}$, aber die untere Zahl bezeichnet den Zähler, wenn dieser gröfser als die Einheit ist, und der Nenner des Bruches wird alsdann wie ein Exponent geschrieben, so dafs z. B. $\gamma^{\delta} = \frac{3}{4}$ ***). In römischen Inschriften vermehrt ein Horizontal-Strich, nach oben zugefügt, die Zahl tausendfach, was als ein Mittel der Abkürzung und Ersparung des Raumes betrachtet werden kann.

---

*) Staatshaushaltung der Athener B. II. p. 385.

**) Delambre *hist. de l'astron. ancienne T. II. p.* 10.

***) Delambre *T. II. p.* 11. Der Strich, der zu den Buchstaben oben hinzugefügt wird, blofs um anzuzeigen, dafs sie als Zahlen gebraucht werden, mufs nicht mit dem Fractionszeichen verwechselt werden. Auch ist derselbe in den älteren mathematischen Handschriften eigentlich nie senkrecht, sondern horizontal, und daher mit dem Fractionszeichen nie zu verwechseln. (Bast: *de usu litterarum ad numeros indicandos* in Gregorii *Corinthii liber de dialectis linguae graecae* 1811. *p.* 850.)

Wichtiger ist die Methode des Eutocius zum Ausdruck der Myriaden. Hier treffen wir bei den Griechen die erste Spur des, für den Orient so wichtigen Exponential- oder vielmehr Indications-Systems. M^{α}, M^{β}, M^{γ} bezeichnen 10000, 20000, 30000. Was hier bei den Myriaden allein angewandt wird, geht bei den Chinesen und den Japanesen, die ihre Cultur von den Chinesen 200 Jahre vor unserer Zeitrechnung erhielten, durch alle *multipla* der Gruppen durch. Drei Horizontalstriche unter dem Zeichen von zehn bedeuten 13; aber drei Horizontalstriche darüber bedeuten 30. Nach dieser Methode wird 3456 also geschrieben (ich bediene mich der römischen Zahlen als Gruppenzeichen, der indischen als Exponenten):

$$M^{3}$$
$$C^{4}$$
$$X^{5}$$
$$I^{6}.$$

Bei den Aegyptern finden sich dieselben Indicatoren. Auf einen gekrümmten Strich *), der 1000 andeutet, werden 2 oder 4 Einheiten gestellt für 2000 und 4000. Bei den Azteken oder Mexikanern habe ich für 312 Jahre das Zeichen der Ligatur mit 6 Einheiten als Exponent gefunden ($6 \times 52 = 312$) und in meinem Werke über Amerikanische Monumente abgebildet. Bei Chinesen, Azteken und Aegyptern steht überall das Gruppenzeichen unten, als schriebe man gleichsam X^{5} für 50; in den arabischen Gobar-Ziffern steht das Gruppenzeichen über dem Indicator. Im Gobar sind nemlich die Gruppenzeichen Puncte, also Nullen, denn in Indien, Tibet und Persien sind Nullen und Puncte identisch. Diese Gobar-Zeichen, welche seit dem Jahre 1818 meine ganze Aufmerksamkeit auf sich gezogen haben, sind von meinem Freunde und Lehrer, Herrn Silvestre de Sacy, in einem Manuscript aus der Bibliothek der alten Abtey St. Germain du Près entdeckt worden. Dieser grofse Orientalist sagt: *Le gobar a un grand rapport avec le chiffre indien, mais il n'a pas de zéro* **). Ich glaube, dafs aller-

---

*) Kosegarten *de Hierogl. Aegypt. p.* 54. Gatterer's aus Bianchini (*Decad. I. cap. 3. p.* 3.), aus Goguet (*I. p.* 226.) und aus Debrosses (*I. p.* 432.) entlehnte Behauptung, dafs Aegypter in senkrechter Richtung den 9 Einheiten Stellenwerth gaben, ist durch neuere Untersuchungen keinesweges bestätigt worden. Gatterer, Weltgeschichte bis Cyrus, p. 555. 586.

**) S. *Gramm. arabe p.* 76. und die der *Pl.* 8. zugefügte Note.

dings das Nullzeichen vorhanden sei: es steht aber, wie im Scholion des Neophytos, über den Einheiten, nicht daneben; ja es sind gerade die Nullzeichen oder Puncte, welche diesen Characteren den sonderbaren Namen *gobar* oder Staubschrift gegeben. Man ist auf den ersten Blick ungewifs, ob man einen Übergang zwischen Ziffern und Buchstaben darin erkennen soll. Man unterscheidet mit Mühe die indische 3, 4, 5 und 9. *Dal* und *ha* sind vielleicht schlecht gestellte indische Ziffern 6 und 2. Die Indication durch Puncte ist folgende:

$3^{\cdot}$ für 30,
$4^{\cdot\cdot}$ für 400,
$6^{\cdot\cdot\cdot}$ für 6000.

Diese Puncte erinnern an eine alt-griechische, aber seltene Bezeichnung *), die erst mit der Myriade anfängt: $\alpha^{\cdot\cdot}$ für 10000, $\beta^{\cdot\cdot}$ für 200 Millionen. In diesem Systeme geometrischer Progressionen ist ursprünglich ein Punct, den man aber nicht anwendet, 100. Bei Diophantus und Pappus stehet ein Punct zwischen den Buchstabenzahlen, statt der Initiale Mυ (Myriade). Ein Punct multiplicirt dann, was zur Linken steht, 10000 mal. Man möchte glauben, dafs dunkle Ideen von Bezeichnungen durch Puncte und Nullen sich durch Alexandriner aus dem Orient nach Europa verbreitet hatten. Das wirkliche Nullzeichen, und als etwas Fehlendes, wendet Ptolemäus in der abwärts steigenden Sexagesimal-Scale für fehlende Grade, Minuten oder Secunden an. Auch in Handschriften des Theon, im Commentar zur Syntaxis des Ptolemäus, will Delambre das Nullzeichen gefunden haben **). Es ist daher im Occident weit älter, als der Einbruch der Araber. Planudes Schrift über die *arithmoi indikoi.*

---

*) Ducange *Palaeogr. p. XII.*

**) *Histoire de l'astron. ancienne T. I. p.* 547. *T. II. p.* 10. Die Stelle im Theon ist in seinen gedruckten Werken nicht aufzufinden. Delambre ist geneigt, das griechische Nullzeichen bald der Abbreviatur von *ouden*, bald einer besonderen Beziehung zuzuschreiben, in welcher das Zahlzeichen *omieron* mit den Sexagesimal-Brüchen steht. *L. c. T II. p.* 14. und *Journal des savans.* 1817. *p.* 539. Sonderbar, dafs in der alt-indischen Arithmetik der Lilawati die Null neben einer Zahl bedeutet, dafs die Zahl abzuziehen ist. Delambre *I. p.* 540. Was bezeichnet der *Ling* (eine wahre Null), welcher in den chinesischen Zahlzeichen unter 12, 13, 22, 132 geschrieben wird? In römischen Inschriften sind Nullen mehrfach wiederholte Obole. (Böckh Staatshaushaltung der Athener B. 2. S. 379.)

Dritte Methode. Vervielfachung des Werthes durch Coefficienten.

Was wir bei den Chinesen als Indicatoren in der senkrechten Schrift gefunden haben, ein Unterschied von $X = 12$ und $\overset{2}{X} = 20$, wird in horizontaler Richtung bei Griechen, bei $\overset{2}{}$Armeniern und bei den Tamul-redenden Bewohnern der südlichen Halb-Insel von Indien wiederholt. Diophantus und Pappus schreiben βMυ für zweimal zehntausend oder 20000, da αMυβ (wenn β der Initiale der Myriade rechts steht) einmal zehntausend plus zwei, oder 10002 bezeichnet. Dasselbe findet statt bei den Tamulziffern, gleichsam als wäre $4X = 40$ und $X4 = 14$. Im alt-persischen Pehlwi, nach Anquetil, und im Armenischen, nach Cerbied *) erkennt man links stehende Multiplicatoren, um die Vielfachen von 100 auszudrücken. Hierher gehört auch, der Methode nach, der oben erwähnte Punct des Diophantus, welcher für Mυ stehet und 1000 mal das Vorhergehende erhöht **).

Vierte Methode. Vervielfältigung und Verminderung, aufsteigend und absteigend, durch Abtheilung von Zahlschichten, deren Werth sich in geometrischer Progression vermindert.

Archimedes in den Octaden, Apollonius in den Tetraden, haben diese Notation nur in Zahlen über $(10000)^2$ und in 100 Millionen oder einer Myriade von Myriaden gebraucht ***). Hier ist offenbar Stellenwerth derselben Zeichen, die in verschiedenen Schichten aufeinander folgen, also ein relativer und absoluter Werth, wie in der absteigenden Sexagesimal-Scale der alexandrinischen Astronomen, wenn sie Grade, Minuten, Secunden angeben. Da aber im letzteren Falle (aus Mangel von $n-1$ oder 59 Zeichen) jede Schicht zweiziffrig ist, so kann der Stellenwerth nicht den Vortheil indischer Zahlen gewähren. Wenn die dreihundert sechzigsten Theile eines Kreises als Ganze betrachtet werden, so sind Minuten Sechzigstel dieser Ganzen, Secunden Sechzigstel der Minuten u. s. f. Als Brüchen gab ihnen Ptolemäus demnach bruchähnliche Zeichen, den Strich nach oben, und um die absteigende Progres-

*) *Grammaire Armenienne.* 1823. *p.* 25.

**) Solche Abtheilungen durch Puncte, welche, auf eine übrigens sehr inconsequente Weise, einen Stellenwerth bezeichnen, findet man ebenfalls in drei oft bestrittenen Stellen des Plinius (*VI.* 24. 33. *XXX.* 3).

***) Delambre, *Hist. de l'astron. ancienne* *T. I. p.* 105. *T. II. p.* 9.

sion anzudeuten, in welcher jede Schicht von 2 Ziffern 60 mal kleiner als die vorhergehende ist, wurden die Bruchstriche von Schicht zu Schicht vervielfältigt. Auf diese Weise erhielten die Minuten den einfachen Strich der gemeinen griechischen Brüche (deren Zähler die Einheit ist), die Secunden zwei solcher Striche, die Tertien drei, die Grade selbst, als das Ganze, keinen Strich, vielleicht als nichts (*ouden*) eine Null *). Ich sage vielleicht, denn im Ptolemäus und Théon fehlen noch Nullen als Gradzeichen.

In der einfachen Herzählung der verschiedenen Methoden, welche Völker, denen die indische Positions-Arithmetik unbekannt war, angewandt haben, um die *multipla* der Fundamental-Gruppen auszudrücken, liegt, glaube ich, die Erklärung von der allmäligen Entstehung des indischen Systems. Wenn man 3568 perpendiculär und horizontal durch Indicatoren schreibt: $\overset{3\ 5\ 6\ 8}{MCXI}$, so erkennt man leicht, dafs die Gruppenzeichen *M*, *C* . . . weggelassen werden können. Unsere indische Zahlen sind aber nichts anderes als die Multiplicatoren der verschiedenen Gruppen. An diese alleinige Bezeichnung durch Einheiten (Multiplicatoren) erinnert ohnedies der Suanpan, mit seinen aufeinanderfolgenden Schnüren der Tausende, Hunderte, Zehner und Einheiten. Diese Schnüre zeigten in dem gegebenen Falle 3, 5, 6 und 8 Kugeln. Hier ist kein Gruppenzeichen sichtbar. Die Gruppenzeichen sind die Stellen selbst, und diese Stellen (Schnüre) sind mit den Einheiten (Multiplicatoren) gefüllt. Auf beiden Wegen der figurativen (schreibenden) und palpablen (betastenden) Arithmetik gelangt man also zur indischen Position. Ist die Schnur leer, die Schicht im Schreiben offen, fehlt eine Gruppe (ein Glied der Progression), so wird die Leere graphisch durch den Hieroglyphen des Leeren, einen unausgefüllten Kreis: *Sunya, sifron, tzüphra* **) ausgefüllt.

---

*) Ueber Anwendung des Nullzeichens s. Leslie *p.* 12. 135. Kuithen, Germanen und Griechen *Hist.* 2. *p.* 2—33. Ducange *Glossar. mediae graecitatis T. II p.* 572. Mannert *de numerorum quos arabicos vocant origine.* Pythagor. p. 17. In der griechischen Arithmetik bedeutet M^{o} eine Einheit, *monas*, wie ein *delta* mit übergeschriebener Null (eigentlich *omicron*), *tetartos;* Bast, Gregor. Cor. *p.* 851. So ist beim Diophantus $M^{o}\varkappa a = 21$. Das indische grammatische Zeichen, *Anuswara*, hat allerdings die Form der indischen Null (*Sunya*). Es bezeichnet aber nur eine Modification in der Betonung des nahe stehenden Vocals und ist dem *Sunya* gänzlich fremd.

**) Im Englischen hat sich *cypher* für Null erhalten, da in den abendländischen Sprachen, welche *zéro* (*sifron siron*) für Null gebrauchen, Ziffer nur ein Zahlzeichen im Allgemeinen andeutet. Im Sanscrit heifst nach Wilson Zahl, Quantität: *sambhara.*

Für die successive Vervollkommnung der Zahlenbezeichnung in Indien sprechen die Tamul-Ziffern, die durch 9 Zeichen der Einheiten und durch Gruppenzeichen für 10, 100 oder 1000 alle Werthe mittelst der links zugefügten Multiplicatoren ausdrücken; dafür sprechen endlich die sonderbaren *arithmoi indikoi* im Scholion des Mönchs Neophytos, welches in der Pariser Bibliothek (*Cod. Reg. fol.* 15.) aufbewahrt wird, und dessen gütige Mittheilung ich Herrn Prof. Brandis verdanke. Die 9 Ziffern des Neophytos sind, aufser der 4, ganz den persischen ähnlich. Die Ziffern 1, 2, 3 und 9 finden sich sogar in ägyptischen Zahlen-Inschriften *). Die 9 Einheiten werden 10fach, 100fach, 1000fach erhöht, indem man eine, zwei oder drei Nullen darüber schreibt, gleichsam also: $\overset{\circ}{2} = 20$, $\overset{\circ}{24} = 24$, $\overset{\circ\circ}{5} = 500$, $\overset{\circ\circ}{6} = 6000$. Denken wir uns statt der Nullen Puncte, so haben wir die arabischen Gobar-Ziffern. Ich lasse hier das Scholion in einer wörtlichen lateinischen Uebersetzung folgen. Der Mönch nennt fälschlich *tzüphron* ein indisches Wort.

Tzyphra est et vocatur id, quod cuivis litterae inde a decade et insequentibus numeris quasi ὁμικρὸν inscribitur. Significat autem hac Indica voce tale analogiam numerorum. Ubi igitur scriptum est simile primae litterae ἄλφα, pro unitate scriptae, atque superimpositum habet vel punctum vel quasi ὁμικρὸν, addita altera figura litterae Indicae, differentiam et augmentum numerorum declarat. E. g. pro primo Graeco numero, ᾱ scripto, apud Indos | sive linea recta perpendicularis, quando non habet superimpositum punctum vel ὁμικρὸν, ipsum hoc denotat unitatem, ubi vero superimpositum sit punctum atque altera littera adscripta sit, figura quidem similis priori, significat XI, propter additamentum similis litterae atque superimpositum unum punctum. Similiter etiam in reliquis litteris, quemadmodum adspectus docet. Si vero plura habet puncta, plura denotat. Quod intelligas, lector, et supputes unumquidque.

Von Position ist hier nicht mehr zu erkennen als in der Gobar-Methode. Man schrieb 3006 also: $\overset{\circ}{\overset{\circ}{3}}6$; aber man mufste bald bemerken, dafs dieselben Ziffern mit anderen Werthen wiederkamen, dafs (wenn alle Gruppen ausgefüllt waren) in $\overset{\circ}{\overset{\circ}{3}}\ 4\ \overset{\circ}{\overset{\circ}{6}}\ \overset{\circ}{7}$ die so regelmäfsig abnehmen-

*) Kosegarten p. 54.

den Puncte oder Nullen überflüssig wurden. Diese Nullen erleichterten gleichsam nur das Aussprechen der Zahlen. Entstand die Gewohnheit, die Nullen statt über die Ziffern, neben dieselben zu schreiben, so hatte man die jetzige indische Bezeichnung für die ungemischte Gruppe $\overset{\circ}{\overset{\circ}{3}} = 3000$. Wollte man zu $\overset{\circ}{\overset{\circ}{3}}$ oder 3000, $\overset{\circ}{4} = 40$ addiren, so füllte man diejenige Null-Stelle aus, in welche 40, nach seinem die Gruppen-Stufe bezeichnenden Exponenten, hingehört. Man erhielt so: 3040 und von den 3 Nullen, welche den Tausenden eigenthümlich sind, und welche auf die Linie mit den Einheiten herabgezogen wurden, blieben zwei, als leere, unausgefüllte Stellen. Nach Neophytos Scholion sind also Nullen (wie Puncte im Gobar) Indicatoren für die Notation der aufsteigenden Gruppen, und man begreift, aus den eben entwickelten Betrachtungen, wie diese Nullen, bei Einführung des Stellenwerthes der Ziffern, in die Reihe herabkommen und sich dort erhalten konnten.

Wenn wir noch einmal den Blick auf die vielen, zum Theil so wenig bekannten, Notationsmethoden der Völker beider Continente zurückwerfen, so sehen wir 1° wenige Gruppenzeichen, und fast nur für n^2, n^3, n^4 ...., nicht für $2n$, $3n$, und $2n^2$, $2n^3$ .... wie bei Römern*) und Tuskern *X*, *C*, *M* (daher alle Zwischenstufen, z. B. $2n$ oder $2n^2$, durch Juxtaposition wie in *XX* oder *CCC* bezeichnet werden); 2° viele Gruppenzeichen nicht blofs für n, n^2 (*iota* und *rho* in den griechischen Buchstaben-Ziffern), sondern auch für $3n$ oder $4n^2$ (in λ und υ), woraus grofse Heterogenëität der einzelnen Elemente im Ausdruck für $2+2n+2n^2$ entstehet (z. E. σκβ für 222); 3° Bezeichnung der Vielfachen der Fundamental-Gruppe und ihrer Potenzen ($2n$, $3n$, $4n^2$, $5n^2$), entweder durch Hinzufügung (darüber und daneben) von Indicatoren zu den Gruppenzeichen (chinesisch: $\overset{2}{X}$, $\overset{3}{X}$, $\overset{4}{C}$, $\overset{5}{C}$; indisch-tamulisch $2X$, $3X$, $4C$, $5C$), oder durch stufenweise Bepunctung oder Accentuirung der ersten 9 Einheitszeichen, gleichsam $\dot{\alpha}$ für 10, $\dot{\beta}$ für 20, $\ddot{\alpha}$ für 100, $\dddot{\alpha}$ für 1000, $\ddot{\delta}$ für 40000, im Gobar, im Scholion des Neophytos, und in absteigender Sexagesimal-Scale der alexandrinischen Astronomen für $\frac{1}{60}$, $\frac{1}{60^2}$, $\frac{1}{60^3}$, in $1^\circ\ 37'\ 37''\ 37'''$ .... Wir haben gesehen, wie die Indicatoren (Multiplicatoren) der Ost-Asia-

*) Wir abstrahiren hier der Kürze wegen von den Gruppenzeichen des dazwischen laufenden quinaren Systems *V*, *L*, *D* ....

ten und Bewohner der südlichen und indischen Halb-Insel, oder, wenn ursprünglich Gruppenzeichen für n, n^2, n^3 verschieden waren, wie die Accentuirung der *Püthmenes* im Gobar-Systeme, oder Scholion des Neophytos, ja endlich wie die Kugelschnüre des Suampan, in dem ein potenzirter Werth nur durch relative Lage der Schnur ausgedrückt wird, zum Stellenwerthe führen konnten.

Ob das einfache indische Positions-System seinen Weg in die Abendländer durch den Aufenthalt des gelehrten Astronomen Rihan Muhammed ebn Ahmet Albiruni in Indien *), oder durch maurische Zollbeamte an der nord-afrikanischen Küste und den Verkehr der italienischen Kaufleute mit diesen Zollbeamten gefunden hat, lassen wir hier unentschieden. Eben so ungewifs ist es, trotz des Alters der indischen Cultur, ob das Positionssystem, welches so mächtig auf den Zustand der Mathematik eingewirkt hat, schon zur Zeit der macedonischen Expedition jenseits des Indus bekannt war. Wie ganz anders, vervollkommnet, würden Archimedes, Apollonius von Perga und Diophantos die mathematischen Wissenschaften dem gelehrten Zeitalter der Haschemiten überliefert haben, wenn die Abendländer, 12 oder 13 Jahrhunderte früher, also durch Alexanders Heerzüge, die indische Positions-Arithmetik empfangen hätten. Aber der von den Griechen durchzogene Theil von Vorder-Indien, das Penjab bis Palibothra hin, war, nach Herrn Lassen's gelehrten Untersuchungen, ein Wohnsitz wenig cultivirter Völker. Von den östlicher wohnenden wurden sie selbst Barbaren genannt. Erst Seleucus Nicator drang über die Grenze, welche Cultur und Uncultur schied, über den Flufs Sarasvatis **) bis zum Ganges vor. Wir sehen aus den alten indischen Tamul-Ziffern, die durch beigesetzte Multiplicatoren $2n$, $3n^2$ .... ausdrücken, und daher aufser den Zeichen für die ersten 9 Einheiten, eigene Zeichen für n, n^2, n^3 .... haben, dafs in Indien, neben dem fast allein sogenannten indischen (oder arabischen) Zahlen-Systeme mit Stellenwerth, auch andere, ohne Stellenwerth, gleichzeitig existirt haben. Vielleicht kamen Alexander und seine bactrischen Nachfolger bei ihrem tem-

*) Nach des gelehrten, der griechischen und arabischen Astronomie gleich kundigen Orientalisten Sedillot Bemerkung.

**) Lassen, *Comment. geogr. de Pentapot. p.* 58.

porären Vordringen nicht mit Nationen in Contact, bei welchen die Positions-Methode ausschliefslich vorherrschte.

Möchten die Spuren von dem Vielen, was noch zu entdecken übrig ist, recht bald ernster verfolgt werden, theils von Philologen, welche griechische, persische oder arabische *) Handschriften zu untersuchen Gelegenheit finden, theils von Reisenden, die sich in der indischen Halb-Insel selbst aufhalten. Die bloſse Pagination alter Codices aus der Sanscrit-Literatur kann zu merkwürdigen Beobachtungen führen. Wer würde z. B. geahndet haben, dafs es unter den Indiern, neben der Decimal-Positions-Arithmetik, ein Sedecimal-System ohne Position gab, dafs gewisse indische Stämme meist nach Gruppen von 16, wie die amerikanischen Völker, die Kymren und Basken, nach Gruppen von 20 zählten. Eine solche seltsame Numeration ist aber vor mehr als 10 Jahren in einem Codex des alt-indischen Gedichts *Mahabharata* (*Cod. Reg. Paris. p.* 178.) vom Herrn Professor Bopp aufgefunden, und mir zu der Zeit, als ich meine erste Abhandlung über die Zahlzeichen der Völker der *Académie des inscriptions et belles lettres* vorlegte, gütigst zur Bekanntmachung mitgetheilt worden. Fünf und sechszig Seiten dieser Handschrift sind mit indischen Buchstabenzahlen paginirt, doch so, dafs nur die Consonanten des Sanskrit-Alphabets (*k* für 1, *kh* für 2 ....) gebraucht werden, was dem bisher so allgemein verbreiteten Vorurtheile **) widerspricht, als fänden sich in Indien bloſs Ziffern, nicht Buchstaben als Ziffern gebraucht, wie bei semitischen Stämmen und den Griechen. Mit der 60sten Seite beginnt die wunderbare Sedecimal-Notation. Man erkennt in den ersten 15 *püthmenes* kaum zwei Zeichen, — die Sanskrit-Buchstaben sind etwa für 3 ein aspirirtes *t* und für 12 ein *d*, — eben so wenig die eigentlich sogenannten indischen

---

*) Unter den arabischen Handschriften sind besonders solche zu empfehlen, welche vom Zoll- und Finanzwesen, oder von der Arithmetik im Allgemeinen handeln, z. B. Abu Jose Alchindus *de arithmetica indica;* Abdelhamid Ben Vasee Abulphadl, *de numerorum proprietaibus;* Ahmad Ben Omar Alkarabisi *liber de indica numerandi ratione;* die indische Algebra des Katka; Mohammed Ben Lara *de numerorum disciplina* (Casiri *Bibl. arabico-hispana T. I. p.* 353. 405. 410. 426. 433.)

**) *Si l'arithmétique de position n'est pas originaire de l'Inde, elle doit au moins y avoir existé de tems immémorial; car on ne trouve chez les Indiens aucune trace d'une notation alphabétique telle que la notation des Hébreux, des Grecs et des Arabes* (Delambre *Hist. de l'astron. ancienne T. I. p.* 543.).

(arabischen) Zeichen. Merkwürdig ist, dafs die Ziffer 1 mit einer beigesetzten Null 4, die Ziffer 1 doppelt (zwei senkrechte Striche) mit einer beigesetzten Null 8 bedeuten, gleichsam Ruhepuncte, Mittelstufen des Sedecimal-Systems für $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{2}n$; aber $\frac{3}{4}$ von n (12) ist ohne Null und hat eine eigene Hieroglyphe, der arabischen 4 ähnlich. Für die Normalgruppe selbst, 16, und für die *multipla* der Normalgruppe: $2n$, $3n$ .... werden die bekannten bengalischen Ziffern gebraucht, so dafs 16 die bengalische 1 mit einem vorgesetzten gekrümmten Striche; 32 die bengalische 2; 48 die bengalische 3 ist. Die *multipla* von n sind also blofs wie Gruppen erster, zweiter, dritter .... Ordnung; die Zahlen $2n+4$ oder $3n+6$ (d. i. im Sedecimal-System 36 und 54) sind durch eine bengalische 2 und eine beigefügte Mahabharata-Ziffer*) 4, wie durch eine bengalische Ziffer 3 und eine beigefügte Mahabharata-Ziffer 6 bezeichnet: eine zwar sehr regelmäfsige, aber unbehülflich verwickelte Art zu numeriren, deren Ursprung um so räthselhafter ist, da sie die Kenntnifs der bengalischen Ziffern voraussetzt.

*) Ich bediene mich hier dieses uneigentlichen Ausdruckes, blofs um das Zahlen-System, welches eine Abschrift des Gedichts darbietet, mit einem passenden Worte zu bezeichnen.

18.

Über ein neues allgemeines Grundgesetz der Mechanik.

(Vom Herrn Hofrath und Prof. Dr. *Gaufs* zu Göttingen.)

Bekanntlich verwandelt das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten die ganze Statik in eine mathematische Aufgabe, und durch Dalembert's Princip für die Dynamik ist diese wiederum auf die Statik zurückgeführt. Es liegt daher in der Natur der Sache, dafs es kein neues Grundprincip für die Bewegungs- und Gleichgewichts-Lehre geben kann, welches der Materie nach nicht in jenen beiden schon enthalten und aus ihnen abzuleiten wäre. Inzwischen scheint doch wegen dieses Umstandes noch nicht jedes neue Princip werthlos zu werden. Es wird allezeit interessant und lehrreich bleiben, den Naturgesetzen einen neuen vortheilhaften Gesichtspunkt abzugewinnen, sei es, dafs man aus demselben diese oder jene einzelne Aufgabe leichter auflösen könne, oder dafs sich aus ihm eine besondere Angemessenheit offenbare. Der grofse Geometer, der das Gebäude der Mechanik auf dem Grunde des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten, auf eine so glänzende Art aufgeführt hat, hat es nicht verschmäht, Maupertuis Princip der kleinsten Wirkung zu gröfserer Bestimmtheit und Allgemeinheit zu erheben, ein Princip, dessen man sich zuweilen mit vielem Vortheil bedienen kann *).

Der eigenthümliche Charakter des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten besteht darin, dafs es eine allgemeine Formel zur Auflösung aller statischen Aufgaben, und so der Stellvertreter aller andern Principe ist, ohne jedoch das Creditiv dazu so unmittelbar aufzuweisen,

*) Es sei mir jedoch hier die Bemerkung erlaubt, dafs ich die Art, wie ein anderer grofser Geometer versucht hat, Huyghens Gesetz für die aufserordentliche Brechung des Lichts in Krystallen von doppelter Brechung, vermittelst des Grundsatzes der kleinsten Wirkung zu beweisen, nicht befriedigend finde. In der That ist die Zulässigkeit dieses Grundsatzes wesentlich von dem der Erhaltung der lebendigen Kräfte abhängig, nach welchem die Geschwindigkeiten der bewegten materiellen Punkte blofs durch ihre Plätze bedingt werden, ohne dafs die Richtung der Bewegung Einflufs darauf haben kann, was doch in dem erwähnten Versuch vorausgesetzt wird. Es scheint mir, dafs im Emanationssystem alle Bemühungen, die Erscheinungen der doppelten Brechung an die allgemeinen dynamischen Gesetze anzuknüpfen, so lange erfolglos bleiben müssen, als man die Lichttheilchen blofs wie Punkte betrachtet. Anm. d. Verf.

dafs es sich, so wie es nur ausgesprochen wird, schon von selbst als plausibel empföhle.

In dieser Beziehung scheint das Princip, welches ich hier aufstellen werde, den Vorzug zu haben: es hat aber auch den zweiten, dafs es das Gesetz der Bewegung und der Ruhe auf ganz gleiche Art in gröfster Allgemeinheit umfafst. So sehr es in der Ordnung ist, dafs bei der allmäligen Ausbildung der Wissenschaft und bei der Belehrung des Individuum das Leichtere dem Schwerern, das Einfachere dem Verwickeltern, das Besondere dem Allgemeinen vorangeht, so fordert doch der Geist, einmal auf dem höhern Standpuncte angelangt, den umgekehrten Gang, wobei die ganze Statik nur als ein ganz specieller Fall der Mechanik erscheine. Selbst der oben erwähnte Geometer scheint darauf Werth zu legen, indem er als einen Vorzug des Princips der kleinsten Wirkung ansieht, dafs es das Gleichgewicht und die Bewegung zugleich umfasse, wenn man jenes so ausdrücke, dafs die lebendigen Kräfte bei beiden Kleinste seien, eine Bemerkung, die doch mehr witzig als wahr zu sein scheint, da das Minimum in beiden Fällen in ganz verschiedener Beziehung Statt findet.

Das neue Princip ist nun folgendes.

Die Bewegung eines Systems materieller, auf was immer für eine Art unter sich verknüpfter Punkte, deren Bewegungen zugleich an was immer für äufsere Beschränkungen gebunden sind, geschieht in jedem Augenblick in möglich gröfster Übereinstimmung mit der freien Bewegung, oder unter möglich kleinstem Zwange, indem man als Maafs des Zwanges, den das ganze System in jedem Zeittheilchen erleidet, die Summe der Produkte aus dem Quadrate der Ablenkung jedes Punkts von seiner freien Bewegung in seine Mafse betrachtet.

Es seien m, m', m'' u. s. w. die Massen der Punkte; a, a', a'' u. s. w. ihre Plätze zur Zeit t; b, b', b'' u. s. w. die Plätze, welche sie, nach dem unendlich kleinen Zeittheilchen $\mathrm{d}t$, in Folge der während dieser Zeit auf sie wirkenden Kräfte und der zur Zeit t erlangten Geschwindigkeiten und Richtungen, einnehmen würden, falls sie alle vollkommen frei wären. Die wirklichen Plätze c, c', c'' u. s. w. werden dann diejenigen sein, für welche, unter allen mit den Bedingungen des Systems vereinbaren, $m(bc)^2 + m'(b'c')^2 + m''(b''c'')^2$ u. s. w. ein Minimum wird.

Das Gleichgewicht ist offenbar nur ein einzelner Fall des allgemeinen Gesetzes, und die Bedingung dafür, dafs

$$m(ab)^2 + m'(a'b')^2 + m''(a''b'')^2 \text{ u. s. w.}$$

selbst ein Minimum sei, oder dafs das Beharren des Systems im Zustande der Ruhe, der freien Bewegung der einzelnen Punkte näher liege, als jedes mögliche Heraustreten aus demselben.

Die Ableitung unsers Princips aus den beiden oben angeführten geschieht leicht auf folgende Art.

Die auf den materiellen Punkt m wirkende Kraft ist offenbar zusammengesetzt, erstens aus einer, die, in Verbindung mit der zur Zeit t Statt habenden Geschwindigkeit und Richtung, ihn in der Zeit dt von a nach c führt, und einer zweiten, die ihn in derselben Zeit aus der Ruhe in c, durch cb führen würde, wenn man den Punkt als frei betrachtet. Dasselbe gilt von den andern Punkten. Nach Dalembert's Princip müssen demnach die Punkte m, m', m'' u. s. w., unter alleiniger Wirkung der zweiten Kräfte, nach cb, $c'b'$, $c''b''$ u. s. w., in den Plätzen c, c', c'' u. s. w., vermöge der Bedingungen des Systems, im Gleichgewicht sein.

Nach dem Princip der virtuellen Geschwindigkeiten erfordert dies Gleichgewicht, dafs die Summe der Producte aus je drei Factoren, nemlich jeder der Massen m, m', m'' u. s. w., den Linien cb, $c'b'$, $c''b''$ u. s. w., und irgend welchen auf letztere resp. projicirten, vermöge der Bedingungen des Systems möglichen Bewegungen jener Punkte, immer $= 0$ sei, wie man es gewöhnlich ausspricht *), oder richtiger, dafs jene Summe niemals positiv werden könne. Sind daher γ, γ', γ'' u. s. w. von c, c', c'' u. s. w. verschiedene, aber mit den Bedingungen des Systems verträgliche Plätze; und θ, θ', θ'' u. s. w. die Winkel, welche $c\gamma$,

---

*) Der gewöhnliche Ausdruck setzt stillschweigend solche Bedingungen voraus, dafs die jeder möglichen Bewegung entgegengesetzte gleichfalls möglich sei, wie z. B., dafs ein Punkt auf einer bestimmten Fläche zu bleiben genöthigt, dafs die Entfernung zweier Punkte von einander unveränderlich sei u. dergl. Allein dies ist eine unnöthige und der Natur nicht immer angemessene Beschränkung. Die Oberfläche eines undurchdringlichen Körpers zwingt einen auf ihr befindlichen materiellen Punct nicht, auf ihr zu bleiben, sondern verwehrt ihm blofs das Austreten auf die Eine Seite; ein gespannter, nicht ausdehnbarer aber biegsamer Faden zwischen zwei Punkten macht nur die Zunahme, nicht die Abnahme der Entfernung unmöglich u. s. w. Warum wollten wir also das Gesetz der virtuellen Geschwindigkeiten nicht lieber gleich anfangs so ausdrücken, dafs es alle Fälle umfafst?
Anm. d. Verf.

$c'\gamma'$, $c''\gamma''$ u. s. w. mit cb, $c'b'$, $c''b''$ u. s. w. machen, so ist allemal $\Sigma m.cb.c\gamma.\cos\theta$ entweder 0 oder negativ. Da nun

$$\gamma b^2 = cb^2 + c\gamma^2 - 2cb.c\gamma.\cos\theta,$$

so ist klar, dafs

$$\Sigma m.\gamma b^2 - \Sigma m.cb^2 = \Sigma m.c\gamma^2 - 2\Sigma.m.cb.c\gamma.\cos\theta,$$

folglich immer positiv sein wird, also $\Sigma m.\gamma b^2$ immer gröfser als $\Sigma m.cb^2$, d. i. dafs $\Sigma m.cb^2$ ein Minimum sein wird. W. Z. B. W.

Es ist sehr merkwürdig, dafs die freien Bewegungen, wenn sie mit nothwendigen Bedingungen nicht bestehen können, von der Natur gerade auf dieselbe Art modificirt werden, wie der rechnende Mathematiker, nach der Methode der kleinsten Quadrate, Erfahrungen ausgleicht, die sich auf unter einander durch nothwendige Abhängigkeit verknüpfte Gröfsen beziehen. Diese Analogie liefse sich noch weiter verfolgen, was jedoch gegenwärtig nicht zu meiner Absicht gehört.

19.

Précis d'une théorie des fonctions elliptiques.

(Par Mr. *N. H. Abel* de Christiania.)

Introduction.

La théorie des fonctions elliptiques, créée par Mr. Legendre, forme une des parties les plus intéressantes de l'analyse. Ayant essayé de donner de nouveaux développemens à cette théorie, je suis, si je ne me trompe, parvenu à plusieurs résultats qui me paraissent mériter quelque attention. Surtout j'ai cherché à donner de la généralité à mes recherches, en me proposant des problèmes d'une vaste étendue. Si je n'ai été assez heureux de les resoudre complètement, au moins j'ai proposé les moyens pour y parvenir. L'ensemble de mes recherches sur cet objet formera un ouvrage de quelque étendue, mais que les circonstances ne me permettent pas encore de publier. C'est pourquoi je vais donner ici un Précis de la méthode que j'ai suivie, avec les résultals généraux, auxquelles elle m'a conduit. Ce mémoire sera divisé en deux parties.

Dans la première je considère les fonctions elliptiques comme intégrales indéfinies, sans rien y ajouter sur la nature des quantités réelles ou imaginaires, qui les composent. Je me servirai des notations suivantes:

$$\Delta(x, c) = \pm\sqrt{[(1-x^2)(1-c^2x^2)]},$$

$$\varpi(x, c) = \int \frac{\partial x}{\Delta(x, c)},$$

$$\varpi_0(x, c) = \int \frac{x^2\,\partial x}{\Delta(x, c)},$$

$$\Pi(x, c, a) = \int \frac{\partial x}{\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\Delta(x, c)},$$

en sorte que

$$\varpi(x, c),\quad \varpi_0(x, c),\quad \Pi(x, c, a)$$

désignent respectivement les fonctions de première, de seconde et de troisième espèce.

Puis je me suis proposé ce problème général: „Trouver tous les cas possibles dans lesquels on peut satisfaire à une équation de la forme:

$$(a.)\quad \begin{cases} \alpha_1 . \varpi(x_1, c_1) + \alpha_2 . \varpi(x_2, c_2) + \ldots . + \alpha_n . \varpi(x_n, c_n) \\ + \alpha'_1 . \varpi_0(x'_1, c'_1) + \alpha'_2 . \varpi_0(x'_2, c'_2) + \ldots . + \alpha'_m . \varpi_0(x'_m, c'_m) \\ + \alpha''_1 . \Pi(x''_1, c''_1, a_1) + \alpha''_2 . \Pi_0(x''_2, c''_2, a_2) + \ldots . + \alpha''_\mu \Pi(x''_\mu, c''_\mu) \\ = u + A_1 \log v_1 + A_2 \log v_2 + \ldots . + A_\nu \log v_\nu , \end{cases}$$

où

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots . \alpha_n ; \quad \alpha'_1, \alpha'_2, \ldots . \alpha'_m ;$$
$$\alpha''_1, \alpha''_2, \ldots . \alpha''_\mu ; \quad A_1, A_2, \ldots . A_\nu$$

sont des quantités constantes, $x_1, x_2, \ldots . x_n ; \; x'_1, x'_2, \ldots . x'_m ;$ $x''_1, x''_2, \ldots . x''_\mu$ des variables liées entre-elles par des équations algébriques, et $u, v_1, v_2, \ldots . v_\nu$ des fonctions algébriques de ces variables."

J'établie d'abord les propriétés fondamentales des fonctions elliptiques, ou ce qui concerne leur sommation, en faisant usage d'une méthode particulière, qui en même tems est applicable avec la même facilité à une infinité d'autres transcendantes plus compliquées. En m'appujant sur ces propriétés fondamentales, je considère ensuite l'équation dans toute sa généralité et je fais le premier pas à mon but en démontrant un théorème général sur la forme qu'on pourra donner à l'intégrale d'une fonction algébrique quelconque, en supposant cette intégrale exprimable par des fonctions algébriques, logarithmiques et elliptiques, théorème qui est d'un grand usage dans tout le calcul intégral, à cause de sa grande généralité.

J'en tire, comme corollaire, le théorème suivant:

„Si $\int \frac{r \partial x}{\Delta(x, c)}$, où r est une fonction rationnelle quelconque de x, est exprimable par des fonctions algébriques et logarithmiques et par les fonctions elliptiques $\psi, \psi_1, \psi_2, \ldots .$, on pourra toujours supposer

$$(b.)\quad \int \frac{r \partial x}{\Delta(x, c)} = p \Delta(x, c) + \alpha . \psi(y) + \alpha' \psi_1(y_1) + \alpha'' . \psi_2(y_2) + \ldots .$$
$$\ldots . + A_1 \log \left\{ \frac{q_1 + q'_1 . \Delta(x, c)}{q_1 - q'_1 . \Delta(x, c)} \right\} + A_2 \log \left\{ \frac{q_2 + q'_2 . \Delta(x, c)}{q_2 - q'_2 . \Delta(x, c)} \right\} + \ldots .$$

où toutes les quantités $p, q_1, q_2, \ldots . q'_1, q'_2, \ldots . y, y_1, y_2, \ldots .$ sont des fonctions rationnelles de x *)."

De ce théorème je tire ensuite celui ci:

„Si une équation quelconque de la forme (*a.*) a lieu, et qu'on dé-

*) Ce théorème a également lieu, si $\Delta(x, c)$ est la racine carrée d'une fonction entière d'un degré quelconque.

signe par c un quelconque des modules qui y entrent; il y en aura parmi les autres au moins un module c' tel, qu'on puisse satisfaire à l'équation différentielle:

$$\frac{\partial y}{\triangle(y, c')} = \varepsilon . \frac{\partial x}{\triangle(x, c)},$$

en mettant pour y une fonction rationnelle de x, et vice versa."

Ces théorèmes sont très importans dans la théorie des fonctions elliptiques. Ils reduisent la solution du problème général à celle de satisfaire de la manière la plus générale à l'équation

$$\frac{\partial y}{\triangle(y, c')} = \varepsilon . \frac{\partial x}{\triangle(x, c)},$$

où à la transformation des fonctions de première espèce. Je donne la solution complète de ce problème, et j'en tire ensuite la transformation générale des fonctions de première espèce. Je fais voir que les modules doivent nécessairement être liés entre eux par une équation algébrique. On peut se contenter de considérer le cas, où le degré de la fonction y est un nombre premier, en y comprenant l'unité. Si ce degré est désigné par μ, c' pourra avoir $6(\mu+1)$ valeurs différentes, excepté pour $\mu = 1$, où ce nombre se réduit à 6.

La seconde partie traite les fonctions à modules réels et moindres que l'unité. Au lieu des fontions $\varpi(x, c)$, $\varpi_0(x, c)$, $\Pi(x, c, a)$ j'en introduis trois autres, savoir d'abord la fonction $\lambda(\theta)$, dèterminée par l'équation

$$\theta = \int_0^{\lambda\theta} \frac{\partial x}{\triangle(x, c)}.$$

C'est la fonction inverse de la première espèce. En mettant $x = \lambda\theta$ dans les expressions de $\varpi_0(x, c)$, $\Pi(x, c, a)$, elles deviendront de la forme:

$$\varpi_0(x, c) = \int (\lambda\theta)^2 . \partial\theta;$$

$$\Pi(x, c, a) = \int \frac{\partial\theta}{1 - \frac{\lambda^2\theta}{a^2}}.$$

Mises sous cette forme, les fonctions elliptiques offrent des propriétés très remarquables, et sont beaucoup plus traitables. C'est surtout la fonction $\lambda\theta$, qui mérite une attention particulière. Cette fonction a été l'objet d'un mémoire, inséré dans les tomes 2. et 3. de ce journal, où j'en ai démontré le premier quelques-unes de ses propriétés fondamentales. On en trouvera d'avantage dans ce mémoire. Je vais indiquer rapidement quelques-uns des résultats auxquels je suis parvenu:

1. La fonction $\lambda\theta$ jouit de la propriété remarquable d'être périodique de deux manières différentes, savoir non seulement pour des valeurs réelles de la variable, mais encore pour des valeurs imaginaires. En effet si l'on fait pour abréger

$$\frac{\varpi}{2} = \int_0^1 \frac{\partial x}{\triangle(x,c)}; \quad \frac{\omega}{2} = \int_0^1 \frac{\partial x}{\triangle(x,b)},$$

où $b = \sqrt{(1-c^2)}$ et $\sqrt{-1} = i$, on aura:

$$\lambda(\theta + 2\varpi) = \lambda\theta; \quad \lambda(\theta + \omega i) = \lambda\theta.$$

2. La fonction $\lambda\theta$ devient égale à zéro et à l'infini, pour une infinité de valeurs réelles et imaginaires de θ, savoir pour les valeurs

$$\lambda(m\varpi + n\omega i) = 0, \quad \lambda[m\varpi + (n+\tfrac{1}{2})\omega i] = \tfrac{1}{c},$$

où m et n sont des nombres entiers quelconques, positifs ou négatifs. De même on a

$$\lambda\theta' = \lambda\theta,$$

si $\theta' = (-1)^m\theta + m\varpi + n\omega i$; mais cette relation est nécessaire.

3. La propriété fondamentale de $\lambda\theta$ est exprimée par l'équation

$$\lambda(\theta' + \theta).\lambda(\theta' - \theta) = \frac{(\lambda\theta')^2 - (\lambda\theta)^2}{1 - c^2(\lambda\theta)^2(\lambda\theta')^2},$$

où θ' et θ sont des variables quelconques, réelles ou imaginaires.

4. La fonction $\lambda\theta$ pourra se développer en facteurs et en fractions de beaucoup de manières; par exemple si l'on fait pour abréger

$$q = e^{-\frac{\omega}{\varpi}}, \quad p = e^{-\frac{\varpi}{\omega}},$$

on a:

$$\lambda(\theta\varpi)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{c}}\sqrt[4]{q}.\sin(\pi\theta)\frac{[1-2q^2.\cos(2\theta\pi)+q^4][1-2q^4.\cos(2\theta\pi)+q^8][1-2q^6.\cos(2\theta\pi)+q^{12}]....}{[1-2q\cos(2\theta\pi)+q^2][1-2q^3.\cos(2\theta\pi)+q^6][1-2q^5.\cos(2\theta\pi)+q^{10}]....}$$

$$= \frac{4\sqrt{q}}{c}.\frac{\pi}{\varpi}.\left\{\frac{1}{1-q}.\sin(\theta\pi) + \frac{q}{1-q^3}.\sin(3\theta\pi) + \frac{q^2}{1-q^5}.\sin(5\theta\pi) + ...\right\},$$

$$\lambda\left(\frac{\varpi}{2} - \theta\omega\right) = \frac{1}{\sqrt{c}}.\frac{(1-p.e^{-2\pi\theta})(1-p.e^{2\pi\theta})(1-p^3.e^{-2\pi\theta})(1-p^3.e^{2\pi\theta})....}{(1+p.e^{-2\pi\theta})(1+p.e^{2\pi\theta})(1+p^3.e^{-2\pi\theta})(1+p^3.e^{-2\pi\theta})....}.$$

On pourra exprimer d'une manière analogue la fonction de seconde et troisième espèce.

Les deux formules précédentes sont au fond les mêmes que les formules ci-dessus.

5. Une des propriétés les plus fécondes de la fonction $\lambda\theta$ est la suivante:

(On a fait pour abréger: $\triangle\theta = \pm\sqrt{[(1-\lambda^2\theta)(1-c^2\lambda^2\theta)]}$.)

„Si l'équation

$$(\lambda\theta)^{2n}+a_{n-1}(\lambda\theta)^{2n-2}+\ldots+a_1(\lambda\theta)^2+a_0=[b_0\lambda\theta+b_1(\lambda\theta)^3+\ldots+b_{n-2}(\lambda\theta)^{2n-3}]\triangle\theta$$

est satisfaite, en mettant pour θ, $2n$ quantités θ_1, θ_2, . . . θ_{2n}, telles, que $(\lambda\theta_1)^2$, $(\lambda\theta_2)^2$, ... $(\lambda\theta_{2n})^2$ soient différents entre-elles, on aura toujours:

$$\lambda(\theta_1+\theta_2+\ldots.+\theta_{2n}) = 0,$$

$$-\lambda(\theta_{2n}) = +\lambda(\theta_1+\theta_2+\ldots.+\theta_{2n-1}) = \frac{a_0}{\lambda\theta_1.\lambda\theta_2\ldots.\lambda\theta_{2n-1}};$$

les coëfficiens a_0, a_1, ..., b_0, b_1, ... pourront être quelconques, et il est facile de voir qu'on pourra les déterminer de sorte que θ_1, θ_2, . . . θ_{2n-1} sont donnés."

Voilà une autre propriété plus générale:

„Si l'on fait

$$p^2-q^2(1-x^2)(1-c^2x^2) = A(x-\lambda\theta_1)(x-\lambda\theta_2)\ldots.(x-\lambda\theta_\mu),$$

où p et q sont des fonctions entières quelconques de la quantité indéterminée x, on pourra toujours supposer les quantités θ_1, θ_2, ... θ_μ de la sorte que l'expression

$$\lambda(\theta_1+\theta_2+\theta_3+\ldots.+\theta_\mu)$$

soit égale à zéro ou à l'infini."

Ainsi p. ex., si

$$p^2-q^2(1-x^2)(1-c^2x^2) = A(x^2-\lambda^2\theta)^\mu,$$

où l'une des fonctions p et q est paire et l'autre impaire, on aura

1) si p est pair:

$$\lambda(\mu\theta) = 0, \text{ si } \mu \text{ est pair et}$$
$$\lambda(\mu\theta) = \tfrac{1}{0}, \text{ si } \mu \text{ est impair;}$$

2) si p est impair:

$$\lambda(\mu\theta) = 0, \text{ si } \mu \text{ est impair et}$$
$$\lambda(\mu\theta) = \tfrac{1}{0}, \text{ si } \mu \text{ est pair.}$$

Delà il suit encore que, si l'équation a lieu, on aura toujours:

$$\lambda\theta = \lambda\left(\frac{m\varpi+\frac{1}{2}n\omega i}{\mu}\right),$$

où m et n sont entiers et moindres que μ.

6. Il existe entre les quantités $\lambda\left(\frac{m\varpi+n\omega i}{2\mu+1}\right)$ et les racines $(2\mu+1)^{\text{mes}}$ de l'unité des relations bien remarquables, savoir si l'on fait pour abréger:

$$\delta = \cos\frac{2\pi}{2\mu+1}+\sqrt{-1}.\sin\frac{2\pi}{2\mu+1},$$

on aura, quels que soient les nombres entiers n et μ:

$$0 = \lambda\left(\frac{2m\varpi+\omega i}{2\mu+1}\right)+\delta^{k}.\lambda\left(\frac{2m\varpi+2\omega i}{2\mu+1}\right)+\delta^{2k}.\lambda\left(\frac{2m\varpi+3\omega i}{2\mu+1}\right)+\ldots.$$
$$\ldots.+\delta^{2\mu k}.\lambda\left(\frac{2m\varpi+2\mu\omega i}{2\mu+1}\right),$$
$$0 = \lambda\left(\frac{\varpi+m\omega i}{2\mu+1}\right)+\delta^{k'}.\lambda\left(\frac{2\varpi+m\omega i}{2\mu+1}\right)+\delta^{2k'}.\lambda\left(\frac{3\varpi+m\omega i}{2\mu+1}\right)+\ldots.$$
$$\ldots.+\delta^{2\mu k'}.\lambda\left(\frac{2\mu\varpi+m\omega i}{2\mu+1}\right).$$

D'ailleurs toutes les quantités $\lambda\left(\frac{m\varpi+n\omega i}{2\mu+1}\right)$ .... sont les racines d'une même équation du degré $(2\mu+1)^2$ et dont les coëfficiens sont des fonctions rationnelles de c^2.

7. Si la fonction

$$\int\frac{\partial x}{\triangle(x,c)},$$

dont le module c est réel et moindre que l'unité, peut être transformée dans une autre:

$$\varepsilon\int\frac{\partial y}{\triangle(y,c')},$$

dont le module c' est réel ou imaginaire, en mettant pour y une fonction algébrique quelconque de x, il faut nécessairement que le module c' soit déterminé par l'une des deux équations:

$$\sqrt[4]{c'} = \sqrt{2}.\sqrt[8]{q_1}.\frac{(1+q_1^2)(1+q_1^4)(1+q_1^6)\ldots.}{(1+q_1)(1+q_1^3)(1+q_1^5)\ldots.},$$
$$\sqrt[4]{c'} = \frac{1-q_1}{1+q_1}.\frac{1-q_1^3}{1+q_1^3}.\frac{1-q_1^5}{1+q_1^5}\ldots.$$

où $q_1 = q^\mu$, μ étant rationnel; ou ce qui revient au même:

$$q_1 = e^{\left(\mu\frac{\omega}{\varpi}+\mu' i\right)\pi},$$

μ et μ' étant des nombres rationnels quelconques.

8. La théorie de la transformation devient très facile à l'aide des propriétés les plus simples de la fonction $\lambda\theta$. Pour en donner un exemple, soit proposé le problème: satisfaire de la manière la plus générale à l'équation

$$\frac{\partial y}{\triangle(y,c')} = \varepsilon.\frac{\partial x}{\triangle(x,c)},$$

en supposant c et c' moindres que l'unité et y fonction rationnelle, réelle ou imaginaire de x.

Soit $x=\lambda\theta$, $y=\lambda'\theta'$, en désignant par λ' la fonction qui répond au module c'. L'équation différentielle se changera dans ce cas en $\partial\theta'=\varepsilon\partial\theta$, d'où

$$\theta' = \varepsilon\theta + a,$$

a étant une constante. Celà posé, soit

$$y = \frac{\varphi x}{f x},$$

on aura

$$\lambda'(\varepsilon\theta + a) = \frac{\varphi(\lambda\theta)}{f(\lambda\theta)}.$$

En mettant $\theta + 2\varpi$, $\theta + \omega i$ au lieu de θ, $\lambda\theta$ ne change pas de valeur et par conséquent on doit avoir:

$$\lambda'(\varepsilon\theta + 2\varepsilon\varpi + a) = \lambda'(\varepsilon\theta + a),$$
$$\lambda'(\varepsilon\theta + \varepsilon\omega i + a) = \lambda'(\varepsilon\theta + a).$$

Donc, si l'on désigne par ϖ' et ω' les valeurs de ϖ et ω qui répondent au module c', on aura en vertu de (2.):

$$2\varepsilon\varpi = 2m\varpi' + n\omega' i,$$
$$\varepsilon\omega i = 2m'\varpi' + n'\omega' i,$$

ce qui donne

$$\varepsilon = m.\frac{\varpi'}{\varpi} + \frac{n}{2}.\frac{\omega'}{\varpi} i = n'\frac{\omega'}{\omega} - 2m'\frac{\varpi'}{\omega} i,$$

donc:

$$m\frac{\varpi'}{\varpi} = n'\frac{\omega'}{\omega}; \quad \frac{n}{2}.\frac{\omega'}{\varpi} = -2m'\frac{\varpi'}{\omega},$$

ou bien:

$$\frac{\varpi'}{\omega'} = \frac{n'}{m}.\frac{\varpi}{\omega} = -\frac{n}{4m'}.\frac{\omega}{\varpi}.$$

Maintenant, si c est indéterminé, cette équation ne pourra subsister à moins qu'on n'ait ou $n = 0$, $m' = 0$, ou $n' = 0$, $m = 0$. Dans le premier cas ε est réel et

$$= m\frac{\varpi'}{\varpi} = n'.\frac{\omega'}{\omega},$$

et dans le second cas ε est imaginaire et

$$= \frac{n}{2}.\frac{\omega'}{\varpi} i = -2m'\frac{\varpi'}{\omega} i.$$

Supposons ε réel. Alors on aura ce théorème:

„Si deux fonctions réelles peuvent être transformées l'une en l'autre, il faut qu'on ait entre les fonctions complètes ϖ, ω, ϖ', ω' cette relation:

$$\frac{\varpi'}{\omega'} = \frac{n'}{m}.\frac{\varpi}{\omega},$$

où n' et m sont des nombres entiers."

On pourra démontrer que si cette condition est remplie, on pourra effectivement satisfaire à l'équation

$$\int \frac{\partial y}{\Delta(y, c')} = m.\frac{\varpi'}{\varpi}.\int \frac{\partial x}{\Delta(x, c)}.$$

Rien n'est plus simple que de trouver l'expression de y. Il suffit pour cela de chercher les racines des deux équations $\varphi x = 0$, $fx = 0$.

Désignons par $\lambda\delta$ et $\lambda\delta'$ une racine quelconque de ces deux équations, on aura, pour déterminer δ et δ', ces deux équations:

$$\lambda'(\varepsilon\delta + a) = 0; \quad \lambda'(\varepsilon\delta' + a) = \tfrac{1}{0}:$$

ce qui donne:

$$\delta = -a + \frac{k}{\varepsilon}\varpi' + \frac{k'}{\varepsilon}\omega' i; \quad \delta = -a + \frac{k}{\varepsilon}\varpi' + (k' + \tfrac{1}{2})\frac{\omega'}{\varepsilon} i,$$

c'est-à-dire:

$$\delta = -a + \frac{k}{m}\varpi + \frac{k'}{n'}\omega i; \quad \delta' = -a + \frac{k}{m}\varpi + (k' + \tfrac{1}{2})\frac{\omega}{n'} i,$$

k et k' étant des nombres entiers. Pour trouver a, il suffit de remarquer que $\lambda\theta$ ne change pas de valeur en mettant $\varpi - \theta$ au lieu de θ. On aura donc

$$\lambda'(\varepsilon\varpi - \varepsilon\theta + a) = \lambda'(\varepsilon\theta + a),$$

ce qui donne

$$a = \tfrac{1}{2}\{2\mu + 1 - m)\varpi_1 + \mu'\omega_1 i\}.$$

Dans le cas où m est impair, on pourra toujours faire $a = 0$.

Connoissant les valeurs de δ et δ', on aura immédiatement les racines des deux équations $\varphi x = 0$, $fx = 0$, et par suite l'expression des fonctions φx et fx en factorielles. Les formules les plus simples répondent aux cas de $m = 1$ ou $n' = 1$, et elles sont les seules dont il s'agit, comme il est aisé de voir par l'équation $\frac{\varpi'}{\omega'} = \frac{n'}{m} \cdot \frac{\varpi}{\omega}$. On pourra aussi se servir des expressions de la fonction $\lambda\theta$ en produits infinis rapportées plus haut. J'ai fait voir cela dans un mémoire, présenté à M. Schumacher pour son journal.

9. Le cas où un des modules c peut être transformé en son complément $\sqrt{(1 - c^2)} = b$, mérite une attention particulière. En vertu de l'équation $\frac{\varpi'}{\omega'} = \frac{n}{m} \cdot \frac{\varpi}{\omega}$, on aura dans ce cas

$$\frac{\varpi}{\omega} = \sqrt{\left(\frac{m}{n}\right)} \text{ et } \frac{\partial y}{\triangle(y, b)} = \sqrt{(m \cdot n)} \cdot \frac{\partial x}{\triangle(x, c)}.$$

Le module c sera déterminé par une équation algébrique qui paroit être résoluble par les radicaux; au moins cela aura lieu effectivement si $\frac{m}{n}$ est un carré parfait. Dans tous les cas il est facile d'exprimer c par des produits infinis. En effet, si $\frac{\varpi}{\omega} = \sqrt{\left(\frac{m}{n}\right)}$, on a:

$$\sqrt[4]{c} = \sqrt{2}.e^{-\frac{1}{8}\pi\sqrt{\left(\frac{m}{n}\right)}}.\frac{\left(1+e^{-2\pi\sqrt{\left(\frac{m}{n}\right)}}\right)\left(1+e^{-4\pi\sqrt{\left(\frac{m}{n}\right)}}\right)....}{\left(1+e^{-\pi\sqrt{\left(\frac{m}{n}\right)}}\right)\left(1+e^{-\pi\sqrt{\left(\frac{m}{n}\right)}}\right)....}$$

$$= \frac{\left(1-e^{-\pi\sqrt{\left(\frac{n}{m}\right)}}\right)\left(1-e^{-3\pi\sqrt{\left(\frac{n}{m}\right)}}\right)....}{\left(1+e^{-\pi\sqrt{\left(\frac{n}{m}\right)}}\right)\left(1+e^{-3\pi\sqrt{\left(\frac{n}{m}\right)}}\right)....}.$$

Si deux modules c' et c peuvent être transformés l'un dans l'autre, ils auront entre eux une relation algébrique. Mais généralement il parait impossible d'en tirer la valeur de c' en c à l'aide de radicaux*), mais il est remarquable, que cela a toujours lieu si c peut être transformé en son complément. Par exemple si $c^2 = \frac{1}{2}$.

Les équations modulaires jouissent d'ailleurs de la propriété remarquable, que toutes leurs racines peuvent être exprimées rationnellement par deux entre elles. De même on pourra exprimer toutes les racines par l'une d'elles à l'aide de radicaux.

10. On pourra développer la fonction $\lambda\theta$ de la manière suivante:

$$\lambda\theta = \frac{\theta + a\theta^3 + a'\theta^5 + ...}{1 + b'\theta^4 + b''\theta^6 + ...},$$

où le numérateur et le dénominateur sont des séries toujours convergentes. En faisant

$$\varphi\theta = \theta + a\theta^3 + a'\theta^5 + ...$$
$$f\theta = \theta + b'\theta^4 + b''\theta^6 + ...$$

ces deux fonctions auront la propriété exprimée par les deux équations:

$$\varphi(\theta'+\theta).\varphi(\theta'-\theta) = (\varphi\theta.f\theta')^2 - (\varphi\theta'.f\theta)^2,$$
$$f(\theta'+\theta).f(\theta'-\theta) = (f\theta.f\theta')^2 - c^2(\varphi\theta.\varphi\theta')^2,$$

où θ' et θ sont deux variables indépendantes. Ainsi p. ex. si l'on fait $\theta' = \theta$, on a

$$f(2\theta) = (f\theta)^4 - c^2(\varphi\theta)^4.$$

Ces fonctions jouissent de beaucoup de propriétés remarquables.

---

*) Dans le cas par ex. où y est de la forme:

$$\sqrt{\frac{c^5}{c'}.\frac{x(a^2-x^2)(a_1^2-x^2)}{(1-a^2x^2)(1-a_1^2x^2)}} = y,$$

l'équation entre c' et c est du sixième degré. Or je suis parvenu à démontrer rigoureusement, que si une équation du sixième degré est résoluble à l'aide de radicaux, cette équation sera décomposable ou en deux autres du troisième degré, dont les coëfficiens dépendent d'une équation du second degré, ou elle sera décomposable en trois équations du second degré, dont les coëfficiens sont déterminés par une équation du troisième degré. L'équation entre c' et c ne parait guère être decomposable de cette sorte.

11. Les formules presentées dans ce qui précède ont lieu avec quelques restrictions, le module c étant quelconque, réel ou imaginaire.

Première partie.
Des fonctions elliptiques en général.

Chapitre I.
Propriétés générales des fonctions elliptiques.

Les fonctions elliptiques jouissent comme on sait de cette propriété remarquable, que la somme d'un nombre quelconque de ces fonctions peut être exprimée par une seule fonction de la même espèce, en y ajoutant une certaine expression algébrique et logarithmique. La découverte de cette propriété est dûe à M. Legendre. La démonstration que cet illustre géomètre en a donnée, est fondée sur l'intégration algébrique de l'équation différentielle:

$$\frac{\partial y}{\sqrt{(\alpha+\beta y+\gamma y^2+\delta y^3+\varepsilon y^4)}} = \frac{\partial x}{\sqrt{(\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4)}}.$$

L'objet de ce chapitre sera de démontrer cette propriété des fonctions elliptiques, mais en s'appuyant sur des considérations différentes de celles de Mr. Legendre.

§. 1.
Démonstration d'un théorème fondamental.

Nous commencerons par établir un théorème général qui servira de fondement de tout ce qui va être exposé dans ce mémoire et qui en même tems exprime une propriété très remarquable des fonctions elliptiques.

Théorème I. Soient fx et φx deux fonctions quelconques entières de x, l'une paire, l'autre impaire, et dont les coëfficiens soient supposés variables. Cela posé si l'on décompose la fonction entière paire

$$(fx)^2-(\varphi x)^2(\Delta x)^2$$

en facteurs de la forme $x^2-x_1^2$, en sorte que

1. $(fx)^2-(\varphi x)^2(\Delta x)^2 = A.(x^2-x_1^2)(x^2-x_2^2)(x^2-x_3^2)\ldots.(x^2-x_\mu^2)$

où A est indépendant de l'indéterminée x, je dis qu'on aura:

2. $\Pi x_1+\Pi x_2+\Pi x_3+\ldots.+\Pi x_\mu = C-\frac{\alpha}{2\Delta\alpha}.\log\left\{\frac{fa+\varphi a.\Delta a}{fa-\varphi a.\Delta a}\right\},$

où a désigne le paramètre de la fonction Πx, en sorte que

$$3.\quad \Pi x = \int \frac{\partial x}{\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\triangle x}.$$

La quantité C est la constante d'intégration.

Démonstration. Supposons d'abord que tous les coëfficiens des diverses puissances de x dans fx et φx soient des quantités variables indépendantes. Dans ce cas toutes les quantités $x_1, x_2, \ldots . x_\mu$ seront évidemment inégales entre elles et fonctions de ces variables. En désignant par x l'une quelconque entre-elles, l'équation (1.) donnera

$$4.\quad (fx)^2 - (\varphi x)^2.(\triangle x)^2 = 0,$$

et de là:

$$5.\quad fx + \varphi x.\triangle x = 0.$$

Cela posé, faisons pour abréger

$$\psi x = (fx)^2 - (\varphi x)^2 (\triangle x)^2,$$

et désignons par $\psi' x$ la dérivée de cette fonction par rapport à x seul. De même désignons par la caractéristique δ la différentiation qui se rapporte aux seules variables indépendantes. Puis en différentiant, on tire de l'équation (4.):

$$\psi' x.\partial x + 2fx.\partial fx - 2\varphi x.\partial fx.(\triangle x)^2 = 0;$$

mais en vertu de (5.) on a:

$$fx = -\varphi x.\triangle x,$$
$$\varphi x(\triangle x)^2 = -fx.\triangle x,$$

donc en substituant:

$$\psi' x.\partial x - 2\triangle x(\varphi x.\delta fx - fx.\delta\varphi x).$$

De là, en divisant par $\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right).\triangle x$, on tire:

$$\frac{\partial x}{\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\triangle x} = \frac{2(\varphi x.\delta fx - fx.\delta\varphi x)}{\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right).\psi' x},$$

et intégrant:

$$\Pi x = \int \frac{2(\varphi x.\delta fx - fx.\delta\varphi x)}{\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right).\psi' x}.$$

Maintenant en faisant $x = x_1, x_2, \ldots . x_\mu$, ajoutant les résultats et faisant pour abréger:

$$2(\varphi x.\delta fx - fx.\delta\varphi x) = \theta x,$$

on obtiendra:

$$6.\quad \Pi x_1 + \Pi x_2 + \ldots + \Pi x_\mu = \int\left(\frac{\theta x_1}{\left(1-\frac{x_1^2}{a^2}\right)\psi' x_1} + \frac{\theta x_2}{\left(1-\frac{x_2^2}{a^2}\right)\psi' x_2} + \ldots + \frac{\theta x_\mu}{\left(1-\frac{x_\mu^2}{a^2}\right)\psi' x_\mu}\right).$$

Mais θx étant une fonction entière de x^2 dont le degré est évidemment inférieur à celui de la fonction ψx, le second membre, suivant un théorème connu sur la décomposition des fonctions fractionnaires, se reduira à

$$\int \frac{a\,\theta a}{2\psi a},$$

c'est-à-dire en substituant la valeur de θa et celle de ψa, à:

$$a\int \frac{\varphi a.\delta f a - f a.\delta \varphi a}{(f a)^2 - (\varphi a)^2(\triangle a)^2}.$$

Cette intégrale se trouvera facilement; en effet $\triangle a$ étant constant, on aura en intégrant d'après les règles connues:

$$C - \frac{a}{2\triangle a}\log\left\{\frac{f a + \varphi a.\triangle a}{f a - \varphi a.\triangle a}\right\},$$

où C est la constante d'intégration. Cette fonction étant mise à la place du second membre de l'équation (6.), donnera précisément la formule (2.) qu'il s'agissoit de démontrer.

La propriété de la fonction $\Pi(x)$, exprimée par la formule (2.), est d'autant plus remarquable, qu'elle aura lieu en supposant la fonction $\triangle x$ racine carrée d'une fonction quelconque entière et paire de x. En effet la démonstration précédente est fondée sur cette seule propriété de la fonction $\triangle x$. Donc on a de cette sorte une propriété générale d'une classe très étendue de fonctions transcendantes *).

La formule (2.) étant démontré pour le cas, où les quantités x_1, x_2, ... x_μ sont inégales entre elles, il est évident qu'elle aura lieu encore en attribuant aux variables indépendantes des relations quelconques qui pourront aussi rendre plusieurs des quantités x_1, x_2, ... x_μ égales entre elles.

Il y a à observer, que les signes des radicaux $\triangle x_1$, $\triangle x_2$, ... $\triangle x_\mu$ ne sont pas arbitraires. Ils doivent être pris tels qu'ils satisfassent aux équations

$$7.\quad f x_1 + \varphi x_1.\triangle x_1 = 0;\quad f x_2 + \varphi x_2.\triangle x_2 = 0;\quad \ldots.\quad f x_\mu + \varphi x_\mu.\triangle x_\mu = 0,$$

qu'on tire de l'équation (5.), en mettant pour x les valeurs x_1, x_2, ... x_μ

*) Voyez sur cet objet un mémoire inséré dans le tome III. page 313. de ce journal. On en trouve un théorême beaucoup plus général: tome IV. page 200.

La formule (2.) exprime une propriété de la fonction de la troisième espèce $\Pi(x)$. Or rien n'est plus facile que d'en déduire des propriétés semblables des fonctions:

$$8.\quad \varpi x = \int \frac{\partial x}{\triangle x} \text{ et } \varpi_0 x = \int \frac{x^2\,\partial x}{\triangle x}.$$

D'abord si l'on fait a infini, on a $\Pi x = \varpi x$; mais il est clair, que la partie logarithmique de la formule (2.) s'évanouira dans ce cas; le second membre se réduira donc à une constante, et par consequent on aura:

$$(9.)\quad \varpi x_1 + \varpi x_2 + \ldots\ldots + \varpi x_\mu = C.$$

Egalement si l'on développe les deux membres de l'équation (2.) suivant les puissances ascendantes de $\frac{1}{a}$, on aura, en comparant les coëfficiens de $\frac{1}{a^2}$ dans les deux membres:

$$10.\quad \varpi_0 x_1 + \varpi_0 x_2 + \ldots\ldots + \varpi_0 x_\mu = C - p,$$

où p est une fonction algébrique des variables, savoir le coëfficient de $\frac{1}{a^2}$ dans le développement de la fonction

$$\frac{a}{2\triangle a} \log.\left\{\frac{fa+\varphi a.\triangle a}{fa-\varphi a.\triangle a}\right\}$$

suivant les puissances ascendantes de $\frac{1}{a}$.

En vertu des formules (2. 9. 10.) il est clair, qu'en désignant par ψx une fonction quelconque de la forme:

$$11.\quad \begin{cases} \psi x = \int \left\{ A + B.x^2 + \dfrac{\alpha}{1-\frac{x^2}{a^2}} + \dfrac{\alpha_1}{1-\frac{x_n^2}{a_1^2}} + \ldots + \dfrac{\alpha_\nu}{1-\frac{x^2}{a_\nu^2}} \right\} \cdot \dfrac{\partial x}{\triangle x}, \\ \text{on aura:} \\ \psi x_1 + \psi x_2 + \ldots + \psi x_\mu = C - B.p - \dfrac{\alpha.a}{2\triangle a} \log \left\{\dfrac{fa+\varphi a \triangle a}{fa-\varphi a \triangle a}\right\} \\ \quad - \dfrac{\alpha_1 a_1}{2\triangle a_1} \log \left\{\dfrac{fa_1+\varphi a_1 \triangle a_1}{fa_1-\varphi a_1 \triangle a_1}\right\} \ldots - \dfrac{\alpha_\nu . a_\nu}{2\triangle a_\nu} \log \left\{\dfrac{fa_\nu+\varphi a_\nu \triangle a_\nu}{fa_\nu-\varphi a_\nu \triangle a_\nu}\right\}. \end{cases}$$

On voit que cette équation a lieu quelle que soit la constante A.

§. 2.

Propriété fondamentale des fonctions elliptiques, tirée des formules précédentes.

Dans ce qui précède les quantités x_1, x_2, x_3 . . . . x_μ sont regardées comme fonctions des coëfficiens variables dans fx et φx. Supposons maintenant qu'on détermine ces coëfficiens de manière qu'un certain nombre des quantités x_1, x_2, ... x_μ prend des valeurs données mais variables.

Soient

$$x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_m$$

des variables indépendentes. Alors les coëfficiens dans fx, φx deviendront des fonctions de ces quantités. En les substituant dans l'équation

$$(fx)^2 - (\varphi x)^2(\Delta x)^2 = 0,$$

le premier membre sera divisible par le produit

$$(x^2 - x_1^2)(x^2 - x_2^2)\ \ldots\ (x^2 - x_m^2),$$

et le quotient, égalé à zéro, donnera une équation du degré $\mu - m$ par rapport à x^2, dont les racines seront les $\mu - m$ quantités:

$$x_{m+1}^2,\ x_{m+2}^2,\ \ldots\ x_\mu^2,$$

qui par suite sont des fonctions algébriques de $x_1, x_2, \ldots x_m$.

Le cas le plus simple et le plus important est celui, où le nombre $\mu - m$ a la moindre valeur possible. Pour avoir ce minimum, il faut donner aux fonctions fx et φx la forme la plus générale pour laquelle le degré de l'équation $(fx)^2 - (\varphi x)^2(\Delta x)^2 = 0$ est égal à μ.

Il est facile de voir que le plus grand nombre de coëfficiens possible à introduire dans fx et φx, est μ. Mais, puisqu'en vertu de la forme des équations (7.) on peut supposer un de ces coëfficiens égal à l'unité, sans diminuer la généralité, on n'aura réellement qu'un nombre de $\mu - 1$ indéterminées. On pourra donc faire $m = \mu - 1$, en sorte que toutes les quantités $x_1, x_2, \ldots x_\mu$, excepté une seule, seront des variables indépendantes. Par là on aura immédiatement la propriété fondamentale des fonctions elliptiques dont il a été question au commencement du chapitre.

Il y a deux cas différens à considérer, savoir μ pair ou impair.

Cas I. μ étant pair et $= 2n$.

A. Si la fonction fx est paire et φx impaire, il est clair que fx doit être du degré $2n$, et φx du degré $2n - 3$. Faisons donc:

$$12.\quad \begin{cases} fx = a_0 + a_1x^2 + a_2x^4 + \ldots + a_{n-1}x^{4n-2} + x^{2n}, \\ \varphi x = (b_0 + b_1x^2 + b_2x^4 + \ldots + b_{n-2}x^{2n-4})x \end{cases}$$

et

$$13.\quad (fx)^2 - (\varphi x)^2(1-x^2)(1-c^2x^2) = (x^2 - x_1^2)(x^2 - x_2^2)\ldots(x^2 - x_{2n-1}^2)(x^2 - y^2),$$

où nous avons mis y au lieu de x_{2n}, qui sera une fonction des variables $x_1, x_2, \ldots x_{2n-1}$.

Les coëfficiens $a_0, a_1, a_2, \ldots a_{n-1}, b_0, b_1, \ldots b_{n-2}$ seront exprimés en fonctions de $x_1, x_2, \ldots$ à l'aide des $\mu - 1$ équations (7.), savoir:

$$13'.\quad fx_1 + \varphi x_1 . \Delta x_1 = 0;\ fx_2 + \varphi x_2 . \Delta x_2 = 0;\ \ldots;\ fx_{2n-1} + \varphi x_{2n-1} . \Delta x_{2n-1} = 0.$$

Ces équations, étant linéaires par rapport aux inconnues, donneront celles-ci en fonctions rationnelles des quantités:

$$x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_{2n-1},\ \Delta x_1,\ \Delta x_2,\ \ldots\ \Delta x_{2n-1}.$$

Il est clair qu'on pourra donner aux radicaux $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots \Delta x_{2n-1}$ des signes arbitraires.

Pour avoir la valeur de y, faisons dans l'équation (12.) $x = 0$. Cela donne

$$a_0^2 = x_1^2 x_2^2 \ldots . x_{2n-1}^2 . y^2,$$

d'où l'on tire:

$$14.\quad y = -\frac{a_0}{x_1 . x_2 \ldots . x_{2n-1}}.$$

La quantité y est donc une fonction rationnelle des variables $x_1, x_2, \ldots$ et des radicaux correspondants.

Si maintenant y a cette valeur et qu'on fait

$$\Delta x_{2n} = -\Delta y,$$

les formules (2. 9. 10.) donneront:

$$15.\quad \begin{cases} \varpi x_1 + \varpi x_2 + \ldots + \varpi x_{2n-1} = \varpi y + C, \\ \varpi_0 x_1 + \varpi_0 x_2 + \ldots + \varpi_0 x_{2n-1} = \varpi_0 y - b_{n-2} + C, \\ \Pi x + \Pi x_2 + \ldots + \Pi x_{2n-1} = \Pi y - \frac{a}{2\Delta a} \log \left\{ \frac{fa + \varphi a . \Delta a}{fa - \varphi a . \Delta a} \right\} + C. \end{cases}$$

Quant aux fonctions ϖy, $\varpi_0 y$, Πy, il faut bien observer que le signe du radical Δy n'est pas toujours le même. Il sera dans tous les cas déterminé par la dernière des équations (7.) qui, en mettant pour y_{2n} et Δx_{2n} leurs valeurs y et $-\Delta y$, deviendra:

$$fy - \varphi y . \Delta y.$$

On en tire

$$16.\quad \Delta y = \frac{fy}{\varphi y},$$

et cela fait voir que le radical Δy, comme y, est une fonction rationnelle des quantités $x_1, x_2, \ldots \Delta x_1, \Delta x_2, \ldots$

La fonction y a la propriété d'être zéro en même tems que les variables $x_1, x_2, \ldots x_{2n-1}$. En effet si l'on fait

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_{2n-1} = 0,$$

l'équation (13.) ne pourra subsister à moins que tous les coëfficiens a_0, $a_1, \ldots a_{n-1}$, $b_0, b_1, \ldots b_{n-2}$ ne soient égaux à zéro, donc cette équation se réduit à:

$$x^{4n} = x^{4n-2}(x^2 - y^2),$$

donc on aura $y = 0$.

On pourroit donner le signe contraire au second membre de l'équation (14.). Celui que nous avons choisi est tel que le radical $\triangle y$ se réduit à $+1$, en supposant $x_1 = x_2 = x_3 = \ldots . x_{2n-1} = 0$, et en même tems $\triangle x_1 = \triangle x_2 = \ldots . \triangle x_{2n-1} = +1$. Pour démontrer cela, supposons $x_1, x_2, \ldots . x_{2n-1}$ infiniment petits, on aura dans ce cas:

$$\triangle x_1 = \triangle x_2 = \ldots . \triangle x_{2n-1} = 1,$$

et les équations (13′.) font voir que $x_1, x_2, \ldots . x_{2n-1}$ satisfont à l'équation:

$$17. \quad x^{2n} + a_{n-1}x^{2n-2} + b_{n-2}x^{2n-3} + \ldots . + b_0 x + a_0 = 0.$$

Cette équation étant du degré $2n$, doit avoir encore une racine. En la désignant par z, on aura:

$$a_0 = z.x_1.x_2 \ldots . x_{2n-1},$$

donc en vertu de l'équation (14.):

$$z = -y.$$

L'équation est donc satisfaite en faisant $x = -y$. Or cela donne

$$y^{2n} + a_{n-1}y^{2n-2} + \ldots . + a_1 y^2 + a_0 = (b_0 + b_1 y^2 + \ldots . + b_{n-2}y^{2n-4})y,$$

donc en vertu de (16.):

$$18. \quad \triangle y = +1.$$

On pourra encore remarquer que y se réduit pour des valeurs infiniment petites de $x_1, x_2, \ldots . x_{2n-1}$ à $x_1 + x_2 + \ldots . + x_{2n-1}$. Cela fait voir l'équation (17.), qui, n'ayant pas de second terme, donnera la somme des racines égale à zéro, c'est-à-dire:

$$x_1 + x_2 + \ldots . + x_{2n-1} - y = 0,$$

donc:

$$19. \quad y = x_1 + x_2 + \ldots . + x_{2n-1}.$$

B. Si fx est impair et φx pair, fx doit être du degré $2n-1$ et φx du degré $2n-2$. Donc on aura dans ce cas un nombre de $2n-1$ coëfficiens indéterminés, et on parviendra à des formules semblables aux (15.); mais la fonction y aura une valeur différente. On démontrera aisément qu'elle sera égale à $\frac{1}{cy}$, la valeur de y étant déterminée par l'équation (14.).

Cas II. Si μ est un nombre impair et $= 2n+1$.

A. Si fx est impair et φx pair, on aura:

$$20. \quad \begin{cases} fx = (a_0 + a_1 x^2 + a_2 x^4 + \ldots . + a_{n-1}x^{2n-2} + x^{2n})x, \\ \varphi x = b_0 + b_1 x^2 + b_2 x^4 + \ldots . + b_{n-1}x^{2n-2}, \end{cases}$$

$$21. \quad (fx)^2 - (\varphi x)^2(1-x^2)(1-c^2x^2) = (x^2-x_1^2)(x^2-x_2^2)\ldots .(x^2-x_{2n}^2)(x^2-y^2)$$

Les coëfficiens $a_0, a_1, \ldots a_{n-1}$; $b_0, b_1, \ldots b_{n-1}$ sont déterminés par les $2n$ équations linéaires:

22. $fx_1 + \varphi x_1 . \Delta x_1 = 0$; $fx_2 + \varphi x_2 . \Delta x_2 = 0$; $\ldots$ $fx_{2n} + \varphi x_{2n} . \Delta x_{2n} = 0$.

La fonction y le sera par l'équation:

$$23. \quad y = \frac{b_0}{x_1 . x_2 \ldots . x_{2n}},$$

qu'on obtiendra, en faisant dans (21.) $x = 0$.

Enfin le radical Δy est déterminé par

$$24. \quad \Delta y = \frac{fy}{\varphi y}.$$

Cela posé on aura:

$$25. \quad \begin{cases} \varpi x_1 + \varpi x_2 + \ldots . + \varpi x_{2n} = \varpi y + C, \\ \varpi_0 x_1 + \varpi_0 x_2 + \ldots . + \varpi_0 x_{2n} = \varpi_0 y - b_{n-1} + C, \\ \Pi x_1 + \Pi x_2 + \ldots . + \Pi x_{2n} = \Pi y - \frac{a}{2\Delta a} \log \left\{ \frac{fa + \varphi a . \Delta a}{fa - \varphi a . \Delta a} \right\} + C. \end{cases}$$

Les fonctions y et Δy sont, comme dans le cas précédent, des fonctions rationnelles des variables $x_1, x_2, \ldots . x_{2n}$ et des radicaux $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots \ldots \Delta x_{2n}$, et on démontrera de la même manière, qu'on aura pour des valeurs infiniment petites de $x_1, x_2, \ldots . x_{2n}$,

$$26. \quad y = x_1 + x_2 + \ldots . + x_{2n}; \quad \Delta y = +1,$$

si l'on suppose en même tems que les radicaux $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots . \Delta x_{2n}$ se réduisent à $+1$. y s'évanouira simultanément avec les variables.

Les formules (25.) pourront d'ailleurs être déduites sur le champ de celles du premier cas, en y faisant $x_{2n-1} = 0$, et changeant ensuite n en $n+1$.

B. Si fx est pair et φx impair, on parviendra à des formules semblables. La valeur qui en résultera pour la fonction y, sera égale à $\frac{1}{cy}$, où y est déterminé par la formule (23.).

On voit donc par les formules (15. 25.), qu'on pourra toujours exprimer la somme d'un nombre donné de fonctions par une seule fonction de la même espèce, en y ajoutant, pour les fonctions de la première espèce, une constante, pour celles de la seconde espèce une certaine fonction algébrique, et pour celles de la troisième espèce une fonction logarithmique.

En faisant attention qu'une intégrale quelconque de la forme

$$\int \frac{\theta x . \partial x}{\Delta x},$$

peut être réduite aux fonctions ϖx et $\varpi_0 x$ et à un certain nombre de fonctions de la troisième espèce, en y ajoutant une expression algébrique et logarithmique, il est clair qu'en faisant

$$\psi x = \int \frac{\theta x . \partial x}{\triangle x},$$

on aura

$$27. \quad \psi x_1 + \psi x_2 + \psi x_3 \ldots . = \psi y + v + C,$$

ou v est exprimable par des fonctions algébriques et logarithmiques.

En vertu des formules (15. 25.) il est clair que la fonction v ne change pas de valeur, si l'on ajoute à la fonction rationnelle θx une quantité constante quelconque, de sorte qu'on peut supposer également

$$\psi x = \int (A + \theta x) . \frac{\partial x}{\triangle x}.$$

Je dis maintenant que la fonction ψ est la seule qui puisse satisfaire à l'équation (27.). En effet si l'on différentie cette équation par rapport à l'une des variables indépendantes x_1, x_2, ..., par exemple à x_1, on aura:

$$\psi' x_1 . \partial x_1 = \psi' y . \left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right) . \partial x_1 + \left(\frac{\partial v}{\partial x_1}\right) . \partial x.$$

Cela posé, si l'on suppose toutes les quantités x_2, x_3, ... y égales à des constantes déterminées, on aura, en mettant x pour x_1, et faisant

$$\psi' y = A, \quad \frac{\partial v}{\partial x_1} = p, \quad \frac{\partial y}{\partial x_1} = q:$$

$$\psi' x . \partial x = A . q \partial x + p \partial x,$$

d'où l'on tire:

$$\psi x = \int (Aq + p) \partial x.$$

La fonction ψx ne pourra donc renfermer qu'une seule constante indéterminée A, et par conséquent:

$$\psi x = \int (A + \theta x) \frac{\partial x}{\triangle x}$$

est son expression générale.

Les propriétés exprimées par les formules de ce paragraphe appartiennent donc exclusivement aux fonctions elliptiques. C'est pourquoi je les ai nommées fondamentales.

Dans les formules que nous avons données, y a une valeur unique, mais on pourra satisfaire aux mêmes formules, en mettant au lieu de y une expression algébrique contenant une constante arbitraire. En effet, pour avoir une telle expression, il suffit de supposer une des variables x_1, x_2, x_3, ... égale à une constante arbitraire, et la valeur de y qu'on obtiendra par là, sera la plus générale possible, comme on sait par

la théorie de l'intégration des équations différentielles du premier ordre, dont l'intégrale complète ne contient qu'une seule constante arbitraire.

A l'aide des formules (15. 25.) on pourra exprimer la somme d'un nombre quelconque de fonctions par une seule fonction. Il est facile, d'en tirer les formules suivantes:

$$28.\quad \begin{cases} \frac{\mu_1}{\mu}\varpi x_1 + \frac{\mu_2}{\mu}\varpi x_2 + \ldots + \frac{\mu_n}{\mu}\varpi x_n = C + \varpi y, \\ \frac{\mu_1}{\mu}\varpi_0 x_1 + \frac{\mu_2}{\mu}\varpi_0 x_2 + \ldots + \frac{\mu_n}{\mu}\varpi_0 x_n = \varpi_0 y - p + C, \\ \frac{\mu_1}{\mu}\Pi x_1 + \frac{\mu_2}{\mu}\Pi x_2 + \ldots + \frac{\mu_n}{\mu}\Pi x_n = \Pi y - \frac{a}{2\triangle a}\log\left\{\frac{fa + \varphi a \triangle a}{fa - \varphi a \triangle a}\right\}, \end{cases}$$

où $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n, \mu$ désignent des nombres entiers quelconques, et y est une fonction algébrique des variables $x_1, x_2, \ldots x_n$, de même que les coëfficiens dans fa et φa. Pour avoir ces formules, il suffit de supposer dans (13.) et (21.) un certain nombre des quantités $x_1, x_2, \ldots y$ égales entre elles.

Pour déterminer y, fx, φx, on aura cette équation:

$$29.\quad (fx)^2 - (\varphi x)^2(1-x^2)(1-c^2x^2)$$
$$= (x^2 - x_1^2)^{\mu_1}(x^2 - x_2^2)^{\mu_2} \ldots (x^2 - x_n^2)^{\mu_n}(x^2 - y^2)^{\mu},$$

qui doit avoir lieu pour une valeur quelconque de x.

§. 3.

Application au cas, où deux fonctions sont données.

Pour réduire deux fonctions à une seule, il suffit de supposer dans les formules (25.):

$$n = 1.$$

Cela donne

$$fx = a_0 x + x^3, \quad \varphi x = b_0,$$

et pour déterminer les deux constantes a_0 et b_0, on aura les deux équations:

$$a_0 x_1 + x_1^3 + b_0 \triangle x_1 = 0, \quad a_0 x_2 + x_2^3 + b_0 \triangle x_2 = 0.$$

qui donnent:

$$a_0 = \frac{x_2^3 \triangle x_1 - x_1^3 \triangle x_2}{x_1 \triangle x_2 - x_2 \triangle x_1}, \quad b_0 = \frac{x_2 x_1^3 - x_1 x_2^3}{x_1 \triangle x_2 - x_2 \triangle x_1}.$$

Connoissant b_0, on aura la valeur de y par la formule (23.), savoir pour $n = 1$:

$$y = \frac{b_0}{x_1 x_2},$$

donc:

$$30.\quad y = \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1 \triangle x_2 - x_2 \triangle x_1},$$

ou bien en multipliant en haut et en bas par $x_1 \triangle x_2 - x_2 \triangle x_1$:

$$31. \quad y = \frac{x_1 \triangle x_2 + x_2 \triangle x_1}{1 - c^2 x_1^2 x_2^2}.$$

Si l'on exprime a_0 et b_0 en x_1, x_2, y, on aura ces expressions très simples:

$$32. \quad b_0 = x_1 . x_2 . y; \quad a_0 = \tfrac{1}{2}\{c^2 x_1^2 x_2^2 y^2 - x_1^2 - x_2^2 - y^2\}.$$

L'expression de a_0 se tire de l'équation

$$(a_0 x + x^3)^2 - b_0^2 (1 - x^2)(1 - c^2 x^2) = (x^2 - x_1^2)(x^2 - x_2^2)(x^2 - y^2),$$

en égalant entre eux les coëfficiens de x^4 dans les deux membres.

Les fonctions a_0 et y étant déterminées comme on vient de voir, les formules (25.) donneront, en faisant $n = 1$:

$$33. \quad \begin{cases} \varpi x_1 + \varpi x_2 = \varpi y + C, \\ \varpi_0 x_1 + \varpi_0 x_2 = \varpi_0 y - x_1 x_2 y + C, \\ \Pi x_1 + \Pi x_2 = \Pi y - \frac{a}{2 \triangle a} \log \left\{ \frac{a_0 a + a^3 + x_1 x_2 . y \triangle a}{a_0 a + a^3 - x_1 x_2 . y \triangle a} \right\} + C. \end{cases}$$

Quant à la valeur du radical $\triangle y$, elle est donnée par l'équation (24.):

$$\triangle y = \frac{fy}{\varphi y} = \frac{a_0 y + y^3}{b_0},$$

c'est-à dire:

$$34. \quad \triangle y = \frac{a_0 + y^2}{x_1 x_2}.$$

Pour réduire la différence de deux fonctions à une seule, il suffit d'echanger les signes de x_2 dans les formules précédentes. La valeur de y deviendra par là:

$$35. \quad y = \frac{x_1 \triangle x_2 - x_1 \triangle x_2}{1 - c^2 x_1^2 x_2^2} = \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1 \triangle x_2 + x_2 \triangle x_1}.$$

Si dans les formules (33.) on fait x_2 égal à une constante arbitraire, on aura la condition qui doit avoir lieu entre les variables de deux fonctions, si elles doivent être réductibles l'une à l'autre. En faisant $x_2 = e$, $x_1 = x$, on aura:

$$36. \quad y = \frac{x \triangle e + e \triangle x}{1 - c^2 e^2 x^2} \quad \text{et} \quad \varpi x = \varpi y + C.$$

En différentiant, il viendra

$$37. \quad \frac{\partial y}{\triangle y} = \frac{\partial x}{\triangle x}.$$

L'intégrale complète de cette équation est donc exprimée par l'équation algébrique (36.), e étant la constante arbitraire. Parmi les intégrales particulières il y à remarquer les suivantes:

1) $y = x$, qui répond à $e = 0$; $\triangle y = \triangle x$,

2) $y = \pm \frac{1}{cx}$, qui répond à $e = \frac{1}{0}$; $\triangle y = \mp \frac{\triangle x}{cx^2}$,

3) $y = \sqrt{\left(\frac{1-x^2}{1-c^2x^2}\right)}$, qui répond à $e=1$; $\triangle y = \frac{(c^2-1)x}{1-c^2x^2}$ et

4) $y = \frac{1}{c}\cdot\sqrt{\left(\frac{1-c^2x^2}{1-x^2}\right)}$, qui répond à $e=\frac{1}{c}$; $\triangle y = \frac{(1-c^2)x}{(1-x^2)c}$.

§. 4.

Application au cas, où toutes les fonctions données sont égales.

Si l'on fait dans les formules (15. 25.).

$$x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = x;\ \triangle x_1 = \triangle x_2 = \triangle x_3 = \ldots = \triangle x,$$

on aura celles-ci:

$$38.\quad \begin{cases} \mu\varpi x = \varpi y + C, \\ \mu\varpi_0 x = \varpi_0 y - p + C, \\ \mu\Pi x = \Pi y - \frac{a}{2\triangle a}\log\left\{\frac{fa+\varphi a.\triangle a}{fa-\varphi a.\triangle a}\right\} + C, \end{cases}$$

où

$$39.\quad (fz)^2-(\varphi z)^2(1-z^2)(1-c^2z^2) = (z^2-x^2)^\mu(z^2-y^2),$$

z étant l'indéterminée.

La fonction y est déterminée par les équations (14. 23.):

$$40.\quad y = -\frac{a_0}{x^\mu},\quad y = \frac{b_0}{x^\mu}.$$

La première a lieu si $\mu = 2n-1$, la seconde si $\mu = 2n$. Les équations (13′. 22.) qui doivent déterminer les coëfficiens a_0, a_1, a_2, ..., b_0, b_1, b_2, ... se réduiront dans le cas que nous considérons à une seule, savoir

$$fx + \varphi x.\triangle x = 0,$$

mais en vertu des principes du calcul différentiel, cette équation doit avoir encore lieu, en la différentiant par rapport à x seule un nombre quelconque de fois moindre que μ. On aura donc en totalité μ équations linéaires entre les μ inconnus, d'où l'on tire leurs valeurs en fonctions rationnelles de la variable x et du radical $\triangle x$. Connoissant a_0, a_1, a_2, ..., b_0, b_1, b_2, ..., on aura la valeur de $\triangle y$ à l'aide de l'équation:

$$\triangle y = \frac{fy}{\varphi y}.$$

On pourroit déterminer de cette sorte toutes les quantités nécessaires, mais pour mieux approfondir les propriétés de la fonction y, nous allons entamer le problème d'une autre manière, qui conduira successivement aux valeurs de y, correspondentes aux valeurs 1, 2, 3 etc. de μ.

Désignons par x_μ la valeur de y, qui répond à μ. On aura

$$\varpi x_\mu = C + \mu\varpi x,$$

donc:

$$\varpi(x_\mu + m) = C + \varpi x_\mu + \varpi x_m,$$

mais si l'on fait

$$y = \frac{x_m \triangle x_\mu + x_\mu \triangle x_m}{1 - c^2 x_m^2 x_\mu^2},$$

on aura, en vertu de (36.):

$$\varpi x_m + \varpi x_\mu = \varpi y,$$

donc:

$$41. \quad \varpi x_{\mu+m} = C + \varpi y.$$

La valeur la plus générale de $x_{\mu+m}$, qui satisfera à cette équation est:

$$x_{\mu+m} = \frac{y \triangle e + e \triangle y}{1 - c^2 e^2 y^2},$$

où e est une constante. Pour la déterminer, soit x infiniment petit; on aura

$$x_m = mx, \quad x_\mu = \mu x, \quad x_{\mu+m} = (m+\mu)x, \quad \triangle x_m = \triangle x_\mu = 1,$$

donc:

$$y = (m+\mu)x, \quad \triangle y = 1.$$

L'équation (41.) donnera:

$$(m+\mu)x = (m+\mu)x \,.\, \triangle e + e,$$

donc $e = 0$, $\triangle e = 1$ et par suite $x_{m+\mu} = y$, c'est-à-dire:

$$42. \quad x_{\mu+m} = \frac{x_\mu \triangle x_m + x_m \triangle x_\mu}{1 - c^2 x_m^2 x_\mu^2}.$$

On aura de la même manière:

$$43. \quad x_{\mu-m} = \frac{x_\mu \triangle x_m - x_m \triangle x_\mu}{1 - c^2 x_m^2 x_\mu^2}.$$

La première de ces formules servira à trouver $x_{\mu+m}$, lorsqu'on connoit x_m et x_μ; on pourra donc former successivement les fonctions

$$x_2, \; x_3, \; x_4, \; x_5, \; \ldots,$$

en remarquant que $x_1 = x$, $\triangle x_1 = \triangle x$.

Si $m = 1$, on trouvera:

$$44. \quad x_{\mu+1} = x_{\mu-1} + \frac{2 x_\mu \triangle x}{1 - c^2 x^2 x_\mu^2}.$$

En remarquant que

$$x_0 = x, \quad x_1 = x,$$

cette formule fait voir que x_μ est une fonction rationnelle de x, si μ est un nombre impair, et que x_μ est de la forme $p.\triangle x$, où p est rationnel, si μ est un nombre pair. Dans le premier cas $\frac{\triangle x_\mu}{\triangle x}$ est rationnel et $\triangle x_\mu$ l'est dans le second. On voit également que x_μ s'évanouira en même tems que $\triangle x$, si μ est un nombre pair. Les quantités

$$x_{2\mu+1}, \quad \frac{\triangle x_{2\mu+1}}{\triangle x}, \quad \frac{x_{2\mu}}{\triangle x}, \quad \triangle x_{2\mu}$$

sont donc des fonctions rationnelles de x.

Si l'on multiplie entre-elles les deux formules (42. 43.) il viendra:

$$44'. \quad x_{\mu+m} \cdot x_{\mu-m} = \frac{x_\mu^2 - x_m^2}{1 - c^2 x_\mu^2 x_m^2},$$

équation, qui paroit exprimer la plus simple relation qui puisse être établie entre les fonctions x_μ.

En y faisant $m = \mu - 1$, on aura:

$$45. \quad x_{2\mu-1} = \frac{1}{x} \cdot \frac{x_\mu^2 - x_{\mu-1}^2}{1 - c^2 x_\mu^2 x_{\mu-1}^2}.$$

De même si l'on fait $m = \mu$, on aura:

$$46. \quad x_{2\mu} = \frac{2 x_\mu \cdot \triangle x_\mu}{1 - c^2 x_\mu^4}.$$

Ces deux formules semblent être les plus commodes pour le calcul des fonctions x_2, x_3, x_4, ...

Pour trouver les expressions les plus simples de x_μ, supposons:

$$47. \quad x_\mu = \frac{p_\mu}{q_\mu}, \quad \triangle x_\mu = \frac{r_\mu}{q_\mu^2},$$

où p_μ, q_m sont des fonctions entières de x, n'ayant pas de diviseur commun. En mettant ces valeurs dans l'équation (46.), on aura:

$$\frac{p_{2\mu}}{q_{2\mu}} = \frac{2 p_\mu q_\mu \cdot r_\mu}{q_\mu^4 - c^2 p_\mu^4}.$$

Or il est évident que la fraction du second membre est réduite à sa plus simple expression; donc on aura séparement:

$$48. \quad p_{2\mu} = 2 p_\mu q_\mu r_\mu; \quad q_{2\mu} = q_\mu^4 - c^2 p_\mu^4.$$

En faisant les mêmes substitutions dans l'équation (45.), on obtiendra

$$49. \quad \frac{x \cdot p_{2\mu-1}}{q_{2\mu-1}} = \frac{p_\mu^2 \cdot q_{\mu-1}^2 - q_\mu^2 \cdot p_{\mu-1}^2}{q_\mu^2 \cdot q_{\mu-1}^2 - c^2 p_\mu^2 \cdot p_{\mu-1}^2}.$$

Or je dis que la fraction du second membre est réduite à sa plus simple expression. En effet si l'on avoit pour une même valeur de x:

$$p_\mu^2 q_{\mu-1}^2 - q_\mu^2 p_{\mu-1}^2 = 0, \quad q_\mu^2 \cdot q_{m-1}^2 - c^2 p_\mu^2 \cdot p_{\mu-1}^2 = 0,$$

on auroit encore:

$$x_\mu^2 = x_{\mu-1}^2, \quad 1 - c^2 x_\mu^2 \cdot x_{\mu-1}^2 = 0.$$

Mais on a en général

$$x_{2\mu-1} = \frac{x_\mu \cdot \triangle x_{\mu-1} + x_{\mu-1} \cdot \triangle x_\mu}{1 - c^2 x_\mu^2 \cdot x_{\mu-1}^2} = \frac{x_\mu^2 - x_{\mu-1}^2}{x_\mu \triangle x_{\mu-1} - x_{\mu-1} \triangle x_\mu},$$

donc aussi:

$$x_\mu \triangle x_{\mu-1} = x_{\mu-1} \triangle x_\mu = 0,$$

ou bien:

$$x_\mu^2 \{1 - x_{\mu-1}^2\} \{1 - c^2 x_{\mu-1}^2\} = 0 = x_\mu^2 \{1 - x_\mu^2\} \{1 - c^2 x_\mu^2\},$$

ce qui est impossible, car on doit avoir:

$$x_\mu^2 = \pm\frac{1}{c}.$$

Cela posé, l'équation (49.) donnera:

$$50.\quad p_{2\mu-1} = \frac{1}{x}\cdot\{p_\mu^2\cdot q_{\mu-1}^2 - q_\mu^2\cdot p_{\mu-1}^2\};\quad q_{2\mu-1} = q_\mu^2\cdot q_{\mu-1}^2 - c^2 p_\mu^2\cdot p_{\mu-1}^2.$$

Si donc on détermine successivement les fonctions

$$p_2,\ q_2,\ p_3,\ q_3,\ p_4,\ q_4,\ \ldots\ .$$

par les équations (48. 50.), $\frac{p_\mu}{q_\mu}$ sera toujours réduit à sa plus simple expression.

On pourra faire $p_1 = x$, $q_1 = 1$. D'après la forme des expressions (48. 50.), il est clair que

1) $p_{2\mu-1}$ est une fonction entière et impaire de x du degré $(2\mu-1)^2$,
2) $p_{2\mu} = p'.\Delta x$, où p' est une fonction entière et impaire du degré $(2\mu)^2 - 3$,
3) q_μ est une fonction entière et paire du degré $\mu^2 - 1$ ou μ^2, selon que μ est impair ou pair.

Les fonctions $x_{2\mu-1}$ et $x_{2\mu}$ auront donc la forme suivante:

$$51.\quad x_{2\mu-1} = \frac{x.\{A_0 + A_2 x^2 + A_4 x^4 + \ldots + A_{(2\mu-1)^2-1}\cdot x^{(2\mu-1)^2-1}\}}{1 + A_2^1.x^2 + A_4^1.x^4 + \ldots + A_{(2\mu-1)^2-1}^1.x^{(2\mu-1)^2-1}},$$

$$52.\quad x_{2\mu} = \frac{x.\Delta x.\{B_0 + B_2 x^2 + B_4 x^4 + \ldots + B_{4\mu^2-4}\cdot x^{(2\mu)^2-4}\}}{1 + B_2^1.x^2 + B_4^1.x^4 + \ldots + B_{4\mu^2}.x^{(2\mu)^2}}.$$

On aura par exemple:

$$53.\quad x_2 = \frac{2x\Delta x}{1-c^2x^4};\quad x_3 = x.\frac{3-4(1+c^2)x^2+6c^2x^4-c^4x^8}{1-bc^2x^4+4c^2(1+c^2)x^6-3c^4x^8}.$$

Il est facile de voir que les coëfficiens A_0, A_2, ... A_2', A_4', ... B_0, B_2, ... B_2', B_4', ... seront des fonctions entières de c^2. On a toujours

$$A_0 = 2\mu - 1,\ B_0 = 2\mu \text{ et } A_2' = B_2' = 0.$$

La fonction $x_{2\mu}$ est, comme on voit, irrationnelle; or on peut facilement trouver une fonction rationnelle y qui satisfasse à l'équation

$$\frac{\partial y}{\Delta y} = 2\mu.\frac{\partial x}{\Delta x}.$$

Une fonction de cette sorte est la suivante:

$$54.\quad y = \sqrt{\left(\frac{1-x_{2\mu}^2}{1-c^2x_{2\mu}^2}\right)} = \frac{\Delta x_{2\mu}}{1-c^2x_{2\mu}^2},$$

car on a en vertu de (37.):

$$\frac{\partial y}{\Delta y} = \frac{\partial x_{2\mu}}{\Delta x_{2\mu}}$$

et y est rationnelle, puisque les fonctions $\triangle x_{2\mu}$ et $x_{2\mu}^2$ le sont. On verra aisément que cette fonction y aura la forme:

$$55.\quad y = \frac{1+\alpha.x^2+\ldots.+\beta.x^{(2\mu)^2}}{1+\alpha'.x^2+\ldots.+\beta'.x^{(2\mu)^2}}.$$

Pour $\mu = 1$, on aura:

$$56.\quad y = \frac{1-2x^2+c^2x^4}{1-2c^2x^2+c^2x^4}.$$

Nous verrons dans la suite, comment les fonctions x_μ et y peuvent être décomposées en facteurs et en fractions partielles.

Nous ferons voir aussi que les équations précédentes sont toujours résolubles algébriquement par rapport à x, en sorte qu'on puisse exprimer x en x_μ à l'aide de radicaux.

Chapitre II.

Sur la relation la plus générale qui existe entre un nombre quelconque de fonctions elliptiques.

Après avoir établi dans le chapitre précédent les propriétés fondamentales des fonctions elliptiques, nous allons maintenant en faire d'applications au problème général, que nous nous sommes proposé. Nous ferons voir qu'on pourra en ramener la solution à celle de quelques autres plus simples.

§. 1.

Sur la forme dont l'intégrale d'une différentielle quelconque algébrique est susceptible, en supposant cette intégrale exprimable par des fonctions algébriques, logarithmiques et elliptiques.

Soient x_1, x_2, x_3 .... x_μ un nombre quelconque de variables, liées entres elles par des équations algébriques dont le nombre est moindre que celui des variables. Soient y_1, y_2, ... y_μ des fonctions algébriques quelconques de ces variables et supposons que la différentielle

$$y_1.\partial x_1 + y_2.\partial x_2 + \ldots. + y_m.\partial x_\mu$$

soit complète et que son intégrale soit exprimable à l'aide de fonctions algébriques, logarithmiques et elliptiques, en sorte que l'on ait:

$$58.\quad \int(y_1\partial x + y_2\partial x_2 + \ldots. + y_\mu\partial x_\mu)$$
$$= u + A_1\log v_1 + A_2\log v_2 + \ldots. + A_\nu\log v_\nu$$
$$+ \alpha_1\psi_1(t_1) + \alpha_2\psi_2(t_2) + \ldots. + \alpha_n\psi_n(t_n),$$

où A_1, A_2, ... A_ν, α_1, α_2, ... α_n sont des quantités constantes, u, v_1, v_2, ... v_ν, t_1, t_2, ... t_n des fonctions algébriques des variables x_1, x_2, ... x_μ, et ψ_1, ψ_2, ψ_3, ... ψ_n des fonctions elliqtiques quelconques

des trois espèces avec des modules et des paramètres quelconques. Désignons respectivement par c_1, c_2, ... c_n les modules de ces fonctions, et faisons pour abréger:

$$58. \quad \pm\sqrt{[(1-x^2)(1-c_m^2 x^2)]} = \Delta_m x,$$

en sorte qu'on ait en général:

$$59. \quad \psi_m x = \int \frac{\theta' . \partial x}{\Delta_m x},$$

où θ est une fonction rationnelle de x^2 de l'une des trois formes:

$$1; \quad x^2; \quad \frac{1}{1-\frac{x^2}{a^2}},$$

selon que $\psi_m x$ est une fonction de la première, de la seconde ou de la troisième espèce. Nous pourrons même supposer que θ' soit une fonction rationnelle quelconque de x.

On pourra regarder un certain nombre des quantités x_1, x_2, ... x_μ comme variables indépendantes. Supposons que les m premières

$$60. \quad x_1, \; x_2, \; x_3, \; \ldots . \; x_m,$$

le soient: dans ce cas toutes les quantités:

61. x_{m+1}, x_{m+2}, ... x_μ, t_1, t_2, ... t_n, u, v_1, v_2, ... v_ν; y_1, y_2, ... y_μ

seront des fonctions algébriques de x_1, x_2, ... x_m.

Cela posé, imaginons une fonction algébrique θ telle qu'on puisse exprimer toutes les fonctions:

62. u, v_1, v_2, ... v_ν; t_1, t_2, ... t_n, $\Delta_1(t_1)$, $\Delta_2(t_2)$, ... $\Delta_n(t_n)$

rationnellement en

$$63. \quad \theta, \; x_1, \; x_2, \; x_3, \; \ldots . \; x_\mu, \; y_1, \; y_2, \; y_3, \; \ldots . \; y_\mu.$$

Il existera une infinité de fonctions θ qui jouiront de cette propriété. Une telle fonction sera p. ex. la somme de toutes les fonctions (62.), multipliées chacune par un coëfficient indéterminé et constant. Cela est facile de démontrer par la théorie des équations algébriques. La quantité θ, étant une fonction algébrique des variables x_1, x_2, ..., pourra donc satisfaire à une équation algébrique, dans laquelle tous les coëfficiens sont des fonctions rationnelles de x_1, x_2, ... Or au lieu de supposer ces coëfficiens rationnels en x_1, x_2, ..., nous les supposerons rationnels en

$$64. \quad x_1, \; x_2, \; x_3, \; \ldots . \; x_\mu, \; y_1, \; y_2, \; y_3, \; \ldots . \; y_\mu.$$

Cette supposition admise, on simplifiera beaucoup le raisonnement.

Soit donc $$65.\quad V = 0$$
l'équation en θ, désignons son degré par δ et supposons, ce qui est permis, qu'il soit impossible, que la fonction θ puisse être racine d'une autre équation de la même forme, mais dont le degré est moindre que δ.

Imaginons maintenant qu'on différentie l'équation (57.) par rapport aux variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots . x_m$. Il est facile de voir, que la différentielle qu'on trouve sera de la forme

$$66.\quad p_1 . \partial x_1 + p_2 . \partial x_2 + \ldots . + p_m . \partial x_m = 0,$$

où $p_1, p_2, \ldots . p_m$ seront des fonctions rationnelles des quantités

$$x_1, x_2, \ldots . x_m, x_{m+1}, \ldots . x_\mu, y_1, y_2, \ldots . y_\mu, u, v_1, v_2, v_3, \ldots . v_\nu,$$
$$t_1, t_2, \ldots . t_3, \ldots . t_n, \Delta_1(t_1), \Delta_2(t_2), \ldots . \Delta_n(t_n).$$

Donc en introduisant la fonction θ; $p_1, p_2, \ldots . p_m$ deviendront des fonctions rationnelles de

$$67.\quad \theta, x_1, x_2, \ldots . x_\mu, y_1, y_2, \ldots . y_\mu.$$

Cela posé, l'équation (66.) donnera séparement

$$68.\quad p_1 = 0,\ p_2 = 0,\ p_3 = 0, \ldots .\ p_m = 0,$$

et il est clair que si ces équations sont satisfaites, l'équation proposée (57.) le sera également. Maintenant les équations (68.) sont autant d'équations en θ de la même forme que $V = 0$, ou pourront aisément être réduites à cette forme; mais suivant l'hypothèse $V = 0$ est une équation irréductible en θ, donc il suit d'un théorème connu, que toutes les équations (68.) seront encore satisfaites, en mettant au lieu de θ une quelconque des racines de l'équation $V = 0$. Donc l'équation (57.) aura lieu quelle que soit la valeur de θ, pourvu qu'elle satisfasse à $V = 0$.

Désignons par $$69.\quad \theta_1, \theta_2, \ldots . \theta_\delta$$
les racines de l'équation $V = 0$ et par

$$70.\quad u', u'', \ldots . u^{(\delta)};\ v'_m, v''_m, \ldots . v_m^{(\delta)};\ t'_m, t''_m, \ldots . t_m^{(\delta)}$$

les valeurs correspondantes des fonctions u, v_m, t_m. L'équation (57.), en substituant dans le second membre les expressions des quantités $u, v_1, v_2, \ldots . t_1, t_2, \ldots .$, donnera $\Delta(t_1), \Delta(t_2), \ldots .$ en fonctions rationnelles de $\theta, x_1, x_2, \ldots . x_\mu, y_1, y_2, \ldots . y_\mu$; substituant ensuite au lieu de θ successivement les δ valeurs $\theta_1, \theta_2, \ldots . \theta_\delta$, l'équation (57.) donnera, dis-je, δ équations semblables qui, ajoutées ensemble, conduiront à celle-ci:

$$71.\quad \begin{cases} \delta . \int (y_1 \partial x_1 + y_2 \partial x_2 + \ldots . + y_\mu \partial x_\mu) = u' + u'' + \ldots . + u^{(\delta)} \\ + A_1 . \{\log v'_1 + \log v''_1 + \ldots + \log v_1^{(\delta)}\} + \ldots + A_n . \{\log v'_\nu + \log v''_\nu + \ldots + \log v_\nu^{(\delta)}\} \\ + \alpha_1 . \{\psi_1(t'_1) + \psi_1(t''_1) + \ldots + \psi_1(t_1^{(\delta)})\} + \ldots + \alpha_n . \{\psi_n(t'_n) + \psi_n(t''_n) + \ldots + \psi_n(t_n^{(\delta)})\}. \end{cases}$$

Le second membre de cette équation pourra encore être réduit à une forme beaucoup plus simple. Considérons d'abord sa partie algébrique

$$72.\quad u' + u'' + \ldots + u^{(\delta)} = U.$$

Cette fonction est exprimée rationnellement en

$$x_1, x_2, \ldots x_\mu, y_1, y_2, \ldots y_\mu, \theta_1, \theta_2, \ldots \theta_\delta,$$

mais elle est en même tems symmétrique par rapport à $\theta_1, \theta_2, \ldots \theta_\delta$, donc en vertu d'un théorème connu des fonctions symmétriques et rationnelles, on pourra exprimer la fonction U rationnellement en

$$73.\quad x_1, x_2, \ldots x_\mu, y_1, y_2, \ldots y_\mu$$

et par les coëfficiens de l'équation $V = 0$; mais ceux-ci sont eux-mêmes des fonctions rationnelles des quantités (73.), donc la fonction U le sera également.

Soit maintenant

$$74.\quad \log V_m = \log v'_m + \log v''_m + \ldots + \log v_m^{(\delta)},$$

on aura

$$V_m = v'_m . v''_m \ldots v_m^{(\delta)},$$

donc la fonction V_m est aussi une fonction rationnelle des quantités (73. 69.) et symmétrique par rapport à $\theta_1, \theta_2, \ldots \theta_\delta$; donc on démontrera de la même manière, que V_m pourra s'exprimer rationnellement par les quantités (73.) seules.

Il reste à considérer la partie elliptique de l'équation (71.); or d'après les formules du chapitre précédent, on pourra toujours faire

$$75.\quad \left\{ \begin{array}{l} \psi_m(t'_m) + \psi_m(t''_m) + \ldots + \psi_m(t_m^{(\delta)}) \\ = \psi_m(T_m) + p + B_1 \log q_1 + B_2 \log q_2 + \ldots + B_\nu \log q_\nu \end{array} \right.$$

où toutes les quantités

$$76.\quad T_m, \Delta_m(T_m), p, q_1, q_2, \ldots q_\nu$$

sont des fonctions rationnelles des fonctions

$$t'_m, t''_m, \ldots t_m^{(\delta)}, \Delta_m(t'_m), \Delta_m(t''_m), \ldots \Delta_m(t_m^{(\delta)});$$

or celles-ci sont des fonctions rationnelles des quantités (69. 73.), et il est clair qu'elles seront symmétriques par rapport à $\theta_1, \theta_2, \ldots \theta_\delta$, donc enfin on pourra exprimer les fonctions (76.) rationnellement par les quantités $x_1, x_2, \ldots x_\mu$; $y_1, y_2, \ldots y_\mu$.

En vertu de ce que nous allons de voir, on pourra donc mettre le second membre de l'équation (71.) sous la forme:

$$r + A' \log \varrho' + A'' \log \varrho'' + \ldots + A^{(k)} \log \varrho^{(k)}$$
$$+ \alpha_1 . \psi_1(T_1) + \alpha_2 . \psi_2(T_2) + \ldots + \alpha_n \psi_n . (T_n).$$

Donc nous sommes parvenu à ce théorème général:

Théorème II. Si une intégrale quelconque de la forme

$$\int(y_1\partial x_1+y_2\partial x_2+\ldots.+y_\mu\partial x_\mu),$$

où $y_1, y_2, \ldots. y_\mu$ sont des fonctions algébriques de $x_1, x_2, \ldots. x_\mu$, liées entre-elles par un nombre quelconque d'équations algébriques, peut être exprimée par des fonctions algébriques, logarithmiques et elliptiques de sorte qu'on ait:

$$\int(y_1\partial x_1+y_2\partial x_2+\ldots.+y_\mu\partial x_\mu)=u+A_1\log v_1+A_2\log v_2+\ldots.+A_\nu\log v_\nu$$
$$+\alpha_1\psi_1(t_1)+\alpha_2\psi_2(t_2)+\ldots.+\alpha_n\psi_n(t_n),$$

où $A_1, A_2, \ldots. \alpha_1, \alpha_2, \ldots.$ sont des constantes; $u, v_1, v_2, \ldots.$ $t_1, t_2, \ldots.$ des fonctions algébriques de $x_1, x_2, \ldots.$ et $\psi_1, \psi_2, \ldots.$ des fonctions elliptiques quelconques; on pourra toujours exprimer cette intégrale de la manière suivante:

$$\delta.\int(y_1.\partial x_1+y_2.\partial x_2+\ldots.+y_\mu.\partial x_\mu)=r+A'\log\varrho'+A''\log\varrho''+\ldots.+A^{(k)}\log\varrho^{(k)}$$
$$+\alpha_1.\psi_1(\theta_1)+\alpha_2.\psi_2(\theta_2)+\ldots.+\alpha_n.\psi_n(\theta_n),$$

δ étant un nombre entier; $\alpha_1, \alpha_2, \ldots. \alpha_n$ les mêmes que dans l'équation; $A', A'', \ldots.$ des constantes, et

$$\theta_1;\ \Delta_1(\theta_1);\ \theta_2;\ \Delta_2(\theta_2);\ \ldots.\ \theta_n;\ \Delta_n(\theta_n);\ r, \varrho', \varrho'', \ldots.\ \varrho^{(k)}$$

des fonctions rationnelles des quantités:

$$x_1, x_2, \ldots. x_\mu;\ y_1, y_2, \ldots.. y_\mu.$$

Ce théorème a non seulement beaucoup d'importance dans la solution de notre problème général; mais il est encore le fondement de tout ce qui concerne l'application des fonctions algébriques, logarithmiques et elliptiques à la théorie de l'intégration des formules différentielles algébriques. J'en ai tiré un grand nombre de résultats nouveaux et généraux que je sousmettrai au jugement des géomètres dans une autre occasion.

Comme corollaire de ce théorème il y a à remarquer le suivant:

Théorème III. Si une intégrale de la forme

$$\int(y_1.\partial x_1+y_2.\partial x_2+\ldots.+y_\mu.\partial x_\mu)$$

peut être exprimée par une fonction algébrique et logarithmique de la forme

$$u+A_1\log v_1+A_2\log v_2+\ldots.+A_\nu\log v_\nu,$$

on pourra toujours supposer que $u, v_1, v_2, \ldots. v_\nu$ soient des fonctions rationnelles de $x_1, x_2, \ldots. x_\mu, y_1, y_2, \ldots. y_\mu$. Si donc on a l'intégrale $\int y\partial x$, où y est liée à x par une équation algébrique quelconque, on pourra supposer que u, v_1, v_2 etc. soient des fonctions rationnelles de y et x *).

*) J'ai fondé sur ce théorème une nouvelle théorie de l'intégration des formules différentielles algébriques, que je n'ai pu encore publier jusqu'à présent. Cette théorie franchit beaucoup les ré-

§. 2.

Application du théorème du paragraphe précédent à la relation générale qui existe entre des fonctions algébriques, logarithmiques et elliptiques.

On peut tirer immédiatement du théorème général démontré dans le paragraphe précédent, plusieurs propositions importantes, relatives à la théorie des fonctions elliptiques.

Soit

77. $\alpha_1.\psi_1(x_1)+\alpha_2.\psi_2(x_2)+...+\alpha_\mu.\psi_\mu(x_\mu)=u+A_1\log v_1+A_2\log v_2+...+A_\nu\log v_\nu$,

une relation quelconque entre les fonctions elliptiques

$$\psi_1 x_1,\ \psi_2 x_2,\ \ldots.\ \psi_\mu x_\mu,$$

dont les modules sont respectivement $c_1, c_2, \ldots. c_\mu$. Si pour abréger on fait $\pm\sqrt{[(1-x^2)(1-c_m^2x^2)]}=\Delta_m x$, le premier membre sera la même chose que

$$\int\left\{\frac{\alpha_1.r_1}{\Delta_1 x_1}.\partial x_1+\frac{\alpha_2.r_2}{\Delta_2 x_2}.\partial x_2+....+\frac{\alpha_\mu.r_\mu}{\Delta_\mu x_\mu}\partial.x_\mu\right\},$$

où $r_1, r_2, \ldots. r_\mu$ seront respectivement des fonctions rationnelles de $x_1, x_2, \ldots. x_\mu$. Donc en vertu du théorème III. on pourra énoncer le suivant:

Théorème IV. Si l'équation (77.) a lieu en supposant que u, $v_1, v_2, \ldots. v_\nu$ soient des fonctions algébriques des quantités x_1, $x_2, \ldots. x_\mu$: on pourra toujours, sans diminuer la généralité, supposer, que $u, v_1, v_2, \ldots. v_\nu$ soient exprimées rationnellement

$$\text{en } x_1, x_2, \ldots. x_\mu, \Delta_1 x_1, \Delta_2 x_2, \ldots. \Delta_\mu x_\mu.$$

En écrivant l'équation générale (77.) de cette manière:

78. $$\int\left\{\frac{\alpha_1 r_1\partial x_1}{\Delta_1 x_1}+\frac{\alpha_2 r_2\partial x_2}{\Delta_2 x_2}+....+\frac{\alpha_m r_m\partial x_m}{\Delta_m x_m}\right\}$$
$$=u+A_1\log v_1+A_2\log v_2+....+A_\nu\log v_\nu-\alpha_{m+1}\psi_{m+1}x_{m+1}-....-\alpha_\mu\psi_\mu x_\mu,$$

on aura en vertu du théorème II. le suivant:

Théorème V. Si l'équation (77.) a lieu, on en pourra toujours tirer une autre de la forme:

79. $$\delta\alpha_1\psi_1 x_1+\delta\alpha_2\psi_2 x_2+....+\delta\alpha_m\psi_m x_m+\alpha_{m+1}\psi_{m+1}\theta_1+....+\alpha_\mu\psi_\mu\theta_{\mu-m}$$
$$=r+A'\log\varrho'+A''\log\varrho''+....+A^{(k)}\log\varrho^{(k)},$$

---

sultats connus, et son but est d'opérer toutes les réductions possibles des intégrales des formules algébriques, à l'aide des fonctions algébriques et logarithmiques. On parvient par là à réduire au plus petit nombre possible les intégrales qui représentent sous une forme finie toutes les intégrales d'une même classe.

δ étant un nombre entier et les quantités

$$\theta_1,\ \Delta_{m+1}\theta_1,\ \theta_2,\ \Delta_{m+2}\theta_2,\ \ldots\ \theta_{\mu-m}\Delta_\mu\theta_{\mu-m},$$
$$r,\ \varrho',\ \varrho'',\ \ldots\ \varrho^{(k)}$$

des fonctions rationnelles de

$$x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_m,\ \Delta_1 x_1,\ \Delta_2 x_2,\ \ldots\ \Delta_m x_m.$$

On aura encore comme corollaire:

Théorème VI. Si une relation quelconque entre les fonctions elliptiques $\psi_1 x_1,\ \psi_2 x_2,\ \ldots\ \psi_\mu x_\mu$ des trois espèces a la forme exprimée par l'équation (77.), on en tirera une autre de la forme:

$$80.\quad \begin{aligned}\delta\alpha_m.\psi_m x = &-\alpha_1.\psi_1\theta_1-\alpha_2.\psi_2\theta_2-\ldots-\alpha_{m-1}.\psi_{m-1}\theta_{m-1}\\ &-\alpha_{m+1}.\psi_{m+1}\theta_{m+1}-\ldots-\alpha_\mu.\psi_m\theta_\mu\\ &+r+A'\log\varrho'+A''\log\varrho''+\ldots+A^{(k)}\log\varrho^{(k)},\end{aligned}$$

δ étant un nombre entier et toutes les quantités

$$\theta_1,\ \Delta_1\theta_1;\ \theta_2,\ \Delta_2\theta_2;\ \ldots\ r,\ \varrho',\ \varrho'',\ \ldots$$

des fonctions rationnelles de la variable x et du radical correspondant $\Delta_m x$. Toutes ces fonctions pourront donc se mettre sous la forme:

$$p+q.\Delta_m x,$$

où p et q sont des fonctions rationnelles de x seul.

Voilà le théorème qui nous conduira, comme nous le verrons plus bas, à la solution de notre problème.

Si l'on suppose toutes les variables $x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_\mu$ égales entre elles et à x, et les fonctions $\psi_1,\ \psi_2,\ \ldots\ \psi_\mu$ ayant le même module, que nous désignerons par c, le premier membre de l'équation (77.) sera la même chose que $\int\frac{r\partial x}{\Delta x}$, où r est une fonction rationnelle de x; donc en vertu du théorème II. on pourra énoncer le suivant

Théorème VII. Si entre les fonctions $\varpi x,\ \varpi_0 x,\ \Pi_1 x,\ \Pi_2 x,\ \ldots\ \Pi_\mu x$, où $\Pi_1,\ \Pi_2,\ \ldots\ \Pi_\mu$ désignent des fonctions de la troisième espèce, avec des paramètres quelconques, mais avec le même module c qu'ont les deux fonctions de la première et de la seconde espèce ϖx et $\varpi_0 x$, il existe une relation quelconque de la forme:

$$81.\quad \begin{aligned}&\alpha\varpi x+\alpha_0\varpi_0 x+\alpha_1\Pi_1 x+\alpha_2\Pi_2 x+\ldots+\alpha_\mu\Pi_\mu x\\ &=u+A_1\log v_1+A_2\log v_2+\ldots+A_\nu\log v_\nu,\end{aligned}$$

on pourra toujours supposer que les quantités

$$u,\ v_1,\ v_2,\ \ldots\ v_\nu$$

soient de la forme $p+q\Delta x$, où p et q sont des fonctions rationnelles de x seul.

Ce théorème est encore d'une grande importance dans la théorie des fonctions elliptiques. Nous en dévélopperons dans le chapitre IV. des conséquences importantes pour notre objet.

§. 3.
Réduction du problème général.

Reprenons la formule du théorème VI. En la différentiant, le résultat sera de la forme:

$$P + Q\triangle_m x,$$

où P et Q sont des fonctions rationnelles de x; donc on aura séparement $P=0$, $Q=0$, donc encore $P-Q.\triangle_m x = 0$, c. à. d. la formule (80.) aura lieu en faisant varier le signe du radical $\triangle_m x$. Or en désignant par θ'_1, θ'_2, θ'_3 etc. les valeurs correspondantes de θ_1, θ_2, ... , cela donne

$$-\delta\alpha_m.\psi_m x = -\Sigma\alpha.\psi\theta' + v',$$

où pour abréger nous avons mis le signe de sommation Σ; v' étant la partie algébrique et logarithmique. En retranchant cette équation de (80.), on trouvera

$$82.\quad 2\delta\alpha_m.\psi_m x = \Sigma\alpha\{\psi\theta' - \psi\theta\} + v - v'.$$

Cela posé, désignons par c le module de la fonction ψ et par $\triangle x$ la fonction $\pm\sqrt{[(1-x^2)(1-c^2x^2)]}$; on aura, selon ce qu'on a vu dans le chapitre I. (35.):

$$\psi\theta' - \psi\theta = \psi y - v'',$$

en faisant

$$y = \frac{\theta'\triangle\theta - \theta\triangle\theta'}{1-c^2\theta^2\theta'^2},$$

v'' étant une expression algébrique et logarithmique.

Soient maintenant

$$\theta = p + q\triangle_m x,\quad \triangle\theta = r + \varrho\triangle_m x,$$

où p, q, r, ϱ sont des fonctions rationnelles de x. En changeant le signe du radical $\triangle_m x$, on aura les valeurs de θ' et $\triangle\theta'$, savoir

$$\theta' = p - q\triangle_m x,\quad \triangle\theta' = r - \varrho\triangle_m x.$$

En substituant ces valeurs dans l'expression de y, il est clair que cette fonction prendra la forme:

$$83.\quad y = t.\triangle_m x,$$

où t est rationnel en x. En vertu de la formule (34.) on voit que $\triangle y$ sera aussi rationnel en x.

Si maintenant on fait

$$z = \frac{y\triangle e + e\triangle y}{1 - c^2 e^2 y^2},$$

où e est constant, on aura encore:

$$\psi y = \psi z + v''',$$

donc:

$$\psi\theta' - \psi\theta = \psi z + v_1.$$

Or je dis qu'on pourra faire ensorte que z soit une fonction rationnelle de x. En effet il suffit pour cela, d'attribuer à la constante e une valeur qui fait $\triangle e = 0$.

Soit par exemple $e = 1$, on aura

$$84.\quad z = \frac{\triangle y}{1 - c^2 y^2} \text{ et de là } \triangle z = \frac{c^2 - 1}{1 - c^2 y^2}\cdot y,$$

mais y^2 et $\triangle y$, comme nous venons de voir, sont des fonctions rationnelles de x: donc z le sera également.

La formule (82.) prendra donc la forme suivante:

$$85.\quad 2\delta\alpha_m.\psi_m x = \Sigma\alpha\psi z + V,$$

où V est une fonction algébrique et logarithmique, qui en vertu du théorème II. pourra se mettre sous la forme:

$$u + A_1 \log v_1 + A_2 \log v_2 + \ldots.$$

toutes les quantités u, v_1, v_2, ... étant de la forme $p + q.\triangle_m x$.

En développant le second membre de l'équation (85.), on aura aussi la formule:

$$86.\quad \begin{cases} 2\delta\alpha_m.\psi_m x = \alpha_1.\psi_1 z_1 + \alpha_2.\psi_2 z_2 + \ldots. + \alpha_{m-1}.\psi_{m-1} z_{m-1} \\ \qquad + \alpha_{m+1}.\psi_{m+1} z_{m+1} + \ldots. + \alpha_\mu.\psi_\mu z_\mu + V, \end{cases}$$

où en vertu des deux équations (84. 83.) toutes les quantités

$$z_1,\ \frac{\triangle_1 z_1}{\triangle_m x};\ z_2,\ \frac{\triangle_2 z_2}{\triangle_m x};\ z_3,\ \frac{\triangle_3 z_3}{\triangle_m x};\ \ldots.\ z_\mu,\ \frac{\triangle_\mu z_\mu}{\triangle_\mu x}$$

sont des fonctions rationnelles de la variables x. Cette formule est donc une suite nécessaire de la formule générale (77.) Il faut faire attention que δ est un nombre entier et que les coëfficiens α_1, α_2, ... α_μ sont précisément les mêmes dans les deux formules. C'est une remarque essentielle.

A l'aide de la formule (86.) on pourra maintenant réduire la formule générale (77.) à une autre plus simple. En effet, en éliminant la fonction ψ_m entre ces deux équations, on trouvera une équation de la même forme que la proposée, mais qui contiendra un nombre moindre

de fonctions elliptiques. Faisons $m = \mu$ et mettons x_μ pour x dans la formule (86.). On aura:

$$2\delta\alpha_\mu . \psi_\mu x_\mu = \alpha_1 . \psi z_1 + \alpha_2 . \psi z_2 + \ldots . + \alpha_{\mu-1} . \psi z_{\mu-1} + V.$$

En éliminant la fonction $\psi_\mu x_\mu$ entre les deux équations il viendra:

87. $\alpha_1\{2\delta\psi_1 x_1 - \psi z_1\} + \alpha_2\{2\delta\psi_2 x_2 - \psi z_2\} + \ldots . + \alpha_{\mu-1}\{2\delta\psi_{\mu-1} x_{\mu-1} - \psi z_{\mu-1}\} = V'.$

Mais 2δ étant un nombre entier, on pourra, en vertu de ce que nous avons vu dans le chapitre précédent, trouver des fonctions algébriques $x'_1, x'_2, \ldots . x'_{\mu-1}$ telles que

$$2\delta\psi_1 x_1 - \psi_1 z_1 = \psi_1 x'_1 + V_1,$$
$$2\delta\psi_2 x_2 - \psi_2 z_2 = \psi_2 x'_2 + V_2$$
$$\text{etc.}$$

donc la formule (87.) donnera celle-ci:

$$88. \quad \begin{cases} \alpha_1\psi_1 x'_1 + \alpha_2\psi_2 x'_2 + \ldots . + \alpha_{\mu-1}\psi_{\mu-1} x'_{\mu-1} = \\ u' + A'_1 \log v'_1 + A'_2 \log v'_2 + \ldots . + A'_{\nu'} \log v'_{\nu'}. \end{cases}$$

Cette équation a précisement la même forme que l'équation proposée; seulement elle ne contient la fonction ψ_μ. On pourra la traiter de la même manière et en chasser une des fonctions, par exemple $\psi_{\mu-1}$. En continuant ainsi, on parviendra enfin à une équation qui ne contiendra que des fonctions algébriques et logarithmiques, et qui ne présentera plus de difficulté. On voit donc que le problème général pourra être réduit à celui-ci:

Satisfaire de la manière la plus générale à l'équation

$$89. \quad \begin{cases} \psi x = \beta_1\psi_1 y_1 + \beta_2\psi_2 y_2 + \ldots . + \beta_n\psi_n y_n \\ \qquad + u + A_1 \log v_1 + A_2 \log v_2 + \ldots . + A_\nu \log v_\nu, \end{cases}$$

où $\psi, \psi_1, \psi_2, \ldots . \psi_n$ désignent des fonctions elliptiques des trois espèces, et en supposant que

$$y_1, y_2, \ldots . y_n$$

soient des fonctions rationnelles de x; et que $\triangle_1 y_1, \triangle_2 y_2, \ldots$ $\ldots \triangle_n y_n$ soient de la forme $p . \triangle x$, où p est rationnelle en x, et $\triangle x$ le radical dans la fonction ψx.

Soient

$$\triangle_1 y_1 = p_1 . \triangle x, \quad \triangle_2 y_2 = p_2 . \triangle x, \quad \ldots . \quad \triangle_n y_n = p_n . \triangle x.$$

Supposons que ces équations soient satisfaites, et soit

$$\psi x = \int \frac{\theta x \partial x}{\triangle x}, \quad \psi_1 x = \int \frac{\theta_1 x \partial x}{\triangle_1 x}, \quad \ldots . \quad \psi_n x = \int \frac{\theta_n x . \partial x}{\triangle_n x},$$

où $\theta x, \theta_1 x, \ldots . \theta_n x$ seront toujours des fonctions rationnelles suivant

la nature des fonctions ψ, ψ_1, ... ψ_n, on aura:

$$\psi_m y_m = \int \frac{\theta_m y_m}{p_m} \cdot \frac{\partial y_m}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\triangle x};$$

or $\frac{\theta_m y_m}{p_m} \cdot \frac{\partial y_m}{\partial x}$ est une fonction rationnelle de x, donc l'intégrale du second membre pourra être réduite à la forme:

$$\psi_m y_m = A\varpi x + A_0 \varpi_0 x + A' \Pi'(x, a') + A'' \Pi'(x, a'') + \ldots,$$

où r est une expression algébrique et logarithmique. En transformant toutes les fonctions ψx, $\psi_1 y_1$, $\psi_2 y_2$, ... de cette manière, l'équation (87.) prendra cette forme:

$$90. \quad \begin{cases} \alpha\varpi x + \alpha\varpi_0 x + \alpha_1 \Pi(x, a_1) + \alpha_2 \Pi(x, a_2) + \ldots + \alpha_\mu \Pi(x, a_\mu) \\ \qquad = u + A_1 \log v_1 + A_2 \log v_2 + \ldots. \end{cases}$$

En vertu de ce que nous venons de voir il est clair que la solution du problème (89.) pourra être réduite à celle des suivans:

Problème *A*. Trouver tous les cas possibles ou l'on peut satisfaire à l'équation:

$$91. \quad (1-y^2)(1-c'^2 y^2) = p^2(1-x^2)(1-c^2 x^2),$$

en supposant y et p fonctions rationnelles de l'indéterminée x et c et c' étant des constantes.

Problème *B*. L'équation (91.) étant satisfaite, réduire les trois fonctions:

$$\varpi(y, c'), \quad \varpi_0(y, c'), \quad \Pi(y, c', a)$$

à la forme:

$$r + A\varpi x + A_0 \varpi_0 x + A' \Pi(x, a') + A'' \Pi(x, a'') + \ldots.$$

où r est une expression algébrique et logarithmique.

Problème *C*. Trouver la relation la plus générale entre les fonctions qui ont le même module et la même variable, c'est-à-dire: trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour exprimer une fonction de la forme:

$$\alpha\varpi x + \alpha_0 \varpi_0 x + \alpha_1 \Pi'(x, a_1) + \alpha_2 \Pi'(x, a_2) + \ldots,$$

par des fonctions algébriques et des logarithmes.

La solution complète de ces trois problèmes sera l'objet principal de nos recherches ultérieures. Nous allons commencer par le dernier qui est le plus simple.

Chapitre III.

Relation la plus générale entre un nombre quelconque de fonctions elliptiques de la même variable et du même module; ou solution du problème *C*.

Soient comme précédemment

$$\triangle x = \pm\sqrt{[(1-x^2)(1-c^2x^2)]},$$

ϖx, $\varpi_0 x$ les fonctions elliptiques de deux premières espèces et $\Pi'\alpha_1$, $\Pi'\alpha_2$, ... $\Pi'\alpha_\mu$ des fonctions de la troisième espèce, ayant pour paramètres α_1, α_2, ... α_μ, ensorte que

$$\varpi x = \int\frac{\partial x}{\triangle x},\quad \varpi_0 x = \int\frac{x^2\,\partial x}{\triangle x},\quad \Pi'\alpha_m = \int\frac{\partial x}{\left(1-\frac{x^2}{\alpha_m^2}\right)\triangle x}.$$

Cela posé, il s'agit de satisfaire de la manière la plus générale à l'équation:

$$92.\quad \begin{cases}\beta.\varpi x + \beta_0\varpi_0 x + \beta_1\Pi'\alpha_1 + \beta_2\Pi'\alpha_2 + \ldots. + \beta_n\Pi'\alpha_n \\ \quad = u + A_1\log v_1 + A_2\log v_2 + \ldots. + A_\nu\log v_\nu.\end{cases}$$

En vertu du théorème on peut supposer que u, v_1, v_2, ... v_ν soient de la forme $p + q\triangle x$, où p et q sont rationnels en x.

Nous supposons, ce qui est permis, qu'il soit impossible de trouver une relation semblable, qui ne contenoit toutes les fonctions:

$$\Pi'\alpha_1;\ \Pi'\alpha_2;\ \ldots.\ \Pi'\alpha_n.$$

Nous supposons encore qu'aucun des paramêtres α_1, α_2, ... α_n ne soit égal à ± 1 ou à $\pm\frac{1}{c^2}$; car dans le cas contraire on pourroit, comme on sait, réduire la fonction correspondante de la troisième espèce aux fonctions ϖx et $\varpi_0 x$.

Celà posé désignons le premier membre de l'équation (92.) par ψx et le second par $u + \Sigma A\log v$. On aura donc

$$93.\quad \psi x = u + \Sigma A\log v.$$

Il est clair, que cette équation aura lieu encore si le radical $\triangle x$ change de signe. Donc en désignant par u' et v' les valeurs correspondantes de u et v, on aura:

$$-\psi x = u' + \Sigma A\log v'.$$

Cela donne

$$2\psi x = u - u' + \Sigma A\log\left\{\frac{v}{v'}\right\}.$$

Mettons ici $-x$ au lieu de $+x$, on pourra supposer que $\triangle x$ reste invariable; la fonction ψx changera de signe et par conséquent on aura, en

désignant par u'', u''', v'', v''' les valeurs correspondantes de u, u', v, v':

$$-2\psi x = u'' - u''' + \Sigma A \log\left\{\frac{v''}{v'''}\right\}.$$

De la on tire:

$$\psi x = \tfrac{1}{4}(u - u' - u'' + u''') + \tfrac{1}{4}\Sigma A \log\left\{\frac{v.v'''}{v'.v''}\right\}.$$

Soit

$$v = p + qx + (p' + q'x)\Delta x,$$

où p, q, p', q' sont des fonctions paires, on aura:

$$v' = p + qx - (p' + q'x)\Delta x,$$
$$v'' = p - qx + (p' - q'x)\Delta x,$$
$$v''' = p - qx - (p' - q'x)\Delta x,$$

donc:

$$v.v''' = p^2 - q^2x^2 - (p'^2 - q'^2x^2)\Delta^2 x + 2x(pq' - qp')\Delta x,$$
$$v'.v'' = p^2 - q^2x^2 - (p'^2 - q'^2x^2)\Delta^2 x - 2x(pq' - qp')\Delta x,$$

par conséquent on aura:

$$\frac{v.v'''}{v'.v''} = \frac{fx + \varphi x.\Delta x}{fx - \varphi x.\Delta x},$$

où fx et φx seront des fonctions entières, dont l'une est paire et l'autre impaire. Nous supposerons, ce qui est permis, qu'elles n'ont pas de diviseur commun.

La partie algébrique $\frac{1}{4}(u - u' + u''' - u'')$ est évidemment de la forme $r.\Delta x$, où r est une fonction impaire de x. En écrivant A au lieu de $\frac{1}{4}A$, l'expression de ψx prendra la forme suivante:

$$94.\quad \psi x = r\Delta x + \Sigma A \log\left\{\frac{fx + \varphi x.\Delta x}{fx - \varphi x.\Delta x}\right\}.$$

Quant aux coëfficiens A_1, A_2, ... A_ν, nous pourrons supposer, qu'ils soit impossible d'avoir entre eux une relation de cette forme:

$$95.\quad m_1A_1 + m_2A_2 + \ldots + m_\nu A_\nu = 0,$$

où m_1, m_2, ... m_ν sont des nombres entiers. En effet, si cette équation avoit lieu, on auroit:

$$\Sigma A \log v = \frac{1}{m_\nu}.\left\{A_1 \log\left(\frac{v_1^{m_\nu}}{v_\nu^{m_1}}\right) + A_2 \log\left(\frac{v_2^{m_\nu}}{v_\nu^{m_2}}\right) + \ldots + A_{\nu-1} \log\left(\frac{v_{\nu-1}^{m_\nu}}{v_\nu^{m_{\nu-1}}}\right)\right\}.$$

c'est-à-dire:

$$\Sigma A \log v = A'_1.\log v'_1 + A'_2 \log v'_2 + \ldots + A'_{\nu-1} \log v'_{\nu-1},$$

où le second membre contient un nombre moindre de logarithmes que le premier. On pourra donc répéter cette réduction jusqu'à ce qu'une équation telle que (95.) est impossible. Cela posé, il faut prendre la différentielle des deux membres et comparer entre elles les fonctions algébriques qui en résultent.

Considérons d'abord la partie logarithmique du second membre de la formule (94.). Soit pour abréger:

$$96.\quad \varrho = \log\left\{\frac{fx+\varphi x.\triangle x}{fx-\varphi x.\triangle x}\right\},$$

on aura, en différentiant, un résultat de la forme:

$$97.\quad \partial\varrho = \frac{v.\partial x}{\{(fx)^2-(\varphi x)^2\triangle^2 x\}\triangle x},$$

où v est une fonction paire et entière de x, savoir:

$$98.\quad v = 2.(fx.\varphi' x-\varphi x.f' x)\triangle^2 x - 2fx.\varphi x.\{(1+c^2)x-2c^2x^3\}.$$

En faisant:

$$99.\quad \theta x = (fx)^2-(\varphi x)^2(\triangle x)^2,$$

on pourra aussi mettre v sous cette forme:

$$100.\quad v\varphi x = 2f' x.\theta x - fx.\theta' x,$$

équation facile à vérifier.

Cela posé, décomposons la fonction entière θx en facteurs de la forme $(x^2-a^2)^m$, et faisons en conséquence:

$$101.\quad (fx)^2-(\varphi x)^2.(\triangle x)^2 = (x^2-a_1^2)^{m_1}(x^2-a_2^2)^{m_2}\ldots\ldots(x^2a_\mu^2)^{m_\mu} = \theta x.$$

L'équation (100.) fait voir que si θx a le facteur $(x^2-a^2)^m$, v aura nécessairement celui $(x^2-a^2)^{m-1}$; donc la fonction fractionnaire $\frac{v}{\theta x}$ pourra être décomposée de la manière suivante:

$$102.\quad \frac{v}{\theta x} = t+\frac{\beta'_1}{a_1^2-x^2}+\frac{\beta'_2}{a_2^2-x^2}+\ldots\ldots+\frac{\beta'_\mu}{a_\mu^2-x^2},$$

où t est la partie entière, β'_1, β'_2, ... β'_μ des constantes. D'abord je dis que t est une constante. En effet l'expression (98.) de v fait voir que le degré de cette fonction ne pourra jamais surpasser celui de θx. Pour trouver les coëfficiens β'_1, β'_2, ..., soit β' l'un quelconque entre eux, correspondant au facteur $(x^2-a^2)^m$ de θx. On aura:

$$\beta' = \frac{v(a^2-x^2)^m}{\theta x} \text{ pour } x=a,$$

mais si l'on fait

$$\theta x = R.(a^2-x^2)^m,$$

on aura en vertu de (100):

$$\frac{v(a^2-x^2)^m}{\theta x} = \frac{2.f' x}{\varphi x}(a^2-x^2)-\frac{fx}{\varphi x}.\frac{\partial R}{R.\partial x}(a^2-x^2)+2mx.\frac{fx}{\varphi x},$$

donc en faisant $x=a$:

$$\beta' = 2ma.\frac{fa}{\varphi a}.$$

Or on a

$$(fa)^2-(\varphi a)^2(\triangle a)^2 = 0,$$

donc:

$$fa + \varphi a . \triangle a = 0,$$

et par suite:

$$\beta' = -2ma . \triangle a.$$

On a donc:

$$103. \quad \frac{v}{\theta x} = k - \frac{2m_1 a_1 \triangle a_1}{a_1^2 - x^2} - \frac{2m_2 a_2 \triangle a_2}{a_2^2 - x^2} - \ldots - \frac{2m_\mu a_\mu \triangle a_\mu}{a_\mu^2 - x^2}.$$

En multipliant par $\frac{\partial x}{\triangle x}$, on aura la valeur de $\partial \varrho$. La formule (94.) donnera donc, en différentiant:

$$\beta + \beta_0 x^2 + \frac{a_1^2 \beta_1}{a_1^2 - x^2} + \frac{a_2^2 \beta_2}{a_2^2 - x^2} + \ldots + \frac{a_n^2 \beta_n}{a_n^2 - x^2} = \frac{\partial r}{\partial x} . \triangle^2 x - 2r\{(1+c^2)x - 2c^2 x^3\}$$
$$+ A_1 . \left\{k_1 - \frac{2m_1 a_1 \triangle a_1}{a_1^2 - x^2} - \frac{2m_2 a_2 \triangle a_2}{a_2^2 - x^2} - \ldots\right\}$$
$$+ A_2 . \left\{k_2 - \frac{2m'_1 a'_1 \triangle a'_1}{a'^2_1 - x^2} - \frac{2m'_2 a'_2 \triangle a'_2}{a'^2_1 - x^2} - \ldots\right\}$$
$$+ \text{etc.}$$

En substituant une fonction rationnelle quelconque de x au lieu de r, on voit sans peine qu'il sera impossible de satisfaire à cette équation, à moins que r ne soit égal à zéro. En se rappellant que nous avons supposé qu'il soit impossible de trouver une relation entre un nombre moindre des fonctions $\Pi' a_1$, $\Pi' a_2$, ... $\Pi' a_n$ et ayant égard à l'impossibilité d'une équation de la forme (95.), on verra aisément que tous les coëfficiens:

$$A_1, \; A_2, \; \ldots . \; A_\nu$$

doivent être réels, excepté un seul. Soit donc

$$A_1 = A_2 = \ldots . \; A_\nu = 0 \quad \text{et} \quad A = 1,$$

on aura:

$$\beta + \beta_0 x^2 + \frac{a_1^2 \beta_1}{a_1^2 - x^2} + \frac{a_2^2 \beta_2}{a_2^2 - x^2} + \ldots + \frac{a_n^2 \beta_n^2}{a_n^2 - x^2}$$
$$= k - \frac{2m_1 a_1 \triangle a_1}{a_1^2 - x^2} - \frac{2m_2 a_2 \triangle a_2}{a_1^2 - x^2} - \ldots - \frac{2m_\mu a_\mu \triangle a_\mu}{a_\mu^2 - x^2},$$

donc:

$$\beta = k_1, \; \beta_0 = 0, \; \alpha_1 = a_1, \; \alpha_2 = a_2, \; \ldots .$$
$$\beta_1 = -\frac{2m_1 \triangle a_1}{a_1}, \; \beta_2 = -\frac{2m_2 \triangle a_2}{a_2}, \; \ldots .$$

Cela posé, la formule générale (94.) prendra la forme:

$$104. \quad \beta . \varpi x - \frac{2m_1 \triangle a_1}{a_1} . \Pi' \alpha_1 - \frac{2m_2 \triangle a_2}{a_2} \Pi' \alpha_2 - \ldots - \frac{2m_n \triangle a_n}{a_n} \Pi' \alpha_n$$
$$= \log \left\{\frac{fx + \varphi x . \triangle x}{fx - \varphi x . \triangle x}\right\} + C,$$

où les paramètres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ doivent satisfaire à l'équation

105. $(fx)^2-(\varphi x)^2(1-x^2)(1-c^2x^2) = (x^2-\alpha_1^2)^{m_1}(x^2-\alpha_2)^{m_2}\ldots(x^2-\alpha_n^2)^{m_n}$,

l'une des fonctions fx, φx étant paire et l'autre impaire.

Telle est donc la relation la plus générale entre des fonctions rapportées au même module et à la même variable.

Il est remarquable que la fonction de la seconde espèce n'entre point dans cette relation.

Quant à la quantité constante β qui multiplie la fonction de la première espèce ϖx, elle pourra sous certaines conditions se réduire à zéro.

L'équation (105.) qui donne les relations nécessaires entre les paramètres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ est précisément de la même forme que celle que nous avons considéré dans le chapitre I. En regardant $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ comme des variables, elle donnera en vertu du théorème I.:

106. $$\begin{cases} m_1 \Pi\alpha_1 + m_2 \Pi\alpha_2 + \ldots + m_n \Pi\alpha_n = C - \dfrac{a}{2\triangle a}\log\left\{\dfrac{fa+\varphi a.\triangle a}{fa-\varphi a.\triangle a}\right\}, \\ m_1\varpi\alpha_1 + m_2\varpi\alpha_2 + \ldots + m_n\varpi\alpha_n = C \end{cases}$$

où $$\Pi\alpha = \int^{\alpha} \frac{\partial\alpha}{\left(1-\frac{\alpha^2}{a^2}\right)\triangle\alpha}.$$

Les paramètres $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_n$ satisfont donc à l'équation différentielle:

107. $$\frac{m_1\partial\alpha_1}{\triangle\alpha_1} + \frac{m_2\partial\alpha_2}{\triangle\alpha_2} + \ldots + \frac{m_n\partial\alpha_n}{\triangle\alpha_n} = 0.$$

Pour avoir toutes les fonctions de la troisième espèce qui seront réductibles indéfiniment à la première espèce, il faut faire $n=1$. En posant $\alpha_1=\alpha$, $m_1=m$, on a:

108. $$\Pi'\alpha = \frac{\beta\alpha}{2m\triangle\alpha}\varpi x - \frac{\alpha}{2m\triangle\alpha}.\log\left\{\frac{fx+\varphi x.\triangle x}{fx+\varphi x.\triangle x}\right\}.$$

Pour trouver dans ce cas le paramètre α, on aura l'équation:

109. $(fx)^2-(\varphi x)^2(1-x^2)(1-c^2x^2) = (x^2-\alpha^2)^m$,

ce qui fait dépendre α d'une équation qui généralement est du degré m^2. Le cas le plus simple est celui où $m=2$. On aura dans ce cas:

$$\varphi x = \frac{1}{c}\sqrt{-1},\quad fx = ax,$$

donc:

$$(x^2-\alpha^2)^2 = x^4 - \left\{\frac{1+c^2}{c^2} - a^2\right\}x^2 + \frac{1}{c^2} = \left(x^2 \pm \frac{1}{c}\right)^2;$$

donc α pourra avoir les deux valeurs $\frac{1}{\sqrt{c}}$, $+\frac{1}{\sqrt{-c}}$. Les valeurs correspondantes de α sont $1-\frac{1}{c}$, $1+\frac{1}{c}$. On aura:

$$\Pi'\left(\frac{1}{\sqrt{c}}\right) = \int \frac{\partial x}{(1-cx^2)\triangle x} = k\varpi x + \tfrac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{-1}}{c(c-1)}\cdot\log\left\{\frac{(c-1)x+\sqrt{-1}\cdot\triangle x}{(c-1)x-\sqrt{-1}\cdot\triangle x}\right\},$$

où l'on pourra varier le signe de c.

Si $m=3$, on aura dans le cas fx impair:

$$fx = x^3+ax, \quad \varphi x = b,$$

donc:

$$(x^3+ax)^2 - b^2(1-x^2)(1-c^2x^2) = (x^2-\alpha^2)^3.$$

De là on tire:

$$\alpha^3 = b, \quad \alpha^3+a\alpha+b\triangle\alpha = 0, \quad 2a-c^2b^2 = -3\alpha^2, \quad a^2+(1+c^2)b^2 = 3\alpha^4,$$

donc en éliminant a et b, on trouvera:

$$a = \tfrac{1}{2}\{c^2\alpha^6-3\alpha^2\},$$
$$\triangle\alpha = \tfrac{1}{2}(1-c^2\alpha^4).$$

Si donc α est une racine de l'équation, on aura:

$$\Pi'\alpha = \int\frac{\partial x}{\left(1-\frac{x^2}{\alpha^2}\right)\triangle x} = k.\varpi' x - \tfrac{1}{3}\cdot\frac{\alpha}{1-c^2\alpha^4}\cdot\log\left\{\frac{x^3+\frac{1}{2}(c^2\alpha^6-3\alpha^2)x+\alpha^3.\triangle x}{x^3+\frac{1}{2}(c^2\alpha^6-3\alpha^2)x-\alpha^3.\triangle x}\right\},$$

Généralement la quantité α séra pour un m quelconque racine de l'une de deux équations:

$$110. \quad x_m = 0; \quad x_m = \tfrac{1}{0},$$

où x_m est la fonction de x que nous avons considéré dans le §. 4. du chapitre I., et qui est telle qu'on ait

$$\frac{\partial x_m}{\triangle x_m} = m.\frac{\partial x}{\triangle x},$$

et en même tems

$$x_m = 0 \text{ pour } x = 0.$$

Il y a encore à remarquer, que si l'on désigne par α une racine de $x_m = 0$, $\frac{1}{c\alpha}$ en sera une de l'équation $x_m = \frac{1}{0}$. Pour prouver que α satisfait à une des équations (110.), il suffit de remarquer qu'on a (39.):

$$111. \quad p^2-q^2(\triangle x)^2 = (x^2-\alpha^2)^m(x^2-\alpha_m^2),$$

où α_m désigne la même fonction de α, que x_m l'est de x. En multipliant les deux équations (109. 111.) membre par membre, il viendra:

$$(pfx\pm q\varphi x\triangle^2 x)^2-(p\varphi x\pm qfx)^2(\triangle x)^2 = (x^2-\alpha^2)^{2m}(x^2-\alpha_m^2).$$

Or on tire des mêmes équations:

$$p^2(fx)^2-q^2(\varphi x)^2(\triangle x)^4 = (x^2-\alpha^2)^m.R,$$

où R est une fonction entière. De là on voit que l'une des deux fonctions

$$pfx+q\varphi x.\triangle^2 x, \quad pfx-q\varphi x.\triangle^2 x$$

sera divisible par $(x^2-\alpha^2)^m$; donc en divisant l'équation par $(x^2-\alpha^2)^{2m}$, le résultat sera de la forme:

$$r^2 - \varrho^2(\triangle x)^2 = x^2 - \alpha_m^2,$$

où l'une des fonction r et ϱ sera paire et l'autre impaire. On doit donc avoir d'abord $\varrho = 0$, et ensuite $r^2 = x^2 - \alpha_m^2$, et de là $\alpha_m = 0$, ou $\alpha_m = \frac{1}{0}$. Réciproquement si l'une de ces équations a lieu, il est clair par la forme de (111.), qu'on pourra satisfaire à l'équation (109.). Il y a à remarquer que dans le cas que nous considérons, β ne pourra jamais être zéro. Donc il n'existe de fonction de la troisième espèce, exprimable par des fonctions algébriques et logarithmiques.

Le cas particulier le plus remarquable de la formule générale (105.) est celui, où $n = 3$ et $m_1 = m_2 = m_3 = 1$. Dans ce cas, en faisant $\alpha_3 = \alpha$, $\triangle\alpha_3 = -\triangle\alpha$, on aura:

$$112.\quad \frac{\triangle\alpha_1}{\alpha_1}.\Pi'\alpha_1 + \frac{\triangle\alpha_2}{\alpha_2}\Pi'\alpha_2 = \frac{\triangle\alpha}{\alpha}\Pi'\alpha + \beta.\varpi x - \tfrac{1}{2}\log\left(\frac{fx+\varphi x\triangle x}{fx-\varphi x\triangle x}\right),$$

où

$$113.\quad \begin{cases} fx = x^3 + ax,\ \varphi x = b, \text{ ensorte que} \\ (x^3+ax)^2 - b^2(1-x^2)(1-c^2x^2) = (x^2-\alpha^2)(x^2-\alpha_1^2)(x^2-\alpha_2^2), \end{cases}$$

d'où l'on tire, comme dans le paragraphe 3. du chapitre I.:

$$114.\quad \begin{cases} \alpha = \dfrac{\alpha_1\triangle\alpha_2 + \alpha_2\triangle\alpha_1}{1-c^2\alpha_1^2\alpha_2^2}; \\ b = \alpha.\alpha_1.\alpha_2;\quad a = \tfrac{1}{2}.\{c^2\alpha^2\alpha_1^2\alpha_2^2 - \alpha^2 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2\}; \\ \dfrac{\triangle\alpha}{\alpha} = \dfrac{\alpha^2+\alpha}{\alpha.\alpha_1.\alpha_2};\quad \beta = c^2\alpha.\alpha_1.\alpha_2. \end{cases}$$

Les deux paramètres α_1, α_2 sont donc arbitraires.

Comme cas particulier on remarquera celui où α_2 est infini. On aura dans ce cas

$$\alpha = \pm\frac{1}{c\alpha_1}.$$

On pourra donc réduire l'une à l'autre deux fonctions, dont les paramètres sont respectivement α, $\frac{1}{c\alpha}$. La formule correspondante pour effectuer cette réduction est:

$$115.\quad \Pi'\alpha + \Pi'\left(\frac{1}{c\alpha}\right) = \varpi x + \tfrac{1}{2}.\frac{\alpha}{\triangle\alpha}.\log\left\{\frac{x\triangle\alpha+\alpha\triangle x}{x\triangle\alpha-\alpha\triangle x}\right\}.$$

Pour trouver toutes les fonctions réductibles l'une à l'autre, il suffit de faire dans la formule (104.) $n = 2$. Cela donne

$$116.\quad m_1.\frac{\triangle\alpha_1}{\alpha_1}\Pi'\alpha_1 + m_2\frac{\triangle\alpha_2}{\alpha_2}\Pi'\alpha_2 = \beta.\varpi x - \tfrac{1}{2}\log\left\{\frac{fx+\varphi x\triangle x}{fx-\varphi x\triangle x}\right\},$$

où les paramètres α_1 et α_2 sont liées entre eux par l'équation:

$$117.\quad (fx)^2 - (\varphi x)^2.(1-x^2)(1-c^2x^2) = (x^2-\alpha_1^2)^{m_1}(x^2-\alpha_2^2)^{m_2}$$

et cela donnera une seule équation entre α_1 et α_2.

(La continuation dans le cahier prochain.)

20.
Beweise verschiedener Sätze.

(Von Herrn *Th. Clausen* zu Altona.)

Es ist:

$$\int^m y\,\partial x^m = \frac{1}{1.2.3....m}\left\{x^m y - x^{m-1}\int x\partial y + \frac{m.m-1}{1.2}x^{m-2}\int x^2\partial y - .... \pm \int x^m \partial y\right\}.$$

Differentiirt man nemlich den Ausdruck, so findet man:

$$\int^{m-1} y\,\partial x^{m-1} = \frac{1}{1.2.3....m}\left\{x^m\partial y - m\,x^m\,\partial y + \frac{m.m-1}{1.2}x^m\,\partial y - .... \pm x^m\,\partial y\right\}$$

$$+ \frac{1}{1.2.3....m-1}\left\{x^{m-1}y - (m-1)x^{m-2}\int x\partial y + \frac{m-1.m-2}{1.2}\int x^2\partial y - .... \pm \int x^{m-1}\partial y\right\};$$

da aber $1 - m + \frac{m.m-1}{1.2} - \frac{m.m-1.m-2}{1.2} .... = (1-1)^m = 0$ ist, so ist:

$$\int^{m-1} y\,\partial x^{m-1}$$

$$= \frac{1}{1.2.3....m-1}\left\{x^{m-1}y - (m-1)x^{m-2}\int x\partial y + \frac{m-1.m-2}{1.2}\int x^2\partial y - .... \pm \int x^{m-1}\partial y\right\}.$$

Man sieht nun leicht, dafs eine nochmalige Differentiation geben wird:

$$\int^{m-2} y\,\partial x^{m-2}$$

$$= \frac{1}{1.2.3....m-2}\left\{x^{m-2}y - (m-2)x^{m-3}\int x\partial y + \frac{m-2.m-3}{1.2}\int x^2\partial y - .... \pm \int x^{m-2}\partial y\right\},$$

und dafs eine fortgesetzte Differentiation zuletzt die identische Gleichung

$$y = y$$

giebt, wodurch also der obige Ausdruck bewiesen ist.

Es sei $\text{tang}\,\varphi = a$, $\text{tang}\,\varphi' = a'$, $\text{tang}\,\varphi'' = a''$, ...; wir haben dann:

$$\text{tang}\,(\varphi+\varphi') = \frac{a+a'}{1-aa'},$$

$$\text{tang}\,(\varphi+\varphi'+\varphi'') = \frac{\frac{a+a'}{1-aa'}+a''}{1-a''\frac{a+a'}{1-aa'}} = \frac{a+a'+a''-aa'a''}{1-(aa'+aa''+a'a'')},$$

$$\text{tang}\,(\varphi+\varphi'+\varphi''+\varphi''') = \frac{\frac{a+a'+a''-aa'a''}{1-(aa'+aa''+a'a'')}+a'''}{1-a'''\frac{a+a'+a''-aa'a''}{1-(aa'+aa''+a'a'')}}$$

$$= \frac{a+a'+a''+a'''-(aa'a''+aa'a'''+aa''a'''+a'a''a''')}{1-(aa'+aa''+aa'''+a'a''+a'a'''+a''a''')+aa'a''a'''}.$$

Bezeichnet man durch $(1)_m$ die Summe der Gröfsen a, a', a'', a''', ... $a^{(m-1)}$; durch $(2)_m$ die Summe der Producte je 2 und 2 . . . . $aa' + aa'' + \ldots$.; durch $(3)_m$ die Summe der Producte je 3 und 3, u. s. w., so deuten die obigen Gleichungen auf den allgemeinen Ausdruck:

$$(a.) \quad \text{tang}(\varphi + \varphi' + \varphi'' + \ldots + \varphi^{(m-1)}) = \frac{(1)_m - (3)_m + (5)_m - \text{etc.}}{1 - (2)_m + (4)_m - \text{etc.}}.$$

Bildet man die Producte je n und n der $m+1$ Gröfsen, a, a', a'', ... $a^{(m)}$

$$\begin{array}{l} a^{(m)}\, a^{(m-1)}\, a^{(m-2)} \ldots . \\ \vdots \\ a^{(m-1)}\, a^{(m-2)}\, a^{(m-3)} \ldots . \\ \vdots \\ a^{(m-2)}\, a^{(m-3)} \ldots . \\ \vdots \end{array}$$

so sieht man leicht, dafs die Summe der mit $a^{(m)}$ multiplicirten Glieder $= (n-1)_m$ ist, und dafs die Summe der übrigen $(n)_m$, folglich

$$(b.) \quad n_{m+1} = a^{(m)}(n-1)_m + (n)_m \ldots .$$

Nimmt man nun an, dafs der obige Ausdruck $(a.)$ für m Gröfsen richtig sei, so folgt daraus für $m+1$ Gröfsen:

$$\text{tang}(\varphi + \varphi' + \ldots + \varphi^{(m-1)} + \varphi^{(m)}) = \frac{\dfrac{(1)_m - (3)_m + (5)_m - \ldots .}{1 - (2)_m + (4)_m - \ldots .} + a^{(m)}}{1 - a^{(m)} \dfrac{(1)_m - (3)_m + (5)_m - \ldots .}{1 - (2)_m + (4)_m - \ldots .}}$$

$$= \frac{(1)_m + a^{(m)} - [(3)_m + a^{m}(2)_m] + [(5)_m + a^{(m)}(4)_m] - \ldots .}{1 - [(2)_m + a^{(m)}(1)_m] + [(4)_m + a^{(m)}(3)_m] - \ldots .},$$

und durch Hülfe der Gleichung $(b.)$:

$$\text{tang}(\varphi + \varphi' + \varphi'' + \ldots + \varphi^{(m)}) = \frac{(1)_{m+1} - (3)_{m+1} + (5)_{m+1} - \ldots .}{1 - (2)_{m+1} + (4)_{m+1} - \ldots .}.$$

Der Ausdruck $(a.)$ gilt also dann auch für die Anzahl $m+1$, wenn er für m gilt, und überhaupt allgemein, da er für $m = 1$, 2, 3 und 4 richtig ist.

Aus diesem Satze folgt das bemerkenswerthe Resultat, dafs wenn die Wurzeln einer beliebigen Gleichung $\text{tang}\varphi$, $\text{tang}\varphi'$, ... sind, man die Summe $\varphi + \varphi' + \varphi''$ etc. bestimmen könne, ohne die Gleichung erst aufzulösen; da die Gröfsen $(1)_m$, $(2)_m$ etc. die respectiven Coefficienten der Gleichung sind.

Sei fx eine beliebige Function von x, und $\alpha^n = 1$; überdies φ eine solche Function, dafs

$$\varphi[f(x)] = f(\alpha x),$$

so ist

$$\varphi^n(y) = y.$$

Denn

$$\begin{aligned}
\varphi^2[f(x)] &= \varphi[f(\alpha x) = f(\alpha^2 x),\\
\varphi^3[f(x)] &= \varphi[f(\alpha^2 x)] = f(\alpha^3 x),\\
&\vdots\\
\varphi^n[f(x)] &= \varphi[f(\alpha^{n-1} x)] = f(\alpha^n x) = f(x),
\end{aligned}$$

wo $\varphi^n(y) = \varphi(\varphi(\varphi(\ldots\varphi(y))))$ ist.

Dieser Satz giebt eine allgemeine Regel zur Erfindung der von Babbage benannten periodischen Functionen.

Altona, den 3. August 1828.

21.

Summirung verschiedener nach den Sinussen oder Cosinussen vielfacher Bogen fortgehender Reihen.

(Von Herrn *Th. Clausen* zu Altona.)

Der gröfste Theil dieser Reihen, deren numerische Coefficienten mit den Coefficienten bekannter, nach den Potenzen der veränderlichen Gröfse entwickelter Functionen übereinstimmen, läfst sich durch einen endlichen Ausdruck summiren. Diesen gebe ich hier für die vorzüglichsten Reihen, deren Coefficienten nach bekannten Gesetzen gebildet sind.

1. Die Coefficienten seien die des Binomii, oder:

$$y = 1 + \frac{m}{1} z\cos\varphi + \frac{m.m-1}{1.2} z^2\cos 2\varphi + \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3} z^3\cos 3\varphi + \ldots.$$

Man hat bekanntlich:

$$\cos\varphi = \frac{e^{\varphi\sqrt{-1}} + e^{-\varphi\sqrt{-1}}}{2};$$

$$\sin\varphi = \frac{e^{\varphi\sqrt{-1}} - e^{-\varphi\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}};$$

wodurch man erhält:

$$2y = (1 + z e^{\varphi\sqrt{-1}})^m + (1 + z e^{-\varphi\sqrt{-1}})^m.$$

Ferner ist

$$e^{\varphi\sqrt{-1}} = \cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1};$$
$$e^{-\varphi\sqrt{-1}} = \cos\varphi - \sin\varphi\sqrt{-1};$$

folglich:

$$2y = (1 + z\cos\varphi + z\sin\varphi\sqrt{-1})^m + (1 + z\cos\varphi - z\sin\varphi\sqrt{-1})^m.$$

Ich setze:

$$1 + z\cos\varphi = \beta\cos\psi,$$
$$z\sin\varphi = \beta\sin\psi,$$

wodurch sich der obige Ausdruck in

$$2y = \beta^m(\cos\psi + \sin\psi\sqrt{-1})^m + \beta^m(\cos\psi - \sin\psi\sqrt{-1})^m$$
$$= \beta^m(e^{m\psi\sqrt{-1}} + e^{-m\psi\sqrt{-1}})$$

verwandelt, und also:

$$y = \beta^m\cos m\psi.$$

Aus dem Obigen haben wir:

$$\beta^2 = 1 + 2z\cos\varphi + z^2 \quad \text{und} \quad \operatorname{tang}\psi = \frac{\alpha\sin\varphi}{1 + \alpha\cos\varphi},$$

folglich ist:

$$(1.)\quad y = (1+2z\cos\varphi+z^2)^{\frac{m}{2}}\cos m.\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{z\sin\varphi}{1+z\cos\varphi}\right).$$

Eine zweite Reihe mit denselben Coefficienten ist:

$$x = \frac{m}{1}z\sin\varphi+\frac{m.m-1}{1.2}z^2\sin 2\varphi+\frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}z^3\sin 3\varphi+\ldots..$$

Durch Zerlegung findet sich:

$$\begin{aligned}2x\sqrt{-1} &= (1+ze^{\varphi\sqrt{-1}})^m-(1+ze^{-\varphi\sqrt{-1}})^m\\ &= (1+z\cos\varphi+z\sin\varphi\sqrt{-1})^m-(1+z\cos\varphi-z\sin\varphi\sqrt{-1})^m\\ &= \beta^m(\cos\psi+\sin\psi\sqrt{-1})^m-\beta^m(\cos\psi-\sin\psi\sqrt{-1})^m\\ &= \beta^m(e^{m\psi\sqrt{-1}}-e^{-m\psi\sqrt{-1}}),\end{aligned}$$

folglich

$$x = \beta^m\sin m\psi,$$

$$(2.)\quad x = (1+2z\cos\varphi+z^2)^{\frac{m}{2}}\sin m.\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{z\sin\varphi}{1+z\cos\varphi}\right).$$

Für den Fall $z=1$ ist:

$$\begin{aligned}\beta\cos\psi &= 1+\cos\varphi = 2\cos\tfrac{1}{2}\varphi^2,\\ \beta\sin\psi &= \sin\varphi = 2\sin\tfrac{1}{2}\varphi\cos\tfrac{1}{2}\varphi,\end{aligned}$$

mithin $\beta = 2\cos\frac{1}{2}\varphi$, $\operatorname{tang}\psi = \operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi$ oder $\psi = \frac{1}{2}\varphi$; es wird also:

$$(3.)\quad 1+\frac{m}{1}\cos\varphi+\frac{m.m-1}{1.2}\cos 2\varphi+\frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}\cos 3\varphi\ldots = 2^m\cos\tfrac{1}{2}\varphi^m\cos\tfrac{1}{2}m\varphi,$$

$$(4.)\quad \frac{m}{1}\sin\varphi+\frac{m.m-1}{1.2}\sin 2\varphi+\frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}\sin 3\varphi\ldots = 2^m\cos\tfrac{1}{2}\varphi^m\sin\tfrac{1}{2}m\varphi.$$

2. Die Coefficienten seien die der Entwickelung von $\log\operatorname{nat}(1-z)$.

Sei

$$y = z\cos\varphi+\tfrac{1}{2}z^2\cos 2\varphi+\tfrac{1}{3}z^3\cos 3\varphi+\tfrac{1}{4}z^4\cos 4\varphi+\ldots.$$

so ist

$$\begin{aligned}2y &= -\log(1-ze^{\varphi\sqrt{-1}})-\log(1-ze^{-\varphi\sqrt{-1}}),\\ (5.)\quad y &= -\tfrac{1}{2}\log(1-2z\cos\varphi+z^2).\end{aligned}$$

Sei ferner

$$x = z\sin\varphi+\tfrac{1}{2}z^2\sin 2\varphi+\tfrac{1}{3}z^3\sin 3\varphi+\tfrac{1}{4}z^4\sin 4\varphi+\ldots.,$$

so ist

$$2x\sqrt{-1} = -\log(1-ze^{\varphi\sqrt{-1}})+\log(1-ze^{-\varphi\sqrt{-1}}),$$

$$e^{2x\sqrt{-1}} = \frac{1-ze^{-\varphi\sqrt{-1}}}{1-ze^{\varphi\sqrt{-1}}},$$

$$\frac{e^{2x\sqrt{-1}}-1}{e^{2x\sqrt{-1}}+1} = \frac{z(e^{\varphi\sqrt{-1}}-e^{-\varphi\sqrt{-1}})}{2-z(e^{\varphi\sqrt{-1}}+e^{-\varphi\sqrt{-1}})},$$

$$\frac{\dfrac{e^{x\sqrt{-1}}-e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}}{\dfrac{e^{x\sqrt{-1}}+e^{-x\sqrt{-1}}}{2}} = \frac{z.\dfrac{e^{\varphi\sqrt{-1}}-e^{-\varphi\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}}{1-z.\dfrac{e^{\varphi\sqrt{-1}}+e^{-\varphi\sqrt{-1}}}{2}},$$

$$\operatorname{tang} x = \frac{z \sin \varphi}{1 - z \cos \varphi},$$

und also:

$$(6.) \quad x = \operatorname{arc\,tang} \frac{z \sin \varphi}{1 - z \cos \varphi}.$$

Für den Fall $z = 1$ ist wieder

$$(7.) \quad \cos \Phi + \tfrac{1}{2} \cos 2\Phi + \tfrac{1}{3} \cos 3\Phi + \tfrac{1}{4} \cos 4\Phi + \ldots = -\log(2 \sin \tfrac{1}{2}\Phi),$$

$$(8.) \quad \sin \Phi + \tfrac{1}{2} \sin 2\Phi + \tfrac{1}{3} \sin 3\Phi + \tfrac{1}{4} \sin 4\Phi + \ldots = \operatorname{arc\,tg}(\operatorname{ctg} \tfrac{1}{2}\Phi) = \tfrac{1}{2}(\pi - \Phi).$$

3. Die Coefficienten seien die der Entwickelung von e^z.

$$y = 1 + z \cos \Phi + \frac{1}{1.2} z^2 \cos 2\Phi + \frac{1}{1.2.3} z^3 \cos 3\Phi + \ldots.$$

$$\begin{aligned} 2y &= e^{ze^{\varphi\sqrt{-1}}} + e^{ze^{-\varphi\sqrt{-1}}} \\ &= e^{z\cos\varphi + z\sin\varphi\sqrt{-1}} + e^{z\cos\varphi - z\sin\varphi\sqrt{-1}} \\ &= e^{z\cos\varphi}(e^{z\sin\varphi\sqrt{-1}} + e^{-z\sin\varphi\sqrt{-1}}), \end{aligned}$$

$$(9.) \quad y = e^{z\cos\varphi} \cos(z \sin \Phi).$$

Ferner:

$$x = z \sin \Phi + \frac{1}{1.2} z^2 \sin 2\Phi + \frac{1}{1.2.3} z^3 \sin 3\Phi + \ldots.$$

$$\begin{aligned} 2x\sqrt{-1} &= e^{ze^{\varphi\sqrt{-1}}} - e^{ze^{-\varphi\sqrt{-1}}} \\ &= e^{z\cos\varphi + z\sin\varphi\sqrt{-1}} - e^{z\cos\varphi - z\sin\varphi\sqrt{-1}} \\ &= e^{z\cos\varphi}(e^{z\sin\varphi\sqrt{-1}} - e^{-z\sin\varphi\sqrt{-1}}), \end{aligned}$$

$$(10.) \quad x = e^{z\cos\varphi} \sin(z \sin \Phi).$$

Setzt man $z = 1$, so findet man:

$$(11.) \quad 1 + \cos \Phi + \frac{1}{1.2} \cos 2\Phi + \frac{1}{1.2.3} \cos 3\Phi + \ldots. = e^{\cos\varphi} \cos(\sin \Phi),$$

$$(12.) \quad \sin \Phi + \frac{1}{1.2} \sin 2\Phi + \frac{1}{1.2.3} \sin 3\Phi + \ldots. = e^{\cos\varphi} \sin(\sin \Phi).$$

4. Die Coefficienten seien die der Entwickelung von $\cos z$.

$$y = 1 - \frac{1}{1.2} z^2 \cos 2\Phi + \frac{1}{1.2.3.4} z^4 \cos 4\Phi - \frac{1}{1.2.3.4.5.6} z^6 \cos 6\Phi + \ldots.$$

$$\begin{aligned} 2y &= \cos(z e^{\varphi\sqrt{-1}}) + \cos(z e^{-\varphi\sqrt{-1}}) \\ &= \cos(z\cos\Phi + z\sin\Phi\sqrt{-1}) + \cos(z\cos\Phi - z\sin\Phi\sqrt{-1}) \\ &= 2\cos(z\cos\Phi)\cos(z\sin\Phi\sqrt{-1}) \end{aligned}$$

$$(13.) \quad y = \cos(z\cos\Phi)\frac{e^{z\sin\varphi} + e^{-z\sin\varphi}}{2},$$

$$x = -\frac{1}{1.2} z^2 \sin 2\Phi + \frac{1}{1.2.3.4} z^4 \sin 4\Phi - \frac{1}{1.2.3.4.5.6} z^6 \sin 6\Phi + \ldots.$$

$$2x\sqrt{-1} = \cos(ze^{\varphi\sqrt{-1}}) - \cos(ze^{-\varphi\sqrt{-1}})$$
$$= \cos(z\cos\Phi + z\sin\Phi\sqrt{-1}) - \cos(z\cos\Phi - z\sin\Phi\sqrt{-1})$$
$$= -2\sin(z\cos\Phi)\sin(z\sin\Phi\sqrt{-1})$$

$$(14.)\quad x = -\sin(z\cos\Phi)\frac{e^{z\sin\varphi} - e^{-z\sin\varphi}}{2}.$$

Setzen wir wieder $z = 1$, so verwandeln sich diese Ausdrücke in:

$$(15.)\quad 1 - \frac{1}{1.2}\cos 2\Phi + \frac{1}{1.2.3.4}\cos 4\Phi - \frac{1}{1.2.3.4.5.6}\cos 6\Phi \ldots = \cos(\cos\Phi)\frac{e^{\sin\varphi} + e^{-\sin\varphi}}{2},$$

$$(16.)\quad -\frac{1}{1.2}\sin 2\Phi + \frac{1}{1.2.3.4}\sin 4\Phi - \frac{1}{1.2.3.4.5.6}\sin 6\Phi \ldots = -\sin(\cos\Phi)\frac{e^{\sin\varphi} - e^{-\sin\varphi}}{2}.$$

5. Die Coefficienten seien die der Entwickelung von z:

$$y = z\cos\Phi - \frac{1}{1.2.3}z^3\cos 3\Phi + \frac{1}{1.2.3.4.5}z^5\cos 5\Phi - \ldots.$$
$$2y = \sin(ze^{\varphi\sqrt{-1}}) + \sin(ze^{-\varphi\sqrt{-1}})$$
$$= 2\sin(z\cos\Phi)\cos(z\sin\Phi\sqrt{-1})$$

$$(17.)\quad y = \sin(z\cos\Phi)\frac{e^{z\sin\varphi} + e^{-z\sin\varphi}}{2},$$

$$x = z\sin\Phi - \frac{1}{1.2.3}z^3\sin 3\Phi + \frac{1}{1.2.3.4.5}z^5\sin 5\Phi - \ldots.$$
$$2x\sqrt{-1} = \sin(ze^{\varphi\sqrt{-1}}) - \sin(ze^{-\varphi\sqrt{-1}})$$
$$= 2\cos(z\cos\Phi)\sin(z\sin\Phi\sqrt{-1}),$$

$$(18.)\quad x = \cos(z\cos\Phi)\frac{e^{z\sin\varphi} - e^{-z\sin\varphi}}{2}.$$

Für $z = 1$ werden diese Ausdrücke:

$$(19.)\quad \cos\Phi - \frac{1}{1.2.3}\cos 3\Phi + \frac{1}{1.2.3.4.5}\cos 5\Phi - \ldots. = \sin(\cos\Phi)\frac{e^{\sin\varphi} - e^{-\sin\varphi}}{2},$$

$$(20.)\quad \sin\Phi - \frac{1}{1.2.3}\sin 3\Phi + \frac{1}{1.2.3.4.5}\sin 5\Phi - \ldots. = \cos(\cos\Phi)\frac{e^{\sin\varphi} - e^{-\sin\varphi}}{2},$$

6. Die Coefficienten seien die der Entwickelung von $\arcsin z$:

$$y = z\cos\Phi + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{3}z^3\cos 3\Phi + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{5}z^5\cos 5\Phi + \ldots.$$
$$2y = \arcsin(ze^{\varphi\sqrt{-1}}) + \arcsin(ze^{-\varphi\sqrt{-1}}).$$

Sei

$$\sin p = ze^{\varphi\sqrt{-1}}, \quad \cos p = \sqrt{(1 - z^2e^{2\varphi\sqrt{-1}})},$$
$$\sin q = ze^{-\varphi\sqrt{-1}}, \quad \cos q = \sqrt{(1 - z^2e^{-2\varphi\sqrt{-1}})},$$

so ist

$$2y = p + q \text{ und}$$
$$\cos(p+q) = \cos p\cos q - \sin p\sin q = \sqrt{(1 - 2z^2\cos 2\Phi + z^4)} - z^2,$$

$$(21.)\quad y = \tfrac{1}{2}\arccos\{\sqrt{(1 - 2z^2 + z^4)} - z^2\},$$

$$x = z\sin\Phi + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{3}z^3\sin 3\Phi + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{5}\sin 5\Phi + \ldots.$$

$$2x\sqrt{-1} = \arcsin(ze^{q\sqrt{-1}}) - \arcsin(ze^{-q\sqrt{-1}})$$
$$= p - q,$$
$$2x = (q-p)\sqrt{-1},$$
$$e^{2x} + e^{-2x} = e^{(q-p)\sqrt{-1}} + e^{-(q-p)\sqrt{-1}} = 2\cos(q-p) = 2(\cos q\cos p + \sin q\sin p),$$
$$e^{2x} + e^{-2x} = 2[\sqrt{(1-2z^2\cos 2\Phi + z^4)} + z^2],$$
$$e^{4x} - 2[\sqrt{(1-2z^2\cos 2\Phi + z^4)} + z^2]e^{2x} + 1 = 0,$$
$$e^{2x} = \sqrt{(1-2z^2\cos 2\Phi + z^4)} + z^2 \pm \sqrt{\{2z^4 - 2z^2\cos 2\Phi + 2z^2\sqrt{(1-2z^2\cos 2\Phi + z^4)}\}},$$
$$(22.)\quad x =$$
$$\tfrac{1}{2}\log[z^2 + \sqrt{(1-2z^2\cos 2\Phi + z^4)} \pm \sqrt{\{2z^4 - 2z^2\cos 2\Phi + 2z^2\sqrt{(1-2z^2\cos 2\Phi + z^4)}\}}].$$

7. Die Coefficienten seien die der Entwickelung von $\arctang z$:

$$y = z\cos\Phi - \tfrac{1}{3}z^3\cos 3\Phi + \tfrac{1}{5}z^5\cos 5\Phi - \ldots.$$
$$2y = \arctang(ze^{q\sqrt{-1}}) + \arctang(ze^{-q\sqrt{-1}}).$$

Sei

$$\tang p = ze^{q\sqrt{-1}},\quad \tang q = ze^{-q\sqrt{-1}},$$

so ist

$$\tang 2y = \tang(p+q) = \frac{z(e^{q\sqrt{-1}} + e^{-q\sqrt{-1}})}{1-z^2},$$

$$(23.)\quad y = \tfrac{1}{2}\arctang\frac{2z\cos\varphi}{1-z^2}.$$

$$x = z\sin\Phi - \tfrac{1}{3}z^3\sin 3\Phi + \tfrac{1}{5}z^5\sin 5\Phi - \ldots.$$
$$2x\sqrt{-1} = \arctang(ze^{q\sqrt{-1}}) - \arctang(ze^{-q\sqrt{-1}}),$$
$$2x\sqrt{-1} = p - q,$$
$$\tang(p-q) = \frac{z(e^{q\sqrt{-1}} - e^{-q\sqrt{-1}}}{1+z^2} = \frac{2z\sin\varphi\sqrt{-1}}{1+z^2}.$$

Nun ist

$$e^{4x} = e^{-2(p-q)\sqrt{-1}} = \frac{\cos(p-q) - \sin(p-q)\sqrt{-1}}{\cos(p-q) + \sin(p-q)\sqrt{-1}},$$
$$e^{4x} = \frac{1 - \tang(p-q)\sqrt{-1}}{1 + \tang(p-q)\sqrt{-1}} = \frac{1 + 2z\sin\varphi + z^2}{1 - 2z\sin\varphi + z^2},$$

folglich

$$(24.)\quad x = \tfrac{1}{4}\log\frac{1+2z\sin\varphi + z^2}{1-2z\sin\varphi + z^2}.$$

8. Die Coefficienten seien die der Entwickelung von $\tang z$:

$$y = z\cos\Phi + Az^3\cos 3\Phi + Bz^5\cos 5\Phi + \ldots.$$
$$2y = \tang(ze^{q\sqrt{-1}}) + \tg(ze^{-q\sqrt{-1}})$$
$$= \frac{\sin(ze^{q\sqrt{-1}})\cos(ze^{-q\sqrt{-1}}) + \cos(ze^{q\sqrt{-1}})\sin(ze^{-q\sqrt{-1}})}{\cos(ze^{q\sqrt{-1}})\cos(ze^{-q\sqrt{-1}})},$$

es ist aber

$$\text{aos}(z e^{\varphi\sqrt{-1}})\cos(z e^{-\varphi\sqrt{-1}}) = \tfrac{1}{2}\cos(z e^{\varphi\sqrt{-1}} + z e^{-\varphi\sqrt{-1}}) + \tfrac{1}{2}\cos(z e^{\varphi\sqrt{-1}} - z e^{-\varphi\sqrt{-1}})$$
$$= \tfrac{1}{2}\cos(2z\cos\Phi) + \tfrac{1}{2}\cos(2z\sin\Phi\sqrt{-1})$$
$$= \tfrac{1}{2}\cos(2z\cos\Phi) + \tfrac{1}{4}e^{2z\sin\varphi} + \tfrac{1}{4}e^{-2z\sin\varphi},$$

also

$$2y = \frac{\sin(2z\cos\varphi)}{\frac{1}{2}\cos(2z\cos\varphi) + \frac{1}{4}e^{2z\sin\varphi} + \frac{1}{4}e^{-2z\sin\varphi}},$$

$$(25.)\quad y = \frac{2\sin(2z\cos\varphi)}{e^{2z\sin\varphi} + e^{-2z\sin\varphi} + 2\cos(2z\cos\varphi)},$$

$$x = z\sin\Phi + Az^3\sin 3\Phi + Bz^5\sin 5\Phi + \ldots.$$

$$2x\sqrt{-1} = \text{tang}(z e^{\varphi\sqrt{-1}}) - \text{tang}(z e^{-\varphi\sqrt{-1}})$$
$$= \frac{\sin z(e^{\varphi\sqrt{-1}} - e^{-\varphi\sqrt{-1}})}{\cos(z e^{\varphi\sqrt{-1}})\cos(z e^{-\varphi\sqrt{-1}})}$$
$$= \frac{\sin 2(z\sin\varphi\sqrt{-1})}{\frac{1}{4}e^{2z\sin\varphi} + \frac{1}{4}e^{-2z\sin\varphi} + \frac{1}{2}\cos(2z\cos\varphi)}$$
$$= \frac{e^{-2z\sin\varphi} - e^{2z\sin\varphi}}{\left\{\frac{1}{2}e^{2z\sin\varphi} + \frac{1}{2}e^{-2z\sin\varphi} + \cos(2z\cos\varphi)\right\}\sqrt{-1}}.$$

$$(26.)\quad x = \frac{e^{2z\sin\varphi} - e^{-2z\sin\varphi}}{e^{2z\sin\varphi} + e^{-2z\sin\varphi} + 2\cos(2z\cos\varphi)}.$$

Altona, den 3 August 1828.

22.

Über die Potenzial-Functionen.

(Von Hrn. Prof. *C. Gudermann* zu Cleve.)

1.

Die cyklischen (trigonometrischen) Functionen $\sin k$, $\cos k$, $\operatorname{tang} k$ und $\cot k$ und die umgekehrten $\operatorname{arc}(\sin = z)$, $\operatorname{arc}(\cos = z)$, $\operatorname{arc}(\operatorname{tang} = z)$ und $\operatorname{arc}(\cot = z)$ versagen allemal dann, wenn der Arcus (Winkel) imaginär wird. In einem solchen Falle pflegte man bisher jene in Exponenzial-Functionen, und die vier letzteren in logarithmische umzusetzen, welches in der That immer angeht, um die Unmöglichkeit wegfallen zu lassen. Hiermit ist aber ein Übelstand verbunden, welcher eben daher rührt, dafs jene acht Functionen bei einem solchen Übergange vom unmöglichen Arcus zum möglichen in zwei Formen gezwängt werden müssen, so dafs in vielen Fällen nicht nur lästige Umrechnungen erforderlich sind, sondern dafs auch das Resultat nun in einer viel unbequemeren Gestalt, als vorhin erscheint, und dieses ist freilich am schlimmsten. Da nun aber die cyklischen Functionen nicht blofs in der Geometrie, sondern auch in der reinen Analysis selbst, täglich gebraucht werden, so kann mit Recht verlangt werden, dem Gebrauche derselben die gröfste Allgemeinheit zu geben, so dafs arithmetische Ausdrücke, welche cyklische Functionen enthalten, dann, wenn dieselben oder ihr Arcus imaginär werden, ungeachtet der Abwerfung des Imaginären, sich nicht so unähnlich werden, wie bisher der Fall war. — Die allgemeine Arithmetik darf solche Beschränkungen, die nicht von ihr, sondern von der verschwisterten Geometrie herrühren, nicht dulden — ihre Formen müssen allgemeine sein.

Die berührten Weitläufigkeiten und Unbequemlichkeiten fallen weg, wenn wir die Beschränkung auf nur zwei Formen (Exponenzial- und Logarithmen-Ausdrücke) aufheben und statt derselben den vorigen cyklischen Ausdrücken eben so viele andere, also ebenfalls acht neue Formen für eben so viele Functionen gegenüberstellen, die dann am füglichsten hyperbolische Functionen (nach der gleichseitigen Hyperbel) heifsen.

Die Analysis, als solche, kennt aber weder den Kreis, noch die Hyperbel, und daher mag eine Benennung hinzukommen, welche nicht mehr auf diese Curven hinweiset. Die beiden Hauptarten der Functionen machen in der That ein einziges Geschlecht von Functionen aus, — sie mögen also zusammen Potenzial-Functionen heifsen, weil ihnen bei ihrer analytischen Nachweisung der Begriff einer Potenz als Hauptbegriff zum Grunde liegt. Nicht geometrische, sondern arithmetische Benennungen würde man ja auch hier haben, wären diese Functionen der Analysis nicht durch die Geometrie zugeführt worden, sondern hätte die Analysis, völlig unabhängig von der Geometrie, dieselben horvorgehoben und ihre Beziehungen entwickelt.

2.

Man kann die Potenz u^x dergestalt zweitheilig $P+Q$ ausdrücken, dafs auch ihr reciproker Werth u^{-x} dieselben zwei Theile P und Q hat, nur dafs der zweite Theil Q ein entgegengesetztes Vorzeichen erhält. Setzt man in der That:

$$u^x = P+Q,$$
$$u^{-x} = P-Q,$$

so findet man rückwärts $P=\frac{u^x+u^{-x}}{2}$ und $Q=\frac{u^x-u^{-x}}{2}$.

Die Function P heifse Cosinus der Zahl x für die Grundzahl u, und eben so heifse Q Sinus der Zahl x für die Grundzahl u. Der Quotient $\frac{Q}{P}$ heifse Tangente und der reciproke $\frac{P}{Q}$ Cotangente der Zahl x für die Grundzahl u. Das gemeinschaftliche Argument x kann Arcus (eine Zahl) genannt werden. Die Bezeichnung sei folgende:

$$P=\mathfrak{Cos}(x,u);\quad Q=\mathfrak{Sin}(x,u);\quad \frac{Q}{P}=\mathfrak{Tang}(x,u)\ \text{und}\ \frac{P}{Q}=\mathfrak{Cot}(x,u).$$

Ist die Grundzahl u zugleich die Grundzahl $e=2{,}71828\ldots.$ des natürlichen Logarithmensystems, so kann sie zu gröfserer Kürze in der Bezeichnung wegbleiben, und man hat einfacher:

$$\mathfrak{Cos}x=\frac{e^x+e^{-x}}{2};\quad \mathfrak{Sin}x=\frac{e^x-e^{-x}}{2};\quad \mathfrak{Tang}x=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}};\quad \mathfrak{Cot}x=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}.$$

Die Potenzialfunctionen heifsen in sofern selbst natürliche. Man findet z. B.

$$\mathfrak{Cos}1 = 1{,}54308\ 06348\ 15243\ 77847\ 79053,$$
$$\mathfrak{Sin}1 = 1{,}17520\ 11936\ 43801\ 45688\ 23812.$$

Also

$$e^{+1} = \mathfrak{Cos}\,1 + \mathfrak{Sin}\,1 = 2{,}71828\ 18284\ 59045\ 23536\ 02865 \text{ und}$$
$$e^{-1} = \mathfrak{Cos}\,1 - \mathfrak{Sin}\,1 = 0{,}36787\ 94411\ 71442\ 32159\ 55241.$$

3.

Setzt man nun $x\sqrt{-1}$ für x, so findet man ($\sqrt{-1}$ mit i bezeichnet):

$$\mathfrak{Cos}(ix) = \cos x \text{ und umgekehrt } \cos(ix) = \mathfrak{Cos}\,x,$$
$$\mathfrak{Sin}(ix) = i\sin x \text{ und umgekehrt } \sin(ix) = i\,\mathfrak{Sin}\,x,$$
$$\mathfrak{Tang}(ix) = i\tang x \text{ und umgekehrt } \tang(ix) = i.\mathfrak{Tang}\,x,$$
$$\mathfrak{Cot}(ix) = -ix\cot x \text{ und umgekehrt } \cot(ix) = -i.\mathfrak{Cot}\,x.$$

Die Potenzial-Functionen der einen Hauptart gehen also, wenn statt des Arcus x der unmögliche ix genommen wird, über in Potenzial-Functionen der anderen Hauptart: — also die hyperbolischen in cyklische und umgekehrt, die cyklischen in hyperbolische. Man findet z. B.

$$\cos 1 = 0{,}54030\ 23058\ 68039\ 71740\ 09367 = \mathfrak{Cos}\,i,$$
$$\sin 1 = 0{,}84147\ 09848\ 07896\ 50665\ 25024 = \frac{\mathfrak{Sin}\,i}{i},$$

und es ist dann:

$$e^{i} = \cos 1 + i.\sin 1 = \mathfrak{Cos}\,i + \mathfrak{Sin}\,i,$$
$$e^{-i} = \cos 1 - i.\sin 1 = \mathfrak{Cos}\,i - \mathfrak{Sin}\,i.$$

Schon hieraus ist die Leichtigkeit abzunehmen, mit der man arithmetische Ausdrücke mit Potenzial-Functionen, wenn der Arcus unmöglich ist, sogleich von der Unmöglichkeit befreien kann. Man hat nicht einmal nöthig, die Benennungen der Functionen abzuändern, sondern nur statt der lateinischen Vorsilben deutsche oder umgekehrt zu nehmen. Die kleinen, mit dem Factor oder Divisor i vorzunehmenden Rechnungen können immer im Kopfe bestritten werden, und sind kaum Rechnungen zu nennen. Die hyperbolischen Functionen sind ebenfalls periodisch, wie die cyklischen, sie haben aber unmögliche Perioden.

4.

Gerade diese Leichtigkeit der Übertragung hielt mich lange ab, eine umfassende Theorie der Potenzial-Functionen zu entwerfen, weil mir der Gegenstand, ungeachtet des grofsen Nutzens, den die Einführung gerade der hyperbolischen Functionen in die Analysis stiftet, in theoretischer Hinsicht zu unbedeutend schien, da ja fast alle, die cyklischen Functionen betreffenden Beziehungen sogleich in die verwandten, für die hyperbolischen Functionen geltenden umgesetzt werden können. Was

noch zu leisten übrig sei, bestand nach meinem anfänglichen Dafürhalten in der Anfertigung logarithmisch-hyperbolischer Tafeln, ähnlich den logarithmisch-cyklischen, weil ohne dieselben die neue Terminologie blofs eine Erweiterung der alten gewesen wäre, und der ihr zum Grunde liegende einfache Hauptgedanke nur das Bedürfnifs der genannten Tafeln lebhafter empfinden lasse. Ich begann die Anfertigung derselben, und die mehrjährige, obgleich häufig unterbrochene Arbeit führte mich nicht selten zu theoretischen Betrachtungen über die hyperbolischen Functionen und ihre Brauchbarkeit in der Analysis. So entstand wider meinen anfänglichen Willen eine Theorie der Potenzial-Functionen überhaupt, welche ich den berechneten Tafeln beizufügen und dem Publikum nächstens zu übergeben gedenke, weil sie Resultate enthält, die ich der Aufmerksamkeit der Analysten nicht unwürdig halte.

5.

Um eines anzuführen, weil es auf die Construction der Tafeln Bezug hat, bilde ich die Gleichung $\mathfrak{Cos}\varphi.\cos k = 1$, welche eine Beziehung zwischen den beiden Arcus φ und k ausdrückt, die ich durch $\varphi = \mathfrak{L}k$ und umgekehrt $k = l\varphi$ bezeichne. Ich nenne $\mathfrak{L}k$ die dem Arcus k zugehörige Längen-Zahl, und $l\varphi$ die dem Arcus φ zugehörige Longitudinal-Zahl. Man hat dann zunächst:

$$\mathfrak{L}lk = l\mathfrak{L}k = k;\ \mathfrak{L}0 = l0 = 0;\ \mathfrak{L}-k = -\mathfrak{L}k \text{ und } l-k = -lk.$$
$$\mathfrak{L}(ik) = i.lk \text{ und } l(ik) = i.\mathfrak{L}k.$$

In Anwendung dieser Functionen $\mathfrak{L}k$ und lk hat man dann ferner die folgenden Formeln:

$$\mathfrak{Cos}k = \frac{1}{\cos lk} \text{ und } \cos k = \frac{1}{\mathfrak{Cos}\mathfrak{L}k},$$
$$\mathfrak{Sin}k = \operatorname{tang} lk \text{ - } \sin k = \mathfrak{Tang}\mathfrak{L}k,$$
$$\mathfrak{Tang}k = \sin lk \text{ - } \operatorname{tang} k = \mathfrak{Sin}\mathfrak{L}k,$$
$$\mathfrak{Cot}k = \frac{1}{\sin lk} \text{ - } \cot k = \frac{1}{\mathfrak{Sin}\mathfrak{L}k},$$
$$\mathfrak{Tang}\tfrac{1}{2}k = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}lk \text{ - } \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}k = \mathfrak{Tang}\tfrac{1}{2}\mathfrak{L}k.$$

Man wird bei diesen Formeln nicht übersehen, dafs die hyperbolischen Functionen in Anwendung von lk eben so auf die cyklischen, wie umgekehrt die cyklischen Functionen in Anwendung von $\mathfrak{L}k$ auf die hyperbolischen zurückgebracht werden. Ich übergehe die zusammengesetzteren Formeln, und mache nur noch aufmerksam darauf, dafs wenn

man Tafeln anfertigt, woraus man für jeden Werth von k den zugehörigen Werth von $\mathfrak{L}k$ entnehmen kann, diese Tafeln auch umgekehrt dazu dienen, zu einer Zahl die zugehörige Zahl lk daraus abzulesen. Solche Tafeln habe ich für die Zunahme eines Winkels von Minute zu Minute, zwischen den Grenzen $k = 0$ und $k = \frac{\pi}{2}$, mit sieben Dezimalziffern berechnet und sie so eingerichtet, dafs sie mit gleicher Bequemlichkeit bei beiden Kreis-Eintheilungen gebraucht werden können. Dadurch sind also die hyperbolischen Functionen auf die cyklischen und umgekehrt auch diese auf jene in völlig gleicher Weise zurückgeführt.

6.

Durch diese Tabellen ist also die Möglichkeit gegeben, zu jedem Arcus den Werth einer beliebigen hyperbolischen Function, und umgekehrt, aus ihr den Arcus zu finden. Ungeachtet der Vermittelung geht die Arbeit bei einiger Fertigkeit einfach, schnell und bequem von Statten, so dafs man sich also fortan ohne Unterschied der Potenzial-Functionen bedienen kann, gleichviel, ob sie hyperbolische oder cyklische sind. Für die letzten 12 Centesimal-Grade sind die Dezimalbrüche aus besonderem Grunde in 10 Dezimalstellen berechnet, und in einer Nebentabelle niedergelegt.

Dabei fand sich ein Fehler in der Angabe des natürlichen Logarithmen der Zahl 1099, welcher nicht 7,0021 (1)595 4403 ...., sondern 7,0021 5595 4403 .... ist. Der Fehler steht in dem *Thesaurus logarithmorum* von Vega und in den Tafeln von Callet. Ich bringe ihn hiermit zur allgemeinen Kenntnifs, damit ihn Jeder in seinen Tafeln verbessern möge.

Es giebt Reihen, welche nach vorgenommener Reversion andere Reihen hervorgehen lassen, welche ihnen selbst nicht nur ähnlich sind, sondern mit ihnen sogar so weit übereinstimmen, dafs nur noch eine Abweichung in den Vorzeichen vor den einzelnen Gliedern Statt findet. Diese Beschaffenheit haben die Reihen:

$$\mathfrak{L}k = k + \frac{k^3}{3^9} + 5.\frac{k^5}{5^9} + 61.\frac{k^7}{7^9} + 1385.\frac{k^9}{9^9} + 50521.\frac{k^{11}}{11^9} + 2702765.\frac{k^{13}}{13^9}$$
$$+ 199360981.\frac{k^{15}}{15^9} + 193915121415.\frac{k^{17}}{17^9} + 2404879661671.\frac{k^{19}}{19^9} + \text{ etc.}$$

und

$$lk = k - \frac{k^3}{3^9} + 5.\frac{k^5}{5^9} - 61.\frac{k^7}{7^9} + 1385\ \frac{k^9}{9^9} - 50521.\frac{k^{11}}{11^9} + - \text{ etc.},$$

worin $3^9 = 1.2.3$; $5^9 = 1.2.3.4.5$; $7^9 = 1.2.3.4.5.6.7$; u. s. w. ist. Setzt man nemlich z. B. in der zweiten Reihe $\mathfrak{L}k$ für k, so hat man, weil $l(\mathfrak{L}k) = k$ ist:

$$k = \mathfrak{L}k - \frac{(\mathfrak{L}k)^3}{3^9} + 5.\frac{(\mathfrak{L}k)^5}{5^9} - 61.\frac{(\mathfrak{L}k)^7}{7^9} + - \text{ etc.},$$

und dieselbe Reihe wird man auch finden, wenn man die erste Reihe umkehrt. Es ist übrigens auch:

$$\mathfrak{L}\left(v.\frac{\pi}{2}\right) = \log\frac{1+v}{1-v} - \log\frac{3+v}{3-v} + \log\frac{5+v}{5-v} - \log\frac{7+v}{7-v} \ldots.$$

$$= S(-1)^\alpha \log\frac{2\alpha+1+v}{2\alpha+1-v}.$$

Doch, wozu in dieser Ankündigung solche Einzelnheiten, da für alle kein Raum vorhanden ist. Daher werde ich auch die geschlossenen Ausdrücke für $\mathfrak{L}k$ und lk übergehen.

7.

Wenn das Argument oder der Arcus k der Functionen $\cos k$, $\sin k$, $\text{tang}\, k$, $\cot k$ gröfser als vier ist, also auch $\mathfrak{L}k > 4$ ist, so geht die Benutzung der Tabelle für $\mathfrak{L}k$ nicht ganz so leicht von Statten, als für $\mathfrak{L}k < 4$; daher berechnete ich die briggischen Logarithmen der Functionen $\mathfrak{Cos}k$, $\mathfrak{Sin}k$ und $\mathfrak{Tang}k$ selbst für eine Zunahme um $\Delta k = 0{,}001$ in 9 Decimalziffern bis zu der Weite hin, über welche hinaus keine Tafeln mehr nöthig sind. Die Gröfse $\Delta k = 0{,}001$ ist klein genug, dafs eine Einschaltung ohne die Anwendung der zweiten Differenzen, und also in grofser Leichtigkeit möglich ist. Es hätte zum beabsichtigten Zwecke hingereicht, diese Tabelle von $k = 4$ an fortgehen zu lassen; statt dessen fängt sie schon mit $k = 2$ an, so dafs nun schon die briggischen Logarithmen der hyperbolischen Functionen des Arcus k in Tabellen gebracht sind, und nur noch die zwischen die Grenzen $k = 0$ und $k = 2$ fallenden fehlen. Wären auch diese berechnet, so wäre die Realisirung aller hyperbolischen Functionen eine unmittelbare, d. h. man hätte dabei dann die vermittelnde Function $\mathfrak{L}k$ nicht mehr nöthig, obgleich diese Function $\mathfrak{L}k$ an und für sich wichtig genug ist, und die für sie berechneten Tafeln also nie überflüssig sein werden.

Gern würde ich es sehen, wenn mir ein Anderer, dem mehr Hülfe, als mir, zu Gebote steht, vorgriffe, und die briggischen Logarithmen für die bezeichnete nicht eben grofse Lücke ebenfalls berechnete; denn es könnten Jahre hingehen, ehe ich, fast ohne alle Hülfe, die ab-

gebrochene lästige Arbeit wieder aufnähme, die ich auch gewifs nicht bis zu der gegenwärtigen Ausdehnung würde fortgeführt haben, hätte nicht die lebhafte Vorstellung des Nutzens mir die nöthige Ausdauer verschafft und den Widerwillen vermindert, welchen der dabei nöthige Mechanismus des Interpolirens erzeugt.

8.

Was den Inhalt der diesen Tafeln beizufügenden Theorie betrifft, so werde ich darüber hier nicht ferner reden, sondern nur noch eine allgemeine Auflösung der unreinen cubischen Gleichungen mittheilen, wodurch die Cardanische Formel überflüssig wird, weil sie in der Bequemlichkeit nachsteht. Es sei:

$$x^3 = 3bx + c,$$

so sind die drei Wurzeln der Gleichung:

$$x = (2\sqrt{b}).\mathfrak{Cos}(\tfrac{1}{3}k),$$
$$x' = (2\sqrt{b}).\mathfrak{Cos}(\tfrac{1}{3}k + \tfrac{2}{3}\pi i),$$
$$x'' = (2\sqrt{b}).\mathfrak{Cos}(\tfrac{1}{3}k - \tfrac{2}{3}\pi i),$$

wenn man den Arcus k nach der Formel: $\mathfrak{Cos}k = \frac{1}{2}c.b^{-\frac{3}{2}}$ bestimmt. Diese Auflösung ist ganz allgemein. Nach den besonderen Werthen von b und c müssen aber für die numerische Auflösung einzelne Fälle unterschieden und nach ihnen die allgemeinen Formeln modificirt werden.

1. Wenn b und c positiv und $\frac{1}{2}c.b^{-\frac{3}{2}} > 1$ ist:

$$\mathfrak{Cos}k = \tfrac{1}{2}c.b^{-\frac{3}{2}},$$
$$x = (2\sqrt{b}).\mathfrak{Cos}\tfrac{1}{3}k,$$
$$x' = -\frac{x}{2} + (\sqrt{3b})i.\mathfrak{Sin}\tfrac{1}{3}k,$$
$$x'' = -\frac{x}{2} - (\sqrt{3b})i.\mathfrak{Sin}\tfrac{1}{3}k.$$

2. Wenn b positiv, aber c negativ und die absolute Gröfse $\frac{1}{2}c.b^{-\frac{3}{2}} > 1$ ist:

$$\mathfrak{Cos}k = -\tfrac{1}{2}c.b^{-\frac{3}{2}},$$
$$x' = -(2\sqrt{b}).\mathfrak{Cos}\tfrac{1}{3}k,$$
$$x = -\frac{x'}{2} + i(\sqrt{3b}).\mathfrak{Sin}\tfrac{1}{3}k,$$
$$x'' = -\frac{x'}{2} - i(\sqrt{3b}).\mathfrak{Sin}\tfrac{1}{3}k.$$

3. Wenn b negativ ist, so hat man:

$$\mathfrak{Sin}k = \tfrac{1}{2}c.(-b)^{\frac{3}{2}},$$

$$x = (2\sqrt{-b}).\mathfrak{Sin}\tfrac{1}{3}k,$$

$$x' = -\frac{x}{2} + i(\sqrt{-3b}).\mathfrak{Cos}\tfrac{1}{3}k,$$

$$x'' = -\frac{x}{2} - i(\sqrt{-3b}).\mathfrak{Cos}\tfrac{1}{3}k,$$

4. Wenn zwar b positiv, aber $\frac{1}{2}c.b^{-\frac{3}{2}} < 1$ ist, dann hat man

$$\cos k = \tfrac{1}{2}c.b^{-\frac{3}{2}},$$

$$x = (2\sqrt{b}).\cos\tfrac{1}{3}k,$$

$$x' = (2\sqrt{b}).\cos(\tfrac{1}{3}k + \tfrac{2}{3}\pi) = -\frac{x}{2} + (\sqrt{3b}).\sin\tfrac{1}{3}k,$$

$$x'' = (2\sqrt{b}).\cos(\tfrac{1}{3}k - \tfrac{2}{3}\pi) = -\frac{x}{2} - (\sqrt{3b}).\sin\tfrac{1}{3}k.$$

In dem vierten und einzigen Falle kommen also die cyklischen Potenzial-Functionen in Gebrauch. Die Herleitung dieser speciellen Formeln aus den allgemeinen erfolgt nach sehr einfachen und allgemeinen Regeln; statt ihrer füge ich ein Beispiel bei, welches in Anwendung der vermittelnden Function gerechnet ist.

9.

Die Wurzeln der Gleichung $x^3 = 20514x - 1988260$ sind: -178; $89 + i.57$ und $89 - i.57$. Sehen wir, was die Rechnung giebt. Weil $\log(\frac{1}{2}cb^{-\frac{3}{2}})$ positiv und c negativ ist, so rechnet man nach den Formeln 2. Setzt man, um die Vermittelung einzuführen, sogleich $\mathfrak{L}k$ für k, so hat man:

$$\cos k = \frac{1}{-\frac{1}{2}c.b^{-\frac{3}{2}}}$$

und

$$x' = \frac{-2\sqrt{b}}{\cos l(\frac{1}{3}\mathfrak{L}k)},$$

$$x = -\frac{x'}{2} + i(\sqrt{3b}).\operatorname{tang} l(\tfrac{1}{3}\mathfrak{L}k),$$

$$x'' = -\frac{x'}{2} - i(\sqrt{3b}).\operatorname{tang} l(\tfrac{1}{3}\mathfrak{L}k).$$

Also

$$\log\cos k = 9{,}7549504{,}_5 - 10,$$

$$k = 0^{\mathrm{Q}},61482497 \text{ (neue Eintheilung)},$$

$$\mathfrak{L}k = 0{,}3881493,$$

$$\tfrac{1}{3}\mathfrak{L}k = 0{,}1293831,$$

$$l\tfrac{1}{3}\mathfrak{L}k = 0^{\mathrm{Q}},24112271,$$

also $\log x' = 2{,}2504200_n$, ferner $\log(\sqrt{3b}.\operatorname{tang} l\tfrac{1}{3}\mathfrak{L}k) = 1{,}7558748$,
und $\log 178 = 2{,}2504200$ und $\log 57 = 1{,}7558748$.

Also sind die Wurzeln, wie oben angegeben worden ist. Eine so grofse Übereinstimmung dieser mit sieben Decimalziffern geführten Rechnung hatte ich, angesehen die Gröfse der Zahlen b und c im behandelten Beispiele, selbst nicht erwartet. Es bedarf der Erinnerung nicht, dafs die Rechnung noch ansehnlich kürzer würde gewesen sein, wenn man sie ohne die vermittelnde Function geführt und die Tafeln der logarithmisch-hyperbolischen Functionen selbst benutzt hätte.

Was endlich die Wahl der mit deutschen Buchstaben gedruckten Vorsilben: Cos, Sin, Tang, Cot, Arc. Sin, Arc. Cos, Arc. Tang; Arc. Cot und auch die des Zeichens ℒ betrifft, so wird sie aufserhalb Deutschland vielleicht nicht ganz gefallen. Man kann dafür lateinisch geschriebene Vorsilben mit grofsen Anfangsbuchstaben und so auch für ℒ nehmen L, um durch diese grofsen Buchstaben die Unterscheidung von den cyklischen Functionen anzugeben. Auffallender aber ist allerdings die Unterscheidung durch die von mir genommenen deutschen Buchstaben. Möge meine Mühe nicht vergebens gewesen sein!

23.

Von der Zerlegung symmetrischer Polyëder.

In Folge des Lehrsatzes S. 100., 4ter Band dieses Journals.

(Von Herrn *M*.....)

Wenn in zwei dreiseitigen Pyramiden (Tetraëdern) drei in einer Ecke zusammenstofsende Kanten der einen dreien in einer Ecke zusammenstofsenden Kanten der andern, und die von den ersten gebildeten ebenen Winkel den Winkeln, welche die letztern einschliefsen, stückweise gleich sind, so sind die beiden Pyramiden, wie bekannt, entweder congruent oder symmetrisch. Sind aber aufserdem in der ersten Pyramide, und also auch in der zweiten, zwei dieser Kanten und die Winkel, welche sie mit der dritten bilden, unter sich gleich, so fällt der zuletzt genannte Fall weg, und beide Pyramiden sind congruent.

Es sei nun $Sabc....n$ eine $n$seitige Pyramide, um deren Grundfläche ein Kreis beschrieben werden kann, und deren Spitze S so liegt, dafs die von dieser Spitze nach dem Mittelpunct O der Grundfläche gezogene Gerade SO senkrecht auf letzterer steht, so wird sich um die Grundfläche $a'b'c'....n'$ der ihr symmetrischen Pyramide $S'a'b'c'....n'$ ein Kreis von gleichem Radius beschreiben lassen, und die von der Spitze S' nach dem Mittelpunct O' der Grundfläche $a'b'c'....n'$ gezogene Gerade $S'O'$ wird senkrecht auf letzterer sein. Jede der beiden Pyramiden läfst sich nun in n dreiseitige Pyramiden $SOab$, $SObc$, ... $SOmn$ und $S'O'a'b'$, $S'O'b'c'$, ... $S'O'm'n'$ zerlegen, welche nach dem was anfangs bemerkt worden, respective congruent sind. Man kann demnach folgenden Satz aufstellen:

Von zwei symmetrischen $n$seitigen Pyramiden, deren Grundflächen centrisch nach den Ecken sind, und deren Spitzen senkrecht über dem Mittelpunct der Grundflächen liegen, läfst sich jede in n dreiseitige Pyramiden zerlegen, so dafs die einen den andern einzeln genommen congruent sind.

Construirt man zu einem Polyëder P, durch dessen Eckpuncte eine Kugelfläche gelegt werden kann, ein ihm symmetrisches Polyëder

P', indem man von den Eckpuncten a, b, c, ... des ersteren auf eine beliebige Ebene die Senkrechten $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$, ... fället, und auf den Verlängerungen derselben, jenseits der Ebene, gleiche Stücke $\alpha a'$, $\beta b'$, $\gamma c'$, ... annimmt, und fället man dann vom Mittelpuncte O des Polyëders P auf dieselbe Ebene eine Senkrechte $O\omega$, auf deren Verlängerung man $\omega O' = O\omega$ annimmt, so geht eine, aus dem Mittelpunct O' mit dem Radius Oa beschriebene Kugelfläche durch alle Eckpuncte des Polyëders P'. Denn, weil $O\omega = \omega O'$; $\omega\alpha = \omega\alpha$; $\alpha a = a'\alpha$ und die Winkel $O\omega a$, $O'\omega\alpha$, $\omega\alpha a$ und $\omega\alpha a'$ rechte sind, so ist das Viereck $O\omega\alpha a \cong O'\omega\alpha a'$; daher ist $Oa = O'a'$, und aus ähnlichen Gründen ist $Ob = O'b'$, $Oc = O'c'$ u. s. w.; also ist $Oa = O'b' = O'c'$ u. s. w.

Jedes der Polyëder P und P' läfst sich nun, indem man eine jede Seitenebene zur Grundfläche und den Mittelpunct O, oder O', zur Spitze annimmt, in so viele Pyramiden zerlegen, als das Polyëder Seitenflächen hat; die Pyramiden in dem einen Polyëder sind alsdann im Allgemeinen denen im andern symmetrisch, ihre Grundflächen sind centrisch nach den Ecken und ihre Spitzen liegen senkrecht über den Mittelpuncten dieser Grundflächen, was aus bekannten Eigenschaften der Kugel folgt. Da sich nun je zwei dieser Pyramiden, nach dem vorher aufgestellten Satze, in so viele congruente Tetraëder zerlegen lassen, als ihre Grundflächen Seitenlinien haben, jede Seitenlinie aber zu zwei Grundflächen gehört, so hat man folgenden Satz:

Von zwei symmetrischen Polyëdern, welche centrisch nach den Ecken sind, läfst sich ein jedes in doppelt so viele Tetraëder zerlegen, als es Kanten hat, und zwar so, dafs die Tetraëder in dem einen Polyëder denen im andern einzeln congruent sind.

Da jedes Tetraëder einen Mittelpunct der Ecken hat, so kann von zwei symmetrischen Tetraëdern (weil hier die Anzahl der Kanten gleich 6 ist) jedes in 12 Tetraëder zerlegt werden, so dafs die des einen denen des andern einzeln congruent sind.

Von zwei beliebigen symmetrischen Polyëdern kann aber ein jedes, wenn die Anzahl der Ecken gleich e ist, und wenn ε die Anzahl derjenigen Ecken bedeutet, welche mit einer bestimmten Ecke E in denselben Grenzflächen liegen, in $2(e-2)$ oder auch in $(2e-\varepsilon-4)$ Te-

traëder *) zerlegt werden, so dafs die Tetraëder des einen denen des andern Polyëders symmetrisch sind, und jedes von solchen zwei symmetrischen Tetraëdern läfst sich, wie eben gezeigt, in 12 Tetraëder zerlegen, die einzeln congruent sind; daher der Lehrsatz:

Von zwei symmetrischen Polyëdern läfst sich ein jedes in $24(e-2)$ oder auch in $12(2e-\varepsilon-4)$ Tetraëder zerlegen, so dafs die einen den anderen congruent sind.

---

*) In jedem Polyëder nemlich ist bekanntermafsen die Summe aller ebenen Winkel auf der Oberfläche gleich $4(e-2)$ rechten Winkeln. Ist das Polyëder von lauter Dreiecken begrenzt, so mufs, weil in jedem Dreiecke die Summe der Winkel zwei rechte beträgt, die Anzahl der begrenzenden Dreiecke gleich $2(e-2)$ seyn. Ist aber das Polyëder auch von andern Figuren begrenzt, so läfst sich jedes dieser Polygone durch Diagonalen aus einem seiner Eckpuncte in Dreiecke zerlegen, ohne dafs dadurch neue Winkelspitzen entstehen; daher ist auch dann noch die Anzahl aller Dreiecke gleich $2(e-2)$.

Nimmt man nun diese Dreiecke zu Grundflächen und einen Punct innerhalb des Polyëders zur Spitze von Pyramiden, so ist der Körper in $2(e-2)$ Tetraëder getheilt.

Nimmt man aber den Eckpunct E zur gemeinschaftlichen Spitze der Pyramiden, so erhält man offenbar ε Pyramiden weniger, also $2(e-2)-\varepsilon = 2e-\varepsilon-4$.

Anm. d. Verf.

24.

Über einen allgemeinen, die Bernoullischen Zahlen und die Coëfficienten der Secantenreihe zugleich darstellenden Ausdruck.

(Von Herrn Prof. *H. F. Scherk* zu Halle.)

In einer vor einiger Zeit erschienenen Abhandlung *) über die numerischen Coëfficienten der Reihe, die man erhält, wenn man die Secante nach den graden Potenzen des Bogens entwickelt, habe ich unter andern auf die grofse Analogie aufmerksam gemacht, die zwischen den dort gegebenen independenten Ausdrücken jener Coëfficienten und der Bernoullischen Zahlen Statt findet. Man sieht aber sehr leicht, was auch schon dort erwähnt wurde, dafs man beide Arten von Coëfficienten, die der Secantenreihe und die der Tangenten-, Cotangenten- und Cosecantenreihe, also die Bernoullischen Zahlen, gar nicht von einander zu trennen und als Coëfficienten verschiedener Reihen-Entwicklungen zu betrachten braucht. Bezeichnet **) man nemlich die 1ste, 2te, ... $n$te Bernoullische Zahl resp. durch $\overset{1}{B}, \overset{3}{B}, \ldots \overset{2n-1}{B}$, und den 1sten, 2ten, ... $n$ten Secanten-Coefficienten resp. durch $\overset{2}{B}, \overset{4}{B}, \ldots \overset{2n-1}{B}$, so hat man

$$\operatorname{tang}(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}x) = \sec x + \operatorname{tang} x$$

$$= 1 + \frac{2^2(2^2-1)}{1.2}\overset{1}{B}x + \frac{\overset{2}{B}}{1.2}x^2 + \frac{2^4(2^4-1)}{1.2.3.4}\overset{3}{B}x^3 + \frac{\overset{4}{B}}{1.2.3.4}x^4 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)}{1.2\ldots.2n}\overset{2n-1}{B}x^{2n-1} + \frac{\overset{2n}{B}}{1.2\ldots.2n}x^{2n} + \text{etc.}$$

Also sind die Secanten-Coëfficienten und die Bernoullischen Zahlen zugleich die Coëfficienten der nach den Potenzen von x entwickelten trigonometrischen Function $\operatorname{tang}(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}x)$. Kann man daher auf irgend

*) S. meine „Mathematische Abhandlungen." Berlin, 1825, bei Reimer. Erste Abh.

**) Dem Zwecke dieses Aufsatzes gemäfs, habe ich hier eine andere Bezeichnung als in der erwähnten Abhandlung gewählt. Was hier $\overset{1}{B}, \overset{2}{B}, \ldots \overset{2n-1}{B}, \overset{2n}{B}$ ist, wurde dort durch $\overset{1}{B}, \overset{1}{\alpha}, \ldots \overset{n}{B}, \overset{n}{\alpha}$ bezeichnet.

eine Weise den allgemeinen Ausdruck des Coëfficienten von x^n, es sei n gerade oder ungerade, in dieser Reihe in entwickelter oder unentwickelter Form angeben, so wird derselbe die Bernoullischen Zahlen und die Coëfficienten der Secantenreihe zugleich darstellen: jene, wenn man n ungerade, diese, wenn man n gerade annimmt. Mit der Entwickelung eines solchen Ausdrucks soll gegenwärtiger Aufsatz sich beschäftigen.

Da nach dem Taylorschen Lehrsatze

$$\text{tang}\left(\tfrac{1}{4}\pi+\tfrac{1}{2}x\right)=$$

$$\text{tang}\,y+\frac{\partial\,\text{tang}\,y}{\partial y}\cdot\frac{x}{2}+\frac{\partial^2\,\text{tang}\,y}{\partial y^2}\cdot\frac{x^2}{1.2.2^2}+\ldots.+\frac{\partial^n\,\text{tang}\,y}{\partial y^n}\cdot\frac{x^n}{1.2\ldots.n.2^n}+\text{etc.}$$

nach der Differentiation $y=\frac{1}{4}\pi$ gesetzt, ist, so sieht man offenbar, dafs es nur darauf ankömmt, $\frac{\partial^n\,\text{tang}\,y}{\partial y^n}$ zu finden, indem eigentlich $\frac{\partial^n\,\text{tang}\,y}{\partial y^n}$ schon der verlangte allgemeine Ausdruck, nur in unentwickelter Form, ist.

Es ist aber

$$\text{tang}(y+k)=\text{tang}\,y+\frac{\partial\,\text{tang}\,y}{\partial y}k+\frac{\partial^2\,\text{tang}\,y}{\partial y^2}\cdot\frac{k^2}{1.2}+\ldots.+\frac{\partial^n\,\text{tang}\,y}{\partial y^n}\cdot\frac{k^n}{1.2.3\ldots.n}+\text{etc.}$$

$$=\text{tang}\,y+\Sigma\frac{\partial^n\,\text{tang}\,y}{\partial y^n}\cdot\frac{k^n}{1.2.3\ldots.n},$$

die Summe für $n=1,2,3\ldots.$ genommen, und

$$\text{tang}\,(y+k)=\frac{1}{\sqrt{-1}}\cdot\frac{e^{(y+k)\sqrt{-1}}-e^{-(y+k)\sqrt{-1}}}{e^{(y+k)\sqrt{-1}}+e^{-(y+k)\sqrt{-1}}}=\frac{1}{\sqrt{-1}}\left(\frac{e^{2y\sqrt{-1}}-e^{-2k\sqrt{-1}}}{e^{2y\sqrt{-1}}+e^{-2k\sqrt{-1}}}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{-1}}\left(-1+\frac{2\,e^{2y\sqrt{-1}}}{e^{2y\sqrt{-1}}+e^{-2k\sqrt{-1}}}\right).$$

Entwickelt man also diesen Ausdruck nach den Potenzen von k, so ist der Coëfficient von $\frac{k^n}{1.2.3\ldots.n}=\frac{\partial^n\,\text{tang}\,y}{\partial y^n}$. Diese Entwicklung haben aber Euler und Laplace bereits vorgenommen. Der erste hat nemlich gefunden, und der zweite direct bewiesen *), dafs, wenn man

$$\frac{p-1}{p-e^u}=1+\overset{1}{A}u+\overset{2}{A}u^2+\ldots.+\overset{n}{A}u^n+\text{etc.}=1+\Sigma\overset{n}{A}u^n\ (\text{für}\ n=1,2,3\ldots.)$$

setzt, wo p und u beliebige Zahlen sind, und e die Zahl, deren natürlicher Logarithmus $=1$ ist, bedeutet, man

$$\overset{n}{A}=\frac{\overset{n}{A}_1 p^{n-1}+\overset{n}{A}_2 p^{n-2}+\ldots.+\overset{n}{A}_n p^{n-h}+\ldots.+\overset{n}{A}_n}{1.2.3\ldots.(p-1)^n}$$

---

*) S. Euleri *Institut. calc. diff. P. II. Cap. VII.* §. 173 ff. und Lacroix *traité du calc. diff. etc. Seconde édit. T. III. p.* 107 ff.

habe, wobei

$$\overset{n}{A}_1 = 1,$$
$$\overset{n}{A}_2 = 2^n - (n+1),$$
$$\overset{n}{A}_3 = 3^n - (n+1)2^n + \frac{(n+1)n}{1.2},$$
$$\overset{n}{A}_4 = 4^n - (n+1)3^n + \frac{(n+1)n}{1.2}2^n - \frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}$$

sei. Setzt man hierin $p = -e^{2y\sqrt{-1}}$, $u = -2k\sqrt{-1}$, so erhält man:

$$\frac{p-1}{p-e^u} = \frac{e^{2y\sqrt{-1}}+1}{e^{2y\sqrt{-1}}+e^{-2k\sqrt{-1}}} = 1 + \Sigma(-1)^n(\sqrt{-1})^n 2^n \overset{n}{A} k^n.$$

Also

$$\frac{e^{2y\sqrt{-1}}}{e^{2y\sqrt{-1}}+e^{-2k\sqrt{-1}}} = \frac{e^{2y\sqrt{-1}}}{e^{2y\sqrt{-1}}+1} + \frac{e^{2y\sqrt{-1}}}{e^{2y\sqrt{-1}}+1}\Sigma(-1)^n(\sqrt{-1})^n 2^n \overset{n}{A} k^n.$$

Folglich

$$\operatorname{tang}(y+k) = \frac{1}{\sqrt{-1}}\left(\frac{e^{2y\sqrt{-1}}-1}{2^{2y\sqrt{-1}}+1} + \frac{2e^{2y\sqrt{-1}}}{e^{2y\sqrt{-1}}+1}\Sigma(-1)^n(\sqrt{-1})^n 2^n \overset{n}{A} k^n\right)$$
$$= \operatorname{tang} y + \frac{e^{2y\sqrt{-1}}}{e^{2y\sqrt{-1}}+1}\Sigma(-1)^n(\sqrt{-1})^{n-1}2^{n+1}\overset{n}{A}k^n \text{ (für } n = 1, 2, 3, \ldots.).$$

Vergleicht man dies mit dem obigen Ausdrucke für

$$\operatorname{tang}(y+k) = \operatorname{tang} y + \Sigma\frac{\partial^n \operatorname{tang} y}{\partial y^n}\cdot\frac{k^n}{1.2.3\ldots.n},$$

für dieselben Werthe von n, so hat man

$$\frac{\partial^n \operatorname{tang} y}{\partial y^n} = \frac{(-1)^n(\sqrt{-1})^{n-1}2^{n+1}.1.2.3\ldots.n.e^{2y\sqrt{-1}}}{e^{2y\sqrt{-1}}+1}\overset{n}{A}.$$

Es ist aber, wenn für p sein Werth gesetzt wird:

$$\overset{n}{A} = (-1)^{n-1}\frac{\left\{\overset{n}{A}_1 e^{2(n-1)y\sqrt{-1}} - \overset{n}{A}_2 e^{2(n-2)y\sqrt{-1}} + \ldots + (-1)^{h-1}\overset{n}{A}_h e^{2(n-h)y\sqrt{-1}} + \ldots + \overset{n}{A}_n\right\}}{(-1)^n.1.2.3\ldots.n.(e^{2y\sqrt{-1}}+1)^n}$$

$$= -\frac{e^{(n-1)y\sqrt{-1}}}{1.2.3\ldots.n(e^{2y\sqrt{-1}}+1)^n}\left\{\overset{n}{A}_1 e^{(n-1)y\sqrt{-1}} - \overset{n}{A}_2 e^{(n-3)y\sqrt{-1}} + \ldots + (-1)^{h-1}\overset{n}{A}_h e^{(n-2h+1)y\sqrt{-1}} + \ldots\right.$$
$$\left. \ldots + (-1)^{n-1}\overset{n}{A}_n e^{-(n-1)y\sqrt{-1}}\right\}$$

$$= -\frac{e^{(n-1)y\sqrt{-1}}}{1.2.3\ldots.n(e^{2y\sqrt{-1}}+1)^n}R,$$

wenn die in Klammern eingeschlossene Reihe durch R bezeichnet wird.

Demnach ist

$$\frac{\partial^n \operatorname{tang} y}{\partial y^n} = \frac{(-1)^{n+1}(\sqrt{-1})^{n-1}}{\left(\frac{e^{y\sqrt{-1}}+e^{-y\sqrt{-1}}}{2}\right)^{n+1}}R = \frac{(-1)^{n+1}(\sqrt{-1})^{n-}}{\cos y^{n+1}}R.$$

Aus der Reihe R können die unmöglichen Quantitäten weggeschafft werden, wenn man die gleich weit von Anfang und Ende abstehenden Glieder zu einander setzt, und bemerkt, dafs

$$\overset{n}{A}_1 = \overset{n}{A}_n, \quad \overset{n}{A}_2 = \overset{n}{A}_{n-1}, \quad \ldots\ldots \quad \overset{n}{A}_h = \overset{n}{A}_{n-h+1} \text{ *)}.$$

Alsdann ist nemlich:

$$\begin{aligned}(\sqrt{-1})^{n-1}R = {} & \overset{n}{A}_1\left\{(-1)^{\frac{n-1}{2}}e^{(n-1)y\sqrt{-1}} + (-1)^{-\left(\frac{n-1}{2}\right)}e^{-(n-1)y\sqrt{-1}}\right\} \\ & + \overset{n}{A}_2\left\{(-1)^{\frac{n-3}{2}}e^{(n-3)y\sqrt{-1}} + (-1)^{-\left(\frac{n-3}{2}\right)}e^{-(n-3)y\sqrt{-1}}\right\} + \ldots \\ & \ldots + \overset{n}{A}_h\left\{(-1)^{\frac{n-2h+1}{2}}e^{(n-2h+1)y\sqrt{-1}} + (-1)^{-\left(\frac{n-2h+1}{2}\right)}e^{-(n-2h+1)y\sqrt{-1}}\right\} + \text{etc.}\end{aligned}$$

*) Diese Eigenschaft der in Rede stehenden, bei Summationen von Reihen bekanntlich sehr häufig vorkommenden Coëfficienten erhält man sehr leicht aus der Art ihrer Entstehung. Es war nemlich

$$\frac{p-1}{p-e^u} = 1 + \overset{1}{A}u + \overset{2}{A}u^2 + \ldots\ldots + \overset{n}{A}u^n + \text{etc.}$$

wo

$$(1.) \quad \overset{n}{A} = \frac{\overset{n}{A}_1 p^{n-1} + \overset{n}{A}_2 p^{n-2} + \ldots : + \overset{n}{A}_h p^{n-h} + \ldots\ldots + \overset{n}{A}_{n-h+1} p^{h-1} + \ldots\ldots + \overset{n}{A}_n}{1.2.3\ldots\ldots n(p-1)^n}.$$

Es sind also $\overset{1}{A}_1, \overset{2}{A}_2 \ldots\ldots \overset{n}{A} \ldots\ldots$ Functionen von p, hingegen $\overset{n}{A}_1, \overset{n}{A}_2 \ldots\ldots$ von p unabhängig. Setzt man nun $\frac{1}{p}$ für p, so hat man

$$(2.) \quad \begin{cases} \dfrac{\frac{1}{p}-1}{\frac{1}{p}-e^u} = \dfrac{1-p}{1-pe^u} = 1 - p + \dfrac{p(p-1)}{p-e^{-u}} = 1 - p\overset{1}{A}u + p\overset{2}{A}u^2 - \ldots\ldots + (-1)^n p\overset{n}{A}u^n + \ldots\ldots \\ \qquad = 1 + \overset{1}{a}u + \overset{2}{a}u^2 + \ldots\ldots + \overset{n}{a}u^n + \ldots\ldots \end{cases}$$

wo

$$(3.) \quad \begin{cases} \overset{n}{a} = \dfrac{\overset{n}{A}_1\left(\frac{1}{p}\right)^{n-1} + \overset{n}{A}_2\left(\frac{1}{p}\right)^{n-2} + \ldots\ldots + \overset{n}{A}_h\left(\frac{1}{p}\right)^{n-h} + \ldots\ldots + \overset{n}{A}_{n-h+1}\left(\frac{1}{p}\right)^{h-1} + \ldots\ldots + \overset{n}{A}_n}{1.2.3\ldots\ldots n.\left(\frac{1}{p}-1\right)^n} \\ \qquad = (-1)^n \dfrac{p\left\{\overset{n}{A}_1 + \overset{n}{A}_2 p + \ldots\ldots + \overset{n}{A}_h p^{h-1} + \ldots\ldots + \overset{n}{A}_{n-h+1} p^{n-h+1} + \ldots\ldots + \overset{n}{A}_n p^{n-1}\right\}}{1.2.3\ldots\ldots n(p-1)^n}. \end{cases}$$

Nach (1.) ist $\overset{1}{a} = -p\overset{1}{A}$, $\overset{2}{a} = p\overset{2}{A}$, $\ldots\ldots$ $\overset{n}{a} = (-1)^n p\overset{n}{A}$, also wenn hierin für $\overset{n}{a}$ und $\overset{n}{A}$ ihre Werthe aus (1.) und (3.) substituirt werden:

$$\overset{n}{A}_1 + \overset{n}{A}_2 p + \ldots\ldots + \overset{n}{A}_h p^{h-1} + \ldots\ldots + \overset{n}{A}_n p^{n-1} = \overset{n}{A}_1 p^{n-1} + \overset{n}{A}_2 p^{n-2} + \ldots\ldots + \overset{n}{A}_{n-h+1} p^{h-1} + \ldots\ldots + \overset{n}{A}_n;$$

und da diese Gleichung für jedes p gilt, so hat man offenbar:

$$\overset{n}{A}_1 = \overset{n}{A}_n, \quad \overset{n}{A}_2 = \overset{n}{A}_{n-1}, \quad \ldots\ldots \quad \overset{n}{A}_h = \overset{n}{A}_{n-h+1}.$$

Diese Gleichungen werden gewöhnlich auf eine andere Art, etwa aus der Theorie der Differenzen (s. z. B. Lacroix a. a. O. pag. 110 ff.) bewiesen, was aber die Kenntnifs der Coëfficienten $\overset{n}{A}_1$, $\overset{n}{A}_2$ etc. voraussetzt. Die hier gegebene Beweisart kann auch in anderen Fällen auf eine ähnliche Weise angewandt werden, vorzüglich alsdann, wenn man die Coëfficienten noch nicht kennt.

Da aber für jedes ganze r, $(-1)^{\pm\frac{1}{2}r} = e^{\pm\frac{1}{2}r\pi\sqrt{-1}}$, also

$$(-1)^{\frac{1}{2}r} e^{ry\sqrt{-1}} + (-1)^{-\frac{1}{2}r} e^{-ry\sqrt{-1}} = e^{(\frac{1}{2}r\pi+ry)\sqrt{-1}} + e^{-(\frac{1}{2}r\pi+ry)\sqrt{-1}} = 2\cos(\tfrac{1}{2}r\pi+\tfrac{1}{2}ry)$$

ist, so wird

$$(\sqrt{-1})^{n-1} R = 2\overset{n}{A}_1 \cos(n-1)(\tfrac{1}{2}\pi+y) + 2\overset{n}{A}_2 \cos(n-3)(\tfrac{1}{2}\pi+y) + \ldots$$
$$\ldots + 2\overset{n}{A}_h \cos(n-2h+1)(\tfrac{1}{2}\pi+y) + \text{etc.}$$

Das letzte Glied dieser Reihe ist, für ein gerades n, $= 2\overset{n}{A}_{\frac{1}{2}n} \cos(\tfrac{1}{2}\pi+y)$,

und für ein ungerades n, $= \overset{n}{A}_{\frac{n+1}{2}}$.

Beide Fälle lassen sich entweder durch die Bezeichnung

$$(2-\nu)\overset{n}{A}_{\frac{n+\nu}{2}} \cos(1-\nu)(\tfrac{1}{2}\pi+y),$$

wo $\nu = \frac{1+(-1)^{n-1}}{2}$ ist, zusammenfassen, oder man kann auch die oben zusammengezogenen, von Anfang und Ende gleich weit abstehenden Glieder wieder von einander trennen, und

$$2\overset{n}{A}_1 \cos(n-1)(\tfrac{1}{2}\pi+y) = \overset{n}{A}_1 \cos(n-1)(\tfrac{1}{2}\pi+y) + \overset{n}{A}_n \cos(1-n)(\tfrac{1}{2}\pi+y),$$
$$2\overset{n}{A}_2 \cos(n-3)(\tfrac{1}{2}\pi+y) = \overset{n}{A}_2 \cos(n-3)(\tfrac{1}{2}\pi+y) + \overset{n}{A}_{n-1} \cos(3-n)(\tfrac{1}{2}\pi+y)$$
etc.

setzen, in welchem Falle man zwischen dem geraden und ungeraden n keinen Unterschied zu machen braucht. Für den gegenwärtigen, rein theoretischen Zweck möchte die zweite Art der ersten vorzuziehen sein. Hiernach hat man also

$$\frac{\partial^n \operatorname{tang} y}{\partial y^n} = \frac{(-1)^{n+1}}{\cos y^{n+1}}\{\overset{n}{A}_1 \cos(n-1)(\tfrac{1}{2}\pi+y) + \overset{n}{A}_2 \cos(n-3)(\tfrac{1}{2}\pi+y) + \ldots + \overset{n}{A}_n \cos(1-n)(\tfrac{1}{2}\pi+y)\}$$
$$= \frac{(-1)^{n+1}}{\cos y^{n+1}} \Sigma \overset{n}{A}_h \cos(n-2h+1)(\tfrac{1}{2}\pi+y) \quad (\text{für } h = 1, 2, 3, \ldots . n).$$

Hieraus hat man auch $\frac{\partial^n \operatorname{cotang} y}{\partial y^n}$, wenn man $y - \frac{1}{2}\pi$ für y setzt, und dann durch $n$malige Differentiation der Gleichungen

$$\sec y = \tfrac{1}{2}\operatorname{tang}(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}y) + \tfrac{1}{2}\operatorname{cotang}(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}y),$$
$$\operatorname{cosec} y = \tfrac{1}{2}\operatorname{tang} y + \tfrac{1}{2}\operatorname{cotang} y,$$

auch die $n$ten Differentialquotienten der Secante und Cosecante.

Man setze nun in den Ausdruck für $\frac{\partial^n \operatorname{tang} y}{\partial y^n}$, $y = \frac{1}{4}\pi$, so ist, da

$$\cos(n-2h+1)\tfrac{3}{4}\pi = \cos(n-2h+1)(\pi - \tfrac{1}{4}\pi) = (-1)^{n-2h+1} \cos\frac{(n-2h+1)}{4}\pi,$$

und $\cos y = \frac{1}{\sqrt{2}}$:

$$\frac{\partial^n \operatorname{tang} y}{\partial y^n} = 2^{\frac{n+1}{2}} \Sigma \overset{n}{A}_h \cos\frac{(n-2h+1)}{4}\pi \quad (\text{für } h = 1, 2, 3, \ldots . n),$$

folglich ist in der Reihe für $\operatorname{tang}(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}x)$ der Coëfficient von x^n,

$$= \frac{\partial^n \operatorname{tang} y}{\partial y^n} \cdot \frac{1}{1.2.3....n.2^n} \text{ (für } y = \tfrac{1}{4}\pi)$$

$$= \frac{1}{1.2.3....n.2^{\frac{n-1}{2}}} \Sigma A_h^n \cos\frac{(n-2h+1)}{4}\pi.$$

Nun ist aber in der Reihe für $\sec x + \operatorname{tang} x = \operatorname{tang}(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}x)$ der Coëfficient von x^{2n-1},

$$= \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)}{1.2.3....2n} {}^{2n-1}B$$

und von x^{2n},

$$= \frac{1}{1.2.3....2n} {}^{2n}B,$$

das heifst, der Coëfficient von x^n ist, wenn n ungerade ist,

$$= \frac{2^{n+1}(2^{n+1}-1)}{1.2.3....n(n+1)} {}^{n}B$$

und, wenn n gerade ist,

$$= \frac{1}{1.2.3....n} {}^{n}B,$$

welche beide Fälle sich unter der Bezeichnung $\frac{2^{\nu n+\nu}(2^{\nu n+1}-1)}{1.2.3....n.(\nu n+1)} {}^{n}B$, wo die obige Bedeutung von $\nu = \frac{1+(-1)^{n-1}}{2}$ beibehalten ist, zusammenfassen lassen. Hieraus folgt also

$$\frac{2^{\nu n+\nu}(2^{\nu n+1}-1)}{\nu n+1} {}^{n}B = \frac{1}{2^{\frac{n-1}{2}}} \Sigma A_h^n \cos\frac{(n-2h+1)}{4}\pi,$$

oder endlich

$${}^{n}B = \frac{2(\nu n+1)}{2^{(\nu+\frac{1}{2})(n+1)}(2^{\nu n+1}-1)} \Sigma A_h^n \cos\frac{(n-2h+1)}{4}\pi \text{ (für } h = 1, 2, 3, ... n),$$

welches der verlangte Ausdruck ist, der die $n$te Bernoullische Zahl, oder den $n$ten Secantencoëfficienten angiebt, je nachdem n ungerade oder gerade angenommen wird.

Man kann übrigens gelegentlich bemerken, dafs der Ausdruck für die $n$te Bernoullische Zahl, den man aus dem eben angegebenen erhält, wenn man $2n-1$ für n setzt, nach einigen leichten Reductionen folgende Gestalt annimmt:

$${}^{2n-1}B = \frac{2n}{2^{3n-2}(2^{2n}-1)} \left\{ \tfrac{1}{2} A_n^{2n-1} - A_{n-2}^{2n-1} + A_{n-4}^{2n-1} - A_{n-6}^{2n-1} + ... + (-1)^{\frac{n-2+\nu}{2}} A_{2-\nu}^{2n-1} \right\}.$$

Dieser hat vor dem zuerst von Laplace gegebenen, und dann auf verschiedene Arten bewiesenen Ausdruck *)

$${}^{2n-1}B = \frac{2n}{2^{2n-1}(2^{2n}-1)} \left\{ \tfrac{1}{2} A_n^{2n-1} - A_{n-1}^{2n-1} + A_{n-2}^{2n-1} - A_{n-3}^{2n-1} + ... + (-1)^{n-1} A_1^{2n-1} \right\}$$

den Vorzug, dafs er für ein gerades n nur aus $\frac{1}{2}n$, für ein ungerades aus $\frac{n+1}{2}$ Gliedern besteht, während der Laplacesche immer eine Summe von n Gliedern ist.

*) Lacroix *traité etc. p.* 114. Vergl. Klügels Lexicon IV. Theil p. 608., Grunerts mathematische Abhandlungen p. 93. u. A.

25.
Démonstration nouvelle du théorème du binome.

(Par l'Editeur.)

Il y a plusieurs démonstrations différentes du binome; mais toutes celles que je connois, laissent encore, à ce que je crois, plus ou moins à désirer. Ou elles procèdent du cas particulier au cas général, par une sorte d'induction plus ou moins vicieuse, par laquelle on cache plutôt les difficultés qu'on ne les lève, ou elles supposent une partie plus ou moins grande de ce qu'il s'agit de démontrer, par exemple la forme de la série du développement; ou bien elles sont tellement métaphysiques, qu'elles, ne peuvent entrer convenablement dans une saine analyse mathématique; ou enfin elles sont incomplètes, surtout en ce qui regarde le reste de la série, dont le développement ne donne pas l'expression.

Donc une démonstration complète du théorème du binome, vraiment rigoureuse et générale, et en même tems tellement claire et élémentaire, qu'elle soit accessible aux premiers commençans, est encore à désirer. Ce théorème étant une des parties les plus essentielles et des plus remarquables des élémens, sa démonstration semble être importante pour les traités élémentaires de l'analyse et pour l'enseignement de cette science.

Je vais présenter ici une démonstration qui semble satisfaire à toutes les demandes qu'on puisse lui faire. Elle découle, comme corollaire, de la théorie nouvelle et générale des puissances et des facultés analytiques, dont j'ai tracé les premières idées dans un petit écrit en Allemand, sous le titre (*Versuch einer allgemeinen Theorie der analytischen Facultäten etc. Berlin bei* Reimer, 1823.) et qui tire ses développemens de cette formule générale de développement, que j'ai nommée Théorème général de Taylor, pour le distinguer du théorème particulier connu sous ce nom, et qui, dans toute sa généralité, peut être démontré avec la même simplicité et rigueur qu'on remarquera dans la démonstration du théorème du binome qui va suivre. Je me propose de reproduire, à l'occasion, la théorie générale dont je parle, refondue et

complétée. La démonstration du binome que je donne ici, est un échantillon de ce traité plus étendu.

Ecrivons l'équation identique

$$1.\quad a^{x+k} = a^x.1^k + k.\frac{a^{x+k} - a^x.1^k}{k}.$$

Le facteur 1^k doit être ajouté aux termes a^x pour faire égaler les nombres des racines différentes qui peuvent avoir lieu des deux cotés de l'équation.

Supposant pour abréger

$$2.\quad \frac{a^{x+k} - a^x.1^k}{k} = p,$$

on a:

$$3.\quad a^{x+k} = a^x.\ 1^k + kp.$$

Cela posé, faisons augmenter x de 1 et en même tems diminuer k de 1, de sorte que la valeur de $x+k$ reste la même, l'équation (3.) se changera en

$$4.\quad a^{x+k} = a^{x+1}.1^k + (k-1)p_1,$$

en désignant par p_1 la valeur variée de p, et en remarquant que $1^{k-1} = 1^k$.

Retranchons l'équation (3.) de celle (4.), nous aurons:

$$5.\quad 0 = (a^{x+1} - a^x)\,1^k + (k-1)(p_1 - p) - p.$$

Désignons, comme à l'ordinaire, la différence entre la valeur variée et la valeur primitive d'une quantité quelconque par Δ, mis devant le signe de la quantité, l'équation (5.) pourra être présentée sous la forme:

$$6.\quad 0 = \Delta(a^x.1^k) + (k-1)\Delta p - p.$$

Augmentons de nouveau dans cette équation x de 1, et diminuons k de 1, nous aurons

$$7.\quad 0 = \Delta(a^{x+1}.1^k) + (k-2)\Delta p_1 - p_1.$$

Retranchons de cette équation celle (6.), le reste sera

$$8.\quad 0 = \Delta(a^{x+1}.1^k) - \Delta(a^x.1^k) + (k-2)(\Delta p_1 - \Delta p) - \Delta p - (p_1 - p),$$

ou, parcequ'en vertu de l'algorithme de Δ, la différence de différences peut être désignée par Δ^2:

$$9.\quad 0 = \Delta^2(a^x.1^k) + (k-2)\Delta^2 p - 2\Delta p.$$

La première répétition de l'opération qu'on vient de faire, donnera:

$$10.\quad 0 = \Delta^3(a^x.1^k) + (k-3)\Delta^3 p - 3\Delta^2 p,$$

et on pourra continuer cette opération à volonté.

En résumant les équations (3., 6., 9., 10.) et celles qui les suivent, on aura, en transportant en même tems au coté gauche les der-

niers termes des équations (3., 6., 9., 10. etc.), et en divisant les équations qu'on trouve par les coëfficiens de Δp, $\Delta^2 p$ etc.:

$$11.\quad \begin{cases} a^{x+k} = a^x.1^k + kp, \\ p = \Delta(a^x.1^k) + (k-1)\Delta p, \\ \Delta p = \dfrac{\Delta^2(a^x.1^k)}{2} + \dfrac{k-2}{2}\Delta^2 p, \\ \Delta^2 p = \dfrac{\Delta^3(a^x.1^k)}{3} + \dfrac{k-3}{3}\Delta^3 p, \\ \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Delta^{n-2} p = \dfrac{\Delta^{n-1}(a^x.1^k)}{n-1} + \dfrac{k-(n-1)}{n-1}\Delta^{n-1} p, \\ \Delta^{n-1} p = \dfrac{\Delta^n(a^x.1^k)}{n} + \dfrac{k-n}{n}\Delta^n p, \\ \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Substituant successivement ces équations l'une dans l'autre, on trouvera

$$12.\quad \begin{cases} a^{x+k} = a^x.1^k + kp, \\ a^{x+k} = a^x.1^k + k\Delta(a^x.1^k) + k.(k-1)\Delta p, \\ a^{x+k} = a^x.1^k + k\Delta(a^x.1^k) + \dfrac{k.k-1}{2}\Delta^2(a^x.1^k) + \dfrac{k.k-1.k-2}{2}\Delta^2 p, \\ \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

et généralement, si l'on substitue la valeur $\dfrac{a^{x+k}-a^x.1^k}{k}$ de p (2.):

$$13.\quad a^{x+k} = a^x.1^k + k\Delta(a^x.1^k) + \frac{k.k-1}{2}\Delta^2(a^x.1^k)\ldots.$$
$$\ldots. + \frac{k.k-1\ldots.k-(n-1)}{2.3\ldots.n}\Delta^n(a^x.1^k)$$
$$+ \frac{k.k-1\ldots.(k-n)}{2.3\ldots.n}\Delta^n\left(\frac{a^{x+k}-a^x.1^k}{k}\right).$$

Mais $\Delta(a^x.1^k)$ n'est autre chose que

$$a^{x+1}.1^{k-1} - a^x.1^k = (a^{x+1}-a^x)1^k = a^x.1^k(a-1);$$

donc $\Delta^2(a^x.1^k)$ est égal à $(a-1)\Delta(a^x.1^k) = a^x.1^k(a-1)^2$; $\Delta^3(a^x.1^k)$ est égal à $a^x.1^k(a-1)^3$ etc. Donc l'équation (13.) donne:

$$16.\quad a^{x+k} = a^x.1^k\left[1 + k(a-1) + \frac{k.k-1}{2}(a-1)^2 + \ldots. + \frac{k.(k-1)\ldots.[k-(n-1)]}{2.3\ldots.n}(a-1)^n\right]$$
$$+ \frac{k.(k-1)\ldots.(k-n)}{2.3\ldots.n}\Delta^n\left(\frac{a^{x+k}-a^x.1^k}{k}\right).$$

Faisant dans cette équation $x=0$ et écrivant $a+1$ au lieu de a, on aura:

$$15.\quad (1+a)^k = 1^k\left[1 + ka + \frac{k.k-1}{2}a^2 + \frac{k.k-1.k-2}{2.3}a^3 + \ldots. + \frac{k.k-1\ldots.[k-(n-1)]}{2.3\ldots.n}a^n\right]$$
$$+ \frac{k(k-1)\ldots.(k-n)}{2.3\ldots.n}\Delta^n\left(\frac{(1+a)^{x(=0)+k} - (1+a)^{x(=0)}1^k}{k}\right).$$

Voila la formule connue de développement d'une puissance quelconque du binome, mais complétée par l'expression de la valeur exacte du reste de la série, et en même tems du facteur 1^k, qui exprime les racines ou valeurs différentes que peut avoir l'expression $(1+\alpha)^k$.

Comme on voit, il n'a été rien supposé arbitrairement; il n'y a non plus aucune condition ou restriction à faire pour les valeurs de la base et de l'exposant du binome. Le développement a été fondé seulement sur une équation identique, et ne consiste qu'en transformations algébriques.

L'expression finale elle même n'est effectivement qu'identique, comme on peut le voir en développant l'expression du reste. Ce développement fait, tous les termes à droite se détruiront, excepté le seul terme $(1+\alpha)^k$, et l'équation rentrera à l'expression identique $(1+\alpha)^k = (1+\alpha)^k$. Donc la démonstration du théorème de binome, que nous venons de présenter, est parfaitement générale et rigoureuse, en même tems qu'elle est élémentaire.

Berlin, le 2. Avril 1829.

26.

Précis d'une théorie des fonctions elliptiques.

(Suite du mémoire 19. cah. dern.)

(Par Mr. *N. H. Abel* de Christiania.)

Chapitre IV.

De l'équation $(1-y^2)(1-c'^2y^2) = r^2(1-x^2)(1-c^2x^2)$.

Considérons maintenant le problème (*A.*), savoir de satisfaire de la manière la plus générale à l'équation:

$$118.\quad (1-y^2)(1-c'^2y^2) = r^2(1-x^2)(1-c^2x^2),$$

y et r étant des fonctions rationnelles de x. La méthode qui s'offre d'abord de résoudre ce problème est celle des coëfficiens indéterminés, mais cette méthode ne paroit guère applicable, si le degré de la fonction y est un peu élevé; au moins son application seroit très pénible. Je vais présenter une autre, plus simple et qui est, ce me semble, importante dans la théorie des fonctions elliptiques.

§. 1.

Réduction du problème à celui de satisfaire à l'équation:

$$\frac{\partial y}{\triangle(y,c')} = \varepsilon\cdot\frac{\partial x}{\triangle(x,c)}.$$

On voit d'abord que si l'équation dont il sagit a lieu, on doit avoir nécessairement

$$r = \frac{1}{\varepsilon}\cdot\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right),$$

où ε est constant.

Il est facile de voir que les deux facteurs $1-y^2$, $1-c'^2y^2$ ne peuvent s'évanouir en même tems, car dans ce cas on auroit $c'^2 = 1$, et ce cas a été excepté. On doit donc avoir séparément:

$$119.\quad 1-y^2 = r_1^2\cdot\varrho,\quad 1-c'^2y^2 = r_2^2\cdot\varrho'$$

où r_1 et r_2 sont des fonctions rationnelles dont le produit est égal à r. Egalement on aura

$$\varrho\cdot\varrho' = (1-x^2)(1-c^2x^2).$$

Or, différentiant les deux équations (119.), on en tirera:

$$120.\quad \begin{cases} -2y\,.\,\partial y = r_1.\{r_1\partial\varrho + 2\varrho\,\partial r_1\}, \\ -2c'^2 y\,.\,\partial y = r_2.\{r_2\partial\varrho' + \varrho'\,\partial r_2\}. \end{cases}$$

Mais il est clair que y ne pourra avoir aucun facteur commun, ni avec r_1, ni avec r_2, donc il faut que le numérateur de la fraction rationnelle $\frac{\partial y}{\partial x}$ soit divisible par r_1 et par r_2; mais ces deux fonctions ne pourront s'évanouir en même tems, donc on doit avoir:

$$121.\quad \frac{\partial y}{\partial x} = r_1.r_2.v = r.v,$$

où v est une fonction rationnelle de x, qui ne devient pas infini en attribuant à x une valeur qui donne $r = 0$. Soit $y = \frac{p}{q}$, où p et q sont deux fonctions entières de x sans diviseur commun, on aura évidemment:

$$122.\quad \begin{cases} r = \dfrac{\theta}{q^2}, \\ \text{donc:} \\ q^2.\left(\dfrac{\partial y}{\partial x}\right) = \theta.v = \dfrac{q\partial p - p\partial q}{\partial x}. \end{cases}$$

Cela fait voir que v est une fonction entière. Or je dis que v se réduira à une constante. Désignons par m et n les degrés des fonctions p et q, et par μ et ν ceux de θ et v. Cela posé, il y a trois cas.

Cas I. $m > n$.

Dans ce cas l'équation

$$123.\quad (q^2 - p^2)(q^2 - c'^2 p^2) = \theta^2 (1 - x^2)(1 - c^2 x^2)$$

fait voir que

$$4m = 2\mu + 4;$$

mais comme on a

$$\theta.v = \frac{q\partial p - p\partial q}{\partial x},$$

on trouve

$$\mu + \nu = m + n - 1,$$

donc:

$$\nu < 2m - \mu - 1,$$

c'est-à-dire, puisque $2m - \mu = 2$:

$$\nu < 1,$$

donc:

$$\nu = 0,$$

et par conséquent v constant.

Cas II. $n < m$.

On aura de la même manière:

$$4n = 2\mu + 4; \quad 2n - \mu = 2,$$
$$\nu < 2n - \mu - 1, \quad \nu < 1, \quad \nu = 0,$$

donc aussi dans ce cas v sera égal à une constante.

Cas III. $n = m$.

Dans ce cas il peut arriver que le degré de l'une des fonctions

$$q - p, \quad q + p, \quad q - c'p, \quad q + c'p$$

soit moindre que $n = m$. Soit donc par exemple

$$q - p = \varphi,$$

où le degré de φ, que nous désignerons par $m - k$, ne pourra surpasser m. On aura en vertu de (123.):

$$4m - k = 2\mu + 4,$$

d'où:

$$2m - \mu = 2 - \tfrac{1}{2}k;$$

maintenant si l'on substitue la valeur de $q = p + \varphi$, on aura:

$$\theta . v = \frac{p\partial q - q\partial p}{\partial x} = \frac{p\partial\varphi - \varphi\partial p}{\partial x},$$

donc:

$$\mu + \nu = m + m - k - 1 = 2m - k - 1, \text{ si } k > 0, \text{ et}$$
$$\mu + \nu = m + m - k - 2 = 2m - k - 2, \text{ si } k = 0.$$

Dans le premier cas on a

$$\nu = 2m - \mu - k - 1 = 1 - \tfrac{3}{2}k = 0,$$

et dans le second

$$\nu = 2m - \mu - 2 = 0.$$

Le degré de la fonction entière v est donc dans tous les cas égal à zéro et par conséquent v se réduit à une constante. En la désignant par ε, on aura:

$$124. \quad \varepsilon . r = \frac{\partial y}{\partial x}.$$

Cela posé, l'équation

$$(1 - y^2)(1 - c'^2 y^2) = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 . \varepsilon^{-2} . (1 - x^2)(1 - c^2 x^2)$$

donnera celle-ci:

$$125. \quad \frac{\partial y}{\sqrt{[(1-y^2)(1-c'^2y^2)]}} = \frac{\varepsilon . \partial x}{\sqrt{[(1-x^2)(1-c^2x^2)]}},$$

et le problème est ramené par là à celui de satisfaire de la manière la plus générale à cette équation en supposant y rationnel en x. En intégrant, on aura:

$$126. \quad \varpi(y, c') = \varepsilon . \varpi(x, c) + C.$$

En comparant ce résultat à celui que nous avons démontré dans le chapitre II., on aura ce théorème:

Théorème VIII. „Si l'on a une relation quelconque entre un nombre quelconque de fonctions elliptiques, et qu'on désigne par c le module de l'une d'elles prise à volonté, il se trouvera parmi les autres fonctions au moins une, dont le module est c', et qui est telle, qu'on ait entre les fonctions de la première espèce, correspondantes respectivement aux modules c' et c, cette relation très simple:

$$\varpi(y, c') = \varepsilon . \varpi(x, c) + C,$$

où y est une fonction rationnelle de x et ε une quantité constante."

Ce théorème est de la plus grande importance dans la théorie des fonctions elliptiques.

Il s'agit maintenant de trouver toutes les valeurs de y et des modules c' et c propres à satisfaire l'équation (125.). Si la fonction y contient des puissances de x supérieures à la première, elle jouira d'une certaine propriété, qui conduira à son expression générale, en supposant connue la solution complète dans le cas où y ne contient que la première puissance de x. C'est pourquoi nous donnerons d'abord la solution dans ce cas:

§. 2.

Solution du problème dans le cas de $y = \frac{\alpha + \beta . x}{\alpha' + \beta' . x}$.

En substituant cette valeur de y dans l'équation:

$$\varepsilon^2 (1 - y^2)(1 - c'^2 y^2) = (1 - x^2)(1 - c^2 x^2) . \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2,$$

rien n'est plus facile, que de trouver toutes les solutions possibles. Je ne ferais que les transcrire:

I. $c' = \pm c, \qquad y = \pm x, \qquad y = \pm \frac{1}{c\,x}, \qquad \varepsilon = \pm 1,$

II. $c' = \pm \frac{1}{c}, \qquad y = \pm \frac{x}{c}, \qquad y = \pm \frac{1}{x}, \qquad \varepsilon = \pm c,$

III. $c' = \pm \left(\frac{1 - \sqrt{c}}{1 + \sqrt{c}}\right)^2, \quad y = \pm \left(\frac{1 + \sqrt{c}}{1 - \sqrt{c}}\right) . \left(\frac{1 \pm x\sqrt{c}}{1 \mp x\sqrt{c}}\right), \quad \varepsilon = \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{-1} . (1 + \sqrt{c})^2,$

IV. $c' = \pm \left(\frac{1 + \sqrt{c}}{1 - \sqrt{c}}\right)^2, \quad y = \pm \left(\frac{1 - \sqrt{c}}{1 + \sqrt{c}}\right) . \left(\frac{1 \pm x\sqrt{c}}{1 \mp x\sqrt{c}}\right), \quad \varepsilon = \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{-1} . (1 - \sqrt{c})^2,$

V. $c' = \pm \left(\frac{1 - \sqrt{-c}}{1 + \sqrt{-c}}\right)^2, \quad y = \pm \frac{1 + \sqrt{-c}}{1 - \sqrt{-c}} . \frac{1 \pm x . \sqrt{-c}}{1 \mp x . \sqrt{-c}}, \quad \varepsilon = \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{-1} . (1 + \sqrt{-c})^2,$

VI. $c' = \pm \left(\frac{1 + \sqrt{-c}}{1 - \sqrt{-c}}\right)^2, \quad y = \pm \frac{1 - \sqrt{-c}}{1 + \sqrt{-c}} . \frac{1 \pm x . \sqrt{-c}}{1 \mp x . \sqrt{-c}}, \quad \varepsilon = \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{-1} . (1 - \sqrt{-c})^2.$

On voit que le module c' a six valeurs différentes. La fonction y en aura douze, car à chaque valeur de c' répondent deux valeurs différentes de y. Ces formules nous seront utiles pour la solution du problème général.

§. 3.

Propriété générale de la fonction rationnelle y, qui satisfait à une équation de la forme:

$$\frac{\partial y}{\Delta' y} = \varepsilon . \frac{\partial x}{\Delta x}.$$

Soit, pour abréger:

$$\sqrt{[(1-y^2)(1-c'^2y^2)]} = \Delta' y \quad \text{et} \quad \sqrt{[(1-x^2)(1-c^2x^2)]} = \Delta x,$$

l'équation (125.) qu'il s'agit de satisfaire, prendra la forme:

$$127. \quad \frac{\partial y}{\Delta' y} = \varepsilon . \frac{\partial x}{\Delta x},$$

où y est supposée fonction rationnelle de x.

Soit

$$128. \quad y = \psi x$$

la fonction cherchée. Si, en réduisant ψx à sa plus simple expression, les puissances de la variable x qui y entrent s'élèvent jusqu'a la μ^{me} inclusivement; nous dirons que ψx est une fonction rationnelle de x du degré μ. Sa forme générale sera donc:

$$129. \quad \psi x = \frac{A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_\mu . x^\mu}{B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + \ldots + B_\mu . x^\mu},$$

le numérateur n'ayant de diviseur commun avec le dénominateur, et les deux coëfficiens A_μ et B_μ n'étant nuls à la fois.

Cela posé, si l'on considère x comme fonction de y, l'équation $y = \psi x$ donnera μ valeurs différentes à x, nécessairement inégales, en supposant y variable. Il est évident que toutes ces valeurs de x satisferont également à l'équation différentielle:

$$\frac{\partial y}{\Delta' y} = \varepsilon . \frac{\partial x}{\Delta x}.$$

En désignant donc par x et x' deux de ces valeurs, on aura en même tems:

$$\frac{\partial y}{\Delta' y} = \varepsilon . \frac{\partial x'}{\Delta x'}.$$

Donc, en égalant ces deux valeurs de $\frac{\partial y}{\Delta' y}$, on aura

$$\frac{\partial x'}{\Delta x'} = \frac{\partial x}{\Delta x}.$$

Cette relation aura toujours lieu entre deux racines quelconques de l'équation

$$y = \psi x.$$

Il est facile de tirer de là une équation algébrique entre x' et x. En effet l'intégrale complète de cette équation est en vertu de (36.):

$$130.\quad x' = \frac{x\triangle e + e\triangle x}{1 - c^2 e^2 x^2},$$

où e est une constante. Maintenant x et x' étant tous deux racines de $y = \psi x$, on aura:

$$y = \psi x;\quad y = \psi x';$$

donc:

$$131.\quad \psi x' = \psi x,$$

et puisque y est variable, cette équation doit nécessairement avoir lieu pour une valeur quelconque de x. On aura donc immédiatement ce théorème:

Théorème IX. „Si une fonction rationnelle y de x, du degré μ, doit satisfaire à une équation différentielle de la forme

$$\frac{\partial y}{\triangle' y} = \varepsilon . \frac{\partial x}{\triangle x},$$

il faut que cette fonction reste la même, en mettant pour x, μ valeurs différentes de la forme:

$$\frac{x\triangle e + e\triangle x}{1 - c^2 e^2 x^2},$$

e étant constant."

Ce théorème, nous conduira, comme nous verrons, de la manière la plus simple à l'expression générale de y. Il s'agit seulement de déterminer les valeurs convenables de la constante e; car celles-ci étant trouvées, rien n'est plus facile que de trouver ensuite toutes les autres conditions nécessaires. Occupons nous d'abord de la recherche de cette constante.

§. 4.

Recherche des racines de l'équation $y = \psi x$.

Soit pour abréger:

$$132.\quad \theta x = \frac{x\triangle e + e\triangle x}{1 - c^2 e^2 x^2},$$

nous aurons d'après ce que nous venons de voir (131.):

$$133.\quad \psi(\theta x) = \psi x,$$

où le signe du radical $\triangle x$ est évidemment arbitraire. Je remarque que cette équation, ayant lieu pour une valeur quelconque de x, subsistera encore en mettant θx au lieu de x. On aura donc:

$$\psi[\theta(\theta x)] = \psi(\theta x) = \psi x.$$

En mettant de nouveau θx au lieu de x et ainsi de suite, on trouve

$$y = \psi x = \psi(\theta x) = \psi(\theta^2 x) = \psi(\theta^3 x) = \ldots = \psi(\theta^n x) = \text{etc.},$$

où l'on a écrit pour abréger:

$$\theta^2 x = \theta\theta x, \quad \theta^3 x = \theta\theta^2 x, \quad \ldots\ldots \text{ etc. } \theta^n x = \theta\theta^{n-1} x.$$

Il suit de là que toutes les quantités de la série

$$134. \quad x, \ \theta x, \ \theta^2 x, \ \ldots\ldots \ \theta^n x, \ \ldots\ldots$$

seront des racines de l'équation $y = \psi x$. Maintenant cette équation, n'ayant qu'un nombre limité de racines, savoir μ, il faut nécessairement que plusieurs quantités de la série (134.) soient égales entre elles. Il s'agit de savoir si cela est possible. Pour cela il faut d'abord avoir l'expression générale de $\theta^n x$ en fonctions de x et e. Supposons pour le moment e indépendamment variable. On aura en vertu de l'équation

$$\theta^n x = \frac{\theta^{n-1} x \,.\, \triangle e + e \triangle (\theta^{n-1} x)}{1 - c^2 e^2 (\theta^{n-1} x)^2}.$$

$$\frac{\partial (\theta^n x)}{\triangle (\theta^n x)} = \frac{\partial (\theta^{n-1} x)}{\triangle (\theta^{n-1} x)} + \frac{\partial e}{\triangle e}.$$

En mettant dans cette équation successivement $n-1$, $n-2$, $\ldots\ldots$ 2, 1 au lieu de n, et supposant, ce qui est permis, que les radicaux $\triangle(\theta^n x)$, $\triangle(\theta^{n-1} x) \ldots\ldots \triangle(\theta x)$, $\triangle x$ conservent leurs signes dans deux équations consécutives, on aura sur le champ:

$$\frac{\partial (\theta^n x)}{\triangle (\theta^n x)} = \frac{\partial x}{\triangle x} + n \,.\, \frac{\partial e}{\triangle e}.$$

Cela posé, cherchons suivant le paragraphe 4. du chapitre I. une fonction rationnelle e_n de e telle, que

$$\frac{\partial e_n}{\triangle e_n} = n \,.\, \frac{\partial e}{\triangle e},$$

on aura:

$$\frac{\partial (\theta^n x)}{\triangle (\theta^n x)} = \frac{\partial x}{\triangle x} + \frac{\partial e_n}{\triangle e_n}.$$

Mais si l'on fait

$$x' = \frac{x \triangle e_n + e_n \triangle x}{1 - c^2 e_n^2 \triangle x},$$

on a:

$$\frac{\partial x'}{\triangle x'} = \frac{\partial x}{\triangle x} + \frac{\partial e_n}{\triangle e_n},$$

donc:

$$\frac{\partial (\theta^n x)}{\triangle (\theta^n x)} = \frac{\partial x'}{\triangle x'}.$$

Cette dernière équation donne

$$\theta^n x = \frac{x' \triangle e' + e' \triangle x'}{1 - c^2 e'^2 x'^2},$$

où e' est une constante.

Pour trouver cette constante, faisons $e = 0$; on aura $e_n = 0$ et $\triangle e_n = 1$. Donc la valeur de x' deviendra $x' = x$, et par conséquent celle de $\theta^n x$:

$$\theta^n x = \frac{x \triangle e' + e' \triangle x}{1 - c^2 e'^2 x^2}.$$

Mais puisque $\theta x = x$, on aura encore $\theta^n x = x$, donc:

$$x = \frac{x \triangle e' + e' \triangle x}{1 - c^2 e'^2 x^2}.$$

Cette équation, devant avoir lieu pour une valeur quelconque de x, ne pourra subsister à moins qu'on n'ait séparement $e' = 0$, $\triangle e' = 1$; donc on aura:

$$\theta^n x = x',$$

c'est-à-dire:

$$135. \quad \theta^n x = \frac{x \triangle e_n + e_n \triangle x}{1 - c^2 e_n^2 x^2}.$$

Telle sera l'expression de $\theta^n x$ pour une valeur quelconque du nombre entier n. Elle a en effet, comme on voit, la forme d'une racine quelconque de l'équation $y = \psi x$.

Cela posé, soient $\theta^m x$ et $\theta^{m+n} x$ deux quantités de la série, égales entre elles, dont il existera toujours suivant la remarque plus haut. On aura donc:

$$\theta^{m+n} x = \theta^m x,$$

mais $\theta^{m+n} x$ est évidemment la même chose que $\theta^n(\theta^m x)$, donc en mettant x pour $\theta^m x$, il viendra:

$$136. \quad \theta^n x = x.$$

Une équation de cette forme doit donc toujours avoir lieu quel que soit x. Si elle a lieu effectivement, il est clair que la série (134.) n'aura que n termes différents, car, $\theta^{n-1} x$, passé, les termes se reproduiront dans le même ordre, puisque $\theta^{n+1} x = \theta x$, $\theta^{n+1} x = \theta^2 x$ etc. Si l'on suppose, ce qui est permis, que n, dans l'équation $\theta^n x = x$, a la valeur la plus petite possible pour la même valeur de e, il est clair également que les n quantités

$$137. \quad x, \ \theta x, \ \theta^2 x, \ \ldots \ \theta^n x$$

seront nécessairement différentes entre elles. Car si l'on avoit par exemple

$$\theta^m x = \theta^{m+\mu} x,$$

il en résulteroit $\theta^\mu x = x$, ce qui est contre l'hypothèse, attendu que μ est moindre que n.

Il s'agit maintenant de satisfaire à l'équation

$$\theta^n x = x.$$

En y substituant l'expression de $\theta^n x$, donnée par la formule (135.), il viendra:

$$x = \frac{x \triangle e_n + e_n \triangle x}{1 - c^2 e_n^2 x^2}.$$

Or il est impossible de satisfaire à cette équation pour une valeur quelconque de x, à moins qu'on n'ait séparement les deux équations:

$$138. \quad e_n = 0, \quad \triangle e_n = 1;$$

et réciproquement: si ces équations subsistent, il en sera de même de l'équation $\theta^n x = x$. Or je dis qu'il sera toujours possible de satisfaire deux équations à la fois.

D'abord si n est impair, les deux quantités e_n et $\frac{\triangle e_n}{\triangle e}$ seront des fonctions rationnelles de e, comme nous l'avons vu chapitre I. §. 4. Si donc on désigne par e une racine quelconque de l'équation

$$139. \quad e_n = 0,$$

il suffit, pour satisfaire à l'équation $\triangle e_n = 1$, de déterminer le radical $\triangle e$ de la manière que:

$$140. \quad \triangle e = \frac{\triangle e}{\triangle e_n},$$

après avoir mis le second membre sous la forme d'une fonction rationnelle en e. Ce-ci se fait voir, en remarquant, que si $e_n = 0$, la quantité $\triangle e_n = \pm\sqrt{[(1-e_n^2)(1-c^2 e_n^2)]}$ ne pourra avoir que l'une des deux valeurs $+1$, -1.

Si au contraire n est un nombre pair, on a vu que $\triangle e_n$ sera une fonction rationnelle de e, de la même sorte que $\frac{\triangle e_n}{1-c^2 e_n^2}$. En la désignant par ε_n, on doit avoir en vertu des équations (138.):

$$141. \quad \varepsilon_n = 1.$$

Or je dis que si e est une racine quelconque de cette équation, on aura à la fois $e_n = 0$, $\triangle e_n = 0$. En effet, ayant

$$\varepsilon_n = \frac{\triangle e_n}{1-c^2 e_n^2} = \frac{\sqrt{(1-e_n^2)}}{\sqrt{(1-c^2 e_n^2)}} = 1,$$

on en tire en quarrant:

$$1 - e_n^2 = 1 - c^2 e_n^2,$$

et cela donne:

$$e_n = 0,$$

car c^2 est différent de l'unité. Or ayant $e_n = 0$ et $\varepsilon_n = 1$, on aura évidemment $\triangle e_n = 1$; donc etc.

On pourra donc satisfaire à la fois aux deux équations:

$$e_n = 0, \quad \triangle e_n = 0,$$

et on aura toujours un nombre n^2 de valeurs différentes et convenables de e, car en vertu des formules (51., 55.) les équations $e_n = 0$, $\varepsilon_n = 0$ seront du degré n^2 en e.

Il s'agit maintenant de choisir les valeurs de e qui rendent toutes les n quantités $x, \theta x, \ldots . \theta^{n-1}x$ différentes entre elles, car cela est une seconde condition à laquelle doit satisfaire e.

Or pour cela il suffit de rejeter toutes les valeurs de e qui pourroient donner $\theta^\mu x = x$, où μ est moindre que n. On pourra toujours supposer μ facteur de n. En effet soit k le plus grand commun diviseur de μ et n, on pourra trouver deux nombres entiers μ' et n' tels que:

$$\mu' \mu = n' n + k.$$

Or l'équation $\theta^\mu x = x$ donne:

$$\theta^{\mu' \mu} x = x,$$

donc:

$$\theta^{n' n + k} x = x = \theta^k \theta^{n' n} x;$$

mais en vertu de $\theta^n x = x$ on a encore

$$\theta^{n' n} x = x,$$

donc enfin:

$$\theta^k x = x;$$

donc, si $\theta^\mu x = x$, on aura encore: $\theta^k x = x$, où k est diviseur de n. Donc il suffit, de rejeter toutes les valeurs de e, qui pourroient satisfaire en même tems à ces deux équations:

$$e_\mu = 0, \quad \triangle e_\mu = 1,$$

où μ est un facteur de n; et il faut nécessairement les rejeter toutes, car si l'on a $\theta^\mu x = x$, on a nécessairement $\theta^n x = x$.

Ainsi on trouvera aisément une équation en e, dont toutes les racines donneront des valeurs convenables de cette constante. Si n est un nombre premier impair, on a $\mu = 1$; donc la seule racine qu'il faut rejeter de celles de l'équation

$$e_n = 0,$$

est celle-ci:

$$e = 0.$$

On aura donc un nombre $n^2 - 1$ de valeurs convenables de e. Car l'équation $e_n = 0$ est du degré n^2.

Il y a une remarque essentielle à faire sur les quantités

$$x, \ \theta x, \ \theta^2 x, \ \ldots . \ \theta^{n-1} x.$$

Savoir, on aura toujours en même tems:

$$142. \quad \theta^m x = \frac{x \triangle e_m + e_m \triangle x}{1 - c^2 x^2 e_m^2}, \quad \theta^{n-m} x = \frac{x \triangle e_m - e_m \triangle x}{1 - c^2 x^2 e_m^2}.$$

En effet, on a (43.):

$$e_{n-m} = \frac{e_n \triangle e_m - e_m \triangle e_n}{1 - c^2 e_n^2 e_m^2};$$

mais

$$e_n = 0, \quad \triangle e_n = 1,$$

donc:

$$e_{n-m} = -e_m.$$

On aura également (42.)

$$e_n = \frac{e_m . \triangle e_{n-m} + e_{n-m} \triangle e_m}{1 - c^2 e_m^2 e_{n-m}^2} = 0,$$

donc à cause de

$$e_{n-m} = -e_m,$$

on aura:

$$\triangle e_{n-m} = \triangle e_m.$$

En substituant ces valeurs de e_{n-m}, $\triangle e_{n-m}$ dans l'équation

$$\theta^{n-m} x = \frac{x \triangle e_{n-m} + e_{n-m} \triangle x}{1 - c^2 e_{n-m}^2 x^2},$$

on aura précisément la seconde des équations (142.).

Si l'on multiplie entre elles les valeurs de $\theta^m x$ et $\theta^{n-m} x$, le produit sera rationnel, et on trouvera

$$143. \quad \theta^m x . \theta^{n-m} x = \frac{x^2 - e_m^2}{1 - c^2 e_m^2 x^2}.$$

On aura de la même sorte:

$$144. \quad \theta^n x + \theta^{n-m} x = \frac{2 x \triangle e_m}{1 - c^2 e_m^2 x^2}.$$

Ces formules nous seront utiles dans la suite.

D'après ce qui précède, les n quantités

$$x, \ \theta x, \ \theta^2 x, \ \ldots . \ \theta^{n-1} x$$

sont différentes entre elles et racines de l'équation $y = \psi x$. Le degré μ de cette équation est donc égal à n, s'il ne surpasse ce nombre. Nous verrons plus bas, qu'il suffira de considérer le cas, où $\mu = n$. On pourra même supposer n premier.

§. 5.

Trouver toutes les valeurs de y qui pourront répondre aux valeurs des racines, l'orsqu'on en connoit une seule.

Pour simplifier la solution du problème général, voyons si plusieurs valeurs différentes de la fonction y et du module c' pourront répondre aux mêmes racines de l'équation $y = \psi x$. Rien n'est plus facile

que de trouver les valeurs de y et c'. En effet soit $\psi z = \frac{p}{q}$ où p et q sont des fonctions entières de z sans diviseur commun. En désignant par

$$x,\ x',\ x''\ \ldots\ x^{(\mu-1)}$$

toutes les racines de l'équation

$$y = \psi x,$$

on aura

$$p - qy = (a - by)(z-x)(z-x')(z-x'')\ldots(z-x^{(\mu-1)}),$$

où a et b sont des constantes. Soit maintenant y' une autre valeur de y qui satisfait aux mêmes valeurs de x, x', x'' . . . ., on aura en désignant par p' et q' les valeurs correspondantes des fonctions p et q:

$$p' - q'y' = (a' - b'y')(z-x)(z-x')(z-x'')\ldots(z-x^{(\mu-1)}),$$

donc:

$$\frac{p-qy}{p'-q'y'} = \frac{a-by}{a'-b'y'}.$$

En attribuant à z une valeur constante, il est clair que cette équation donnera pour y' une expression de la forme:

$$145.\quad y' = \frac{\alpha + \beta . y}{\alpha' + \beta' . y},$$

où α, β, α', β' sont des constantes. En désignant maintenant par c'' le module qui répond à y', on aura en même tems:

$$\frac{\partial y'}{\sqrt{[(1-y'^2)(1-c''^2y'^2)]}} = \varepsilon' . \frac{\partial x}{\triangle x};\quad \frac{\partial y}{\triangle' y} = \varepsilon . \frac{\partial x}{\triangle x},$$

donc:

$$146.\quad \frac{\partial y'}{\sqrt{[(1-y'^2)(1-c''^2y'^2)]}} = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} . \frac{\partial y}{\sqrt{[(1-y^2)(1-c'^2y^2)]}}.$$

En y substituant l'expression de y' en y, on aura les équations nécessaires pour trouver y', c'', ε'. Ce problème est précisément le même que celui du paragraphe 2. On voit donc, qu'une seule solution de l'équation

$$\frac{\partial y}{\triangle y} = \varepsilon . \frac{\partial x}{\triangle x}$$

donnera sur le champ cinq autres qui, généralement, seront différentes entre elles. La fonction y aura toujours deux valeurs correspondantes au même module c', savoir y et $\frac{1}{c'y}$.

§. 6.

Solution complète du problème dans le cas $\mu = n$.

Supposons maintenant que l'équation $y = \psi x$ n'ait d'autres racines que celles-ci:

$$x,\ \theta x,\ \theta^2 x,\ \ldots\ \theta^{n-1} x,$$

ce qui a lieu toujours si μ est un nombre premier, comme nous le verrons plus bas. On aura alors, si p et q signifient la même chose qu'au paragraphe précédent:

147. $$p - qy = (a - by)(z - x)(z - \theta x)(z - \theta^2 x) \ldots . (z - \theta^{n-1} x).$$

En attribuant à z une valeur particulière, on aura une expression de y, dans laquelle tout est déterminé, excepté trois quantités constantes. Nous allons voir qu'on pourra toujours trouver ces quantités de sorte que l'équation différentielle proposée soit satisfaite. Pour cela considérons deux cas: n impair et n pair.

Cas I. Si n est un nombre impair.

Soit dans ce cas $n = 2\mu + 1$. Alors l'équation (147.) donne, en attribuant à z la valeur particulière zéro:

$$a' - b'y = -(a - by)x.\theta x.\theta^2 x \ldots . \theta^{2\mu} x,$$

et de là:

148. $$y = \frac{a' + a.x.\theta x.\theta^2 x \ldots . \theta^{2\mu} x}{b' + b.x.\theta x.\theta^2 x \ldots . \theta^{2\mu} x}.$$

Remarquant maintenant qu'en vertu de (143.):

$$\theta^m x.\theta^{2\mu+1-m} x = \frac{x^2 - e_m^2}{1 - c^2 e_m^2 x^2},$$

il est clair que l'expression précédente de y sera une fonction rationnelle de x du degré $2\mu + 1$; donc, puisque cette fonction ne varie pas, en mettant pour x les $2\mu + 1$ valeurs

$$x,\ \theta x,\ \theta^2 x \ldots . \theta^{2\mu} x,$$

ce qui est évident à cause de $\theta^{2\mu+1} x = x$, on conclura que l'équation (147.) a lieu en mettant au lieu de y cette fonction et pour p et q les valeurs correspondantes en z. Cette équation pourra s'écrire comme il suit:

149. $$p - qy = (a - by)(z - x)(z - \theta x)(z - \theta^{2\mu} x)(z - \theta^2 x)(z - \theta^{2\mu-1} x) \ldots .$$
$$\ldots . (z - \theta^{\mu} x)(z - \theta^{\mu+1} x).$$

Cela posé, faisons:

$$x = 1,\ -1,\ \frac{1}{c},\ -\frac{1}{c},$$

et désignons les valeurs correspondantes de y par

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta.$$

Puisqu'on a pour ces valeurs de x, $\triangle x = 0$, il suit en vertu des deux équations (142.) du paragraphe 4.:

$$\theta^m x = \theta^{2\mu+1-m} x = \frac{x \triangle e_m}{1 - c^2 x^2 e_m^2},$$

d'où l'on voit que les facteurs du second membre de l'équation seront

égaux deux à deux, en faisant abstraction du premier facteur $z-x$. On a donc:

$$150. \quad \begin{cases} p-q\alpha = (a-b\alpha)(1-z).\varrho^2, \\ p-q\beta = (a-b\beta)(1+z).\varrho'^2, \\ p-q\gamma = (a-b\gamma)(1-cz).\varrho''^2, \\ p-q\delta = (a-b\delta)(1+cz).\varrho'''^2, \end{cases}$$

où ϱ, ϱ', ϱ'', ϱ''' seront des fonctions entières de z du degré μ. Mais, puisque

$$151. \quad (\Phi^2-p^2)(\Phi^2-c'^2p^2) = r^2(1-z^2)(1-c^2z^2),$$

les équations précédentes font voir que les quatre constantes α, β, γ, δ égalent celles-ci:

$$+1, \quad -1, \quad +\frac{1}{c'}, \quad -\frac{1}{c'},$$

et si cette condition a lieu, les quatre équations (150.) donneront évidemment une de la forme (151.), et par suite on aura

$$152. \quad \frac{\partial y}{\Delta' y} = \varepsilon.\frac{\partial x}{\Delta x},$$

en vertu de ce qu'on a vu dans le paragraphe 1. de ce chapitre.

Puisqu'il suffit de connoitre une seule valeur de y, nous pourrons faire par exemple:

$$153. \quad \alpha = 1, \quad \beta = -1, \quad \gamma = \frac{1}{c'}, \quad \delta = -\frac{1}{c'}.$$

Cela posé, il reste de satisfaire à ces équations. Or si l'on fait pour un moment:

$$154. \quad \varphi x = x.\theta x.\theta^2 x \ldots \theta^{2\mu} x = \frac{x(x^2-e^2)(x^2-e_2^2)\ldots(x^2-e_\mu^2)}{(1-c^2e^2x^2)(1-c^2e_2^2x^2)\ldots(1-c^2e_\mu^2x^2)},$$

l'expression de y deviendra:

$$155. \quad y = \frac{a'+a.\varphi x}{b'+b.\varphi x},$$

d'où l'on tire, en remarquant que $\varphi(-x) = -\varphi x$, et faisant $x = 1$, -1, $\frac{1}{c}$, $-\frac{1}{c}$:

$$\alpha = \frac{a'+a.\varphi(1)}{b'+b.\varphi(1)}, \quad \beta = \frac{a'-a.\varphi(1)}{b'-b.\varphi(1)}, \quad \gamma = \frac{a'+a.\varphi\left(\frac{1}{c}\right)}{b'+b.\varphi\left(\frac{1}{c}\right)}, \quad \delta = \frac{a'-a.\varphi\left(\frac{1}{c}\right)}{b'-b.\varphi\left(\frac{1}{c}\right)},$$

donc en vertu des équations (153.), on aura:

$$a'-b'+(a-b)\varphi(1) = 0; \quad a'+b'-(a+b)\varphi(1) = 0,$$

$$a'-\frac{b'}{c'}+\left(a-\frac{b}{c'}\right)\varphi\left(\frac{1}{c}\right) = 0; \quad a'+\frac{b'}{c'}-\left(a+\frac{b'}{c'}\right)\varphi\left(\frac{1}{c}\right) = 0.$$

Il est impossible de satisfaire à ces équations à moins que l'une des quantités a', b' ne soit zéro. Faisons donc $a' = 0$, on aura en même tems $b = 0$. Donc deux des équations précédentes donneront:

$$\frac{b'}{a} = \varphi(1) = c'.\varphi\left(\frac{1}{c}\right),$$

d'où l'on tire la valeur de c', savoir:

$$c' = \frac{\varphi(1)}{\varphi\left(\frac{1}{c}\right)}.$$

La valeur de y deviendra:

$$y = \frac{a}{b'}.\varphi x = \frac{\varphi x}{\varphi(1)}.$$

Quant aux valeurs de $\varphi(1)$ et $\varphi\left(\frac{1}{c}\right)$, on aura en vertu de l'expression de φx:

$$\varphi(1) = \frac{1-e^2}{1-c^2e^2}.\frac{1-e_1^2}{1-c^2e_1^2}.\cdots.\frac{1-e_\mu^2}{1-c^2e_\mu^2},$$

$$\varphi\left(\frac{1}{c}\right) = \frac{1}{c^{2\mu+1}}.\frac{1-c^2e^2}{1-e^2}.\frac{1-c^2e_1^2}{1-e_1^2}.\cdots.\frac{1-c^2e_\mu^2}{1-e_\mu^2},$$

donc:

$$\varphi\left(\frac{1}{c}\right) = \frac{1}{c^{2\mu+1}.\varphi(1)}$$

et

$$c' = c^{2\mu+1}.\{\varphi(1)\}^2; \quad \varphi(1) = \frac{\sqrt{c'}}{c^{\mu+\frac{1}{2}}}.$$

Enfin, pour avoir la valeur du coëfficient ε, il suffit de faire $x = 0$, après avoir différentié l'expression de y. On aura:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \pm e^2.e_1^2.e_2^2.\cdots.e_\mu^2.\frac{1}{\varphi(1)}.$$

Mais comme on a

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \varepsilon.\frac{\Delta' y}{\Delta x},$$

il en résulte, en faisant $x = 0$:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \pm\varepsilon,$$

donc on pourra faire:

$$\varepsilon = e^2.e_1^2.e_2^2.\cdots.e_\mu^2.\frac{c^{\mu+\frac{1}{2}}}{\sqrt{c'}}.$$

En vertu de ce qui précède, on pourra énoncer le théorème suivant:

Théorème X. „Soit e une racine quelconque de l'équation $e_{2\mu+1} = 0$, mais qui ne puisse être racine d'une autre équation de la même forme $e_{2m+1} = 0$, où $2m+1$ est diviseur de $2\mu+1$. Cela posé,

si l'on détermine la fonction y, le module c', et le coëfficient ε, en vertu des formules:

$$156.\quad \begin{cases} y = \dfrac{c^{\mu+\frac{1}{2}}}{\sqrt{c'}} \cdot \dfrac{x(e^2-x^2)(e_2^2-x^2)(e_3^2-x^2)\ldots(e_\mu^2-x^2)}{(1-c^2e^2x^2)(1-c^2e_2^2x^2)(1-c^2e_3^2x^2)\ldots(1-c^2e_\mu^2x^2)}, \\ c' = c^{2\mu+1} \cdot \left\{\dfrac{(1-e^2)(1-e_2^2)(1-e_3^2)\ldots(1-e_\mu^2)}{(1-c^2e^2)(1-c^2e_2^2)(1-c^2e_3^2)\ldots(1-c^2e_\mu^2)}\right\}^2, \\ \varepsilon = \dfrac{c^{\mu+\frac{1}{2}}}{\sqrt{c'}} \cdot e^2 \cdot e_2^2 \cdot e_3^2 \ldots e_\mu^2, \end{cases}$$

on aura toujours:

$$\frac{\partial y}{\sqrt{[(1-y^2)(1-c'^2y^2)]}} = \pm\varepsilon \cdot \frac{\partial x}{\sqrt{[(1-x^2)(1-c^2x^2)]}},$$

en déterminant convenablement le signe du second membre.

Ayant trouvé de cette sorte un système de valeurs de y, c', ε, on en aura, d'après ce qu'on a vu dans le paragraphe précédent, cinq autres à l'aide des formules du paragraphe 1. Il répond six systèmes de valeurs de y, c', ε à chaque valeur de e. On trouvera même douze valeurs de y, car à chaque valeur de c' répondent deux valeurs différentes de cette fonction. Nous reviendrons plus bas au problème de trouver le nombre total des solutions qui répondent à la même valeur de μ.

Pour donner un exemple des formules ci-dessus, soit $\mu = 1$. Puisque dans ce cas $2\mu+1 = 3$ est un nombre premier, on pourra, en vertu de ce qu'on a vu plus haut, prendre pour e une racine quelconque de l'équation $e_3 = 0$, excepté la racine zéro. Cette équation, en vertu de la formule qui donne l'expression de x_3, est du huitième degré, savoir:

$$0 = 3 - 4(1+c^2)e^2 + 6c^2e^4 - c^4e^8.$$

La quantité e étant une racine quelconque de cette équation, on aura:

$$\frac{\partial y}{\sqrt{[(1-y^2)(1-c'^2)]}} = \pm\varepsilon \cdot \frac{\partial x}{\sqrt{[(1-x^2)(1-c^2x^2)]}},$$

$$c' = c^3 \cdot \left(\frac{1-e^2}{1-c^2e^2}\right)^2, \quad \varepsilon = c \cdot \sqrt{\left(\frac{c}{c'}\right)} \cdot e^2, \quad y = \frac{c\sqrt{c}}{\sqrt{c'}} \cdot \frac{x(e^2-x^2)}{1-c^2e^2x^2}.$$

Puisque e^2 est exprimé en c par une équation du quatrième degré, le module c' le pourra être également. Cette équation est:

$$(c'-c)^3 = 4\sqrt{c\,c'} \cdot (1-\sqrt{c\,c'})^2.$$

L'expression générale de y, donnée plus haut, est exprimée en forme des produits. On décomposera aisément cette fraction en fractions partielles. En effet, puisque les racines de l'équation

$$0 = \frac{c^{\mu+\frac{1}{2}}}{\sqrt{c'}} \cdot z(z^2-e^2)(z^2-e_2^2)\ldots(z^2-e_\mu^2) + y(1-c^2e^2z^2)\ldots(1-c^2e_\mu^2z^2)$$

sont les $2\mu+1$ quantités suivantes

$$x,\ \theta x,\ \theta^2 x \ \ldots\ \theta^{2\mu} x,$$

la somme de ces quantités sera égale au coëfficient de $z^{2\mu}$, divisé par celui de $z^{2\mu+1}$ et pris avec le signe -1, donc:

$$x+\theta x+\theta^2 x+\ldots+\theta^{2\mu}x=\frac{(-1)^{\mu+1}.c^{2\mu}.e^2.e_2^2\ldots.e_\mu^2}{c^{\mu+\frac{1}{2}}.c'^{-\frac{1}{2}}}.y;$$

donc, en vertu de l'équation

$$\theta^m x+\theta^{2\mu+1-m}x=\frac{2\triangle e_m.x}{1-c^2e_m^2x^2},$$

on aura l'expression suivante de y:

$$157.\quad y=\left\{x+\frac{2\triangle e.x}{1-c^2e^2x^2}+\frac{2\triangle e_2 x}{1-c^2e_2^2x^2}+\ldots.+\frac{2\triangle e_\mu x}{1-c^2e_\mu^2x^2}\right\}.\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{c'}}.\frac{(-1)^{\mu+1}}{e^2.e_2^2\ldots.e_\mu^2}.$$

Cas II. Si n est un nombre pair.

Faisons $n=2\mu$. Puisqu'on a

$$\theta^m x=\frac{x\triangle e_m+e_m\triangle x}{1-c^2e_m^2x^2},\quad \theta^{2\mu-m}x=\frac{x\triangle e_m-e_m\triangle x}{1-c^2e_m^2x^2},$$

on aura, en faisant $m=\mu$:

$$\theta^\mu x=\frac{x\triangle e_\mu+e_\mu\triangle x}{1-c^2e_\mu^2x^2}=\frac{x\triangle e_\mu-e_\mu\triangle x}{1-c^2e_\mu^2x^2}.$$

Cette égalité ne peut subsister à moins que e_μ n'ait une des deux valeurs: zéro ou l'infini. Cela donne lieu à considérer séparement ces deux cas:

A. si $e_\mu=\frac{1}{0}$.

On aura:

$$\theta^\mu x=\pm\frac{1}{cx}.$$

En y substituant $\theta^m x$ au lieu de x, on aura:

$$\theta^{\mu+m}x=\pm\frac{1}{c\,\theta^m x}.$$

Les racines de l'équation $y=\psi x$ deviendront donc:

$$x,\ \pm\frac{1}{cx},\ \theta x,\ \theta^2 x,\ \ldots.\ \theta^{\mu-1}x,\ \theta^{\mu+1}x,\ \theta^{\mu+2}x,\ \ldots.\ \theta^{2\mu-1}x,$$

par conséquent on aura:

$$158.\quad p-qy=(a-by)(z-x)\left(z\mp\frac{1}{cx}\right)(z-\theta x)(z-\theta^{2\mu-1}x)\ldots.(z-\theta^{\mu-1}x)(z-\theta^{\mu+1}x).$$

En désignant par a' et b' les coëfficiens de $z^{2\mu-1}$ dans les deux fonctions entières p et q, on aura:

$$a'-b'y=-(a-by).\left\{x+\frac{1}{cx}+\theta x+\theta^{2\mu-1}x+\ldots.+\theta^{\mu-1}x+\theta^{\mu+1}x\right\}$$

$$=(by-a)\left(x\pm\frac{1}{cx}+\frac{2\triangle ex}{1-c^2e^2x^2}+\frac{2\triangle e_2x}{1-c^2e_2^2x^2}+\ldots.+\frac{2\triangle e_{\mu-1}x}{1-c^2e_{\mu-1}^2x^2}\right).$$

L'expression qu'on en tire pour y sera évidemment une fonction ration-

nelle de x du degré 2μ, et puisqu'elle reste invariable, en mettant pour x les 2μ quantités *)

$$x,\ \theta x,\ \theta^2 x,\ \ldots .\ \theta^{2\mu-1} x,$$

l'équation (158.) aura lieu en mettant pour y cette valeur et pour p et q les valeurs correspondantes en z.

Nous allons voir qu'on aura une valeur convenable de y en faisant

$$a = b' = 0.$$

Cela donne

$$y = \frac{a'}{b} \cdot \frac{1}{x \pm \frac{1}{cx} + \frac{2\triangle e \,.\, x}{1 - c^2 e^2 x^2} + \ldots + \frac{2\triangle e_{\mu-1} \,.\, x}{1 - c^2 e_{\mu-1}^2 x^2}},$$

expression qui est évidemment de la forme:

$$159.\quad y = A \,.\, \frac{x(1-c^2e^2x^2)(1-c^2e_2^2x^2)\ldots.(1-c^2e_{\mu-1}^2x^2)}{1+a_1x^2+a_2x^4+\ldots.+a_\mu.x^{2\mu}} = A.\varphi x.$$

Pour trouver la valeur de A, remarquons que si l'on fait $x = 1$, y doit avoir une des valeurs: ± 1, $\pm \frac{1}{c'}$. Soit par exemple $y = 1$, pour $x = 1$, on aura:

$$160.\quad A = \frac{1}{\varphi(1)}.$$

Cela posé, faisons dans l'équation (158.): $x = 1$. En remarquant que $a = 0$, on aura

$$q - p = (1-z)(1 \mp cz).\varrho^2,$$

où ϱ est une fonction entière de z, car pour $x = 1$ on aura:

$$\theta^m x = \theta^{2\mu-m} x = \frac{\triangle e_m}{1 - c^2 e_m^2}.$$

En changeant le signe de z dans l'équation précédente, on aura, en remarquant que q est une fonction paire et p une fonction impaire:

$$q + p = (1+z)(1 \pm cz).\varrho'^2.$$

Cela donne:

$$q^2 - p^2 = (1-z^2)(1-c^2z^2)(\varrho\varrho')^2.$$

Maintenant, puisque

$$161.\quad (q^2-p^2)(q^2-c'^2p^2) = (1-z^2)(1-c^2z^2)r^2,$$

cela fait voir que la fonction $q^2 - c'^2 p^2$ doit être un carré parfait. Or on pourra toujours déterminer c' de la manière que cette condition soit remplie. Faisons dans l'équation

$$x = \frac{1}{\sqrt{\pm c}}.$$

---

*) On a

$$y = \frac{a' + a(x + \theta x + \theta^2 x \ldots . + \theta^{2\mu-1} x)}{b' + b(x + \theta x + \theta^2 x \ldots . + \theta^{2\mu-1} x)} \quad \text{et} \quad \theta^{2\mu} x = x.$$

On aura:

$$\theta^{\mu+m}x = \theta^m(\theta^\mu x) = \theta^m\left(\pm\frac{1}{c\,x}\right) = \theta^m\left(\frac{1}{\sqrt{\pm c}}\right),$$

donc:

$$\theta^{\mu+m}x = \theta^m x.$$

Si donc on désigne par α la valeur de y qui réponde à $x = \frac{1}{\sqrt{\pm c'}}$, les racines de l'équation

$$x = \psi z,$$

c'est-à-dire de $p - \alpha q$, seront égales entre elles deux à deux; donc $p - \alpha q$ sera un carré parfait. En changeant le signe de z, on aura $p + \alpha q$, qui par conséquent sera également un carré; donc en multipliant, on aura:

$$p^2 - \alpha^2 q^2 = t^2,$$

où t est une fonction entière de z. En faisant donc

$$c' = \frac{1}{\alpha},$$

l'équation (161.) aura lieu, et par suite on aura:

$$\frac{\partial v}{\Delta' v} = \varepsilon.\frac{\partial z}{\Delta z}, \quad \text{où} \quad \frac{p}{q} = v,$$

c'est-à-dire, en changeant z en x:

$$\frac{\partial y}{\Delta' y} = \varepsilon.\frac{\partial x}{\Delta x}.$$

Pour déterminer le coëfficient ε, on aura d'abord, en vertu de la dernière équation:

$$\varepsilon = \frac{\partial y}{\partial x}, \text{ pour } x = 0.$$

Mais l'expression de y donnera:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = A = \frac{1}{\varphi(1)},$$

donc:

$$\varepsilon = \frac{1}{\varphi(1)}.$$

Le numérateur de la fraction qui exprime la valeur de y sera décomposé en facteurs; savoir si lon fait $y = \frac{p'}{q'}$, on aura:

$$p' = \frac{1}{\varphi(1)}.x(1 - c^2e^2x^2)(1 - c^2e_2^2x^2)\ldots.(1 - c^2e_{\mu-1}^2x^2).$$

On pourra facilement décomposer de la même manière le dénominateur q', comme on va le voir.

En divisant les membres de la formule (147.) par y, il viendra à cause de $a = 0$:

$$\frac{p}{y} - q = -b(z - x)(z - \theta x)(z - \theta^2 x)\ldots.(z - \theta^{2\mu-1}x).$$

Cela posé, soit δ une valeur de x, qui rend y infini, c'est-à-dire une des racines de l'équation $q'=0$. On aura

$$q = b(z-\delta)(z-\theta\delta)(z-\theta^2\delta)\ldots.(z-\theta^{2\mu-1}\delta).$$

Il suffit donc de connoitre une valeur de δ. Or une telle valeur est $\frac{1}{\sqrt{(\mp c)}}$. En effet puisqu'on doit avoir $y=\frac{1}{0}$, et remarquant que

$$y = \frac{a'}{b}\cdot\frac{1}{x+\theta x+\theta^2 x+\ldots.+\theta^{2\mu-1}x},$$

on aura

$$r = x+\theta x+\theta^2 x+\ldots.+\theta^{2\mu-1}x = 0.$$

Soit pour une valeur quelconque de x:

$$p_m = \theta^m x+\theta^{2\mu-m}x+\theta^{\mu+m}x+\theta^{3\mu-m}x,$$

on aura évidemment, en remarquant que $\theta^{2\mu}x=x$:

$$p_0+p_1+p_2+\ldots.+p_{2\mu-1} = 4.r.$$

Or je dis que si l'on fait

$$x = \frac{1}{\sqrt{(\mp c)}},$$

on aura:

$$p_m = 0,$$

pour une valeur quelconque m. En effet on a d'abord:

$$\theta^m.x+\theta^{2\mu-m}x = \frac{2x.\triangle e_m}{1-c^2e_m^2x^2},$$

donc en mettant $\theta^\mu x$ au lieu de x, et remarquant que $\theta^\mu x=\pm\frac{1}{cx}$:

$$\theta^{m+\mu}x+\theta^{3\mu-m}x = \frac{\mp 2.\triangle e_m}{cx(1-e_m^2x^{-2})}.$$

En faisant maintenant

$$x = \frac{1}{\sqrt{(\mp c)}},$$

on aura:

$$\theta^m x+\theta^{2\mu-m}x = \frac{2\triangle e_m}{\sqrt{(\mp c)}.\{1\pm c.e_m^2\}} = -(\theta^{m+\mu}x+\theta^{3\mu-m}x),$$

donc en effet:

$$p_m = 0.$$

On pourra donc faire

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{(\mp c)}}.$$

En remarquant que $q'=1$, pour $x=0$, on aura, en mettant dans l'expression de q, x au lieu de z:

$$q' = \left(1-\frac{x}{\delta}\right)\left(1-\frac{x}{\theta\delta}\right)\left(1-\frac{x}{\theta^2\delta}\right)\ldots.\left(1-\frac{x}{\theta^{2\mu-1}\delta}\right).$$

D'après ce qui précède on pourra énoncer ce théorème:

Théorème XI. „Soit e une racine quelconque de l'équation $e_\mu = \frac{1}{0}$, mais qui ne satisfait pas en même tems à deux équations de la forme $e_m = 0$, $\triangle e_m = 1$, où m est facteur de 2μ. Cela posé, si l'on détermine les trois quantités y, c', ε en vertu des formules:

$$162.\quad \begin{cases} \pm\frac{\varepsilon}{c}\cdot\frac{1}{y} = x \pm \frac{1}{cx} + \frac{2\triangle e\,.\,x}{1-c^2e^2x^2} + \frac{2\triangle e_2\,.\,x}{1-c^2e_2^2x^2} + \ldots + \frac{2\triangle e_\mu\,.\,x}{1-c^2e_\mu^2x^2} \\ \pm\varepsilon = c\left\{1 \pm \frac{1}{c} + \frac{2\triangle e}{1-c^2e^2} + \frac{2\triangle e_2}{1-c^2e_2^2} + \ldots + \frac{2\triangle e_\mu}{1-c^2e_\mu^2}\right\} \\ \text{on aura toujours:} \\ \qquad \frac{\partial y}{\sqrt{[(1-y^2)(1-c'^2y^2)]}} = \frac{\varepsilon\,.\,\partial x}{\sqrt{[(1-x^2)(1-c^2x^2)]}}. \end{cases}$$

Le cas le plus simple de cette formule est celui où $\mu = 1$. On aura:

$$163.\quad \begin{cases} \varepsilon = \pm c\left(1 \pm \frac{1}{c}\right) = 1 \pm c, \\ y = (1 \pm c)\frac{x}{1 \pm cx^2}, \quad c' = \frac{\sqrt{\pm c}}{1 \pm c}, \\ \frac{\partial y}{\sqrt{[(1-y^2)(1-c'^2y^2)]}} = (1 \pm c)\cdot\frac{\partial x}{\sqrt{[(1-x^2)(1-c^2x^2)]}}. \end{cases}$$

Après avoir déterminé en vertu du théorème précédent un système de valeurs pour y, c', ε, on aura cinq autres solutions à l'aide des formules du premier paragraphe de ce chapitre.

B. Si $e_\mu = 0$.

Si $e_\mu = 0$, le radical $\triangle e_\mu$ ne pourra avoir que l'une des deux valeurs $+1$ ou -1; mais il faut ici supposer $\triangle e_\mu = -1$, car si l'on avoit en même tems $e_\mu = 0$, $\triangle e_\mu = 1$, il en résulteroit $\theta^\mu x = x$, ce qui n'a pas lieu. Mais

$$\theta^\mu x = \frac{x\triangle e_\mu + e_\mu\triangle x}{1-c^2e_\mu^2x^2};$$

cela donne

$$\theta^\mu x = -x,$$

et, en mettant $\theta^m x$ au lieu de x:

$$\theta^{\mu+m}x = -\theta^m x.$$

Les racines de l'équation $y = \psi x$ seront égales dans ce cas deux à deux, mais de signe contraire, et parconséquent ψx sera une fonction paire de x. En faisant

$$\psi z = \frac{p}{q},$$

on aura:

$$164.\quad p - qy = (a-by)(z^2-x^2)[z^2-(\theta x)^2][z^2-(\theta^2 x)^2]\ldots[z^2-(\theta^{\mu-1}x)^2].$$

Si l'on fait $z = 0$, et qu'on désigne les valeurs correspondantes de p et q par a' et b', on aura:

$$a' - b'y = \pm(a - by)(x.\theta x.\theta^2 x.... \theta^{\mu-1}x)^2.$$

Cela donne pour y une expression rationnelle du degré 2μ. Comme dans les deux premiers cas on démontrera aisément qu'il sera toujours possible de déterminer les constantes a, b, a', b' de la sorte que l'équation:

$$\frac{\partial y}{\Delta' y} = \varepsilon.\frac{\partial x}{\Delta x}$$

sera satisfaite, en attribuant au module c' et au coëfficient ε des valeurs convenables. Je vais considérer seulement le cas le plus simple, où $\mu = 1$. On aura dans ce cas

$$a' - b'y = (-a + by)x^2$$

et par suite:

$$y = \frac{a' + ax^2}{b' + bx^2}.$$

En mettant cette valeur dans l'équation:

$$\frac{\partial y}{\Delta' y} = \varepsilon.\frac{\partial x}{\Delta x},$$

on trouvera facilement une solution, savoir:

$$165.\quad y = \frac{1+cx^2}{1-cx^2},\quad c' = \frac{1-c}{1+c},\quad \varepsilon = (1+c)\sqrt{-1}.$$

Connoissant ainsi une solution, on en déduira, en vertu des formules du premier paragraphe, les cinq autres, de sorte que l'équation

$$\frac{\partial y}{\Delta' y} = \varepsilon.\frac{\partial x}{\Delta x}$$

pourra être satisfaite des six manières suivantes:

$$c' = \frac{1 \pm c}{1 \mp c},\quad \frac{1 \pm \sqrt{(1-c^2)}}{1 \mp \sqrt{(1-c^2)}},\quad \frac{c \pm \sqrt{(c^2-1)}}{c \mp \sqrt{(c^2-1)}}.$$

§. 7.

Réduction du problème général au cas où le degré de la fonction rationnelle y est un nombre premier.

Soit maintenant $y = \psi x$ une fonction rationnelle quelconque qui satisfait à l'équation differentielle:

$$\frac{\partial y}{\Delta y} = \varepsilon.\frac{\partial x}{\Delta x}.$$

Comme on a vu dans le paragraphe 3., l'équation

$$y = \psi x$$

aura toujours n racines de la forme:

$$177.\quad x,\ \theta x,\ \theta^2 x,\ \ldots.\ \theta^{n-1}x,\ \text{où}\ \theta^n x = x.$$

Cela posé, désignons par x' une nouvelle racine, différente de celles-ci, en sorte que:

$$\psi x' = \psi x = y.$$

On a

$$\psi(\theta^m x) = \psi x,$$

donc aussi

$$\psi(\theta^m x') = \psi x' = y.$$

Il suit de là que les n quantités

$$178. \quad x',\ \theta x',\ \theta^2 x',\ \ldots\ \theta^{n-1} x'$$

qui sont différentes entre elles, seront racines de l'équation dont il s'agit. Or toutes ces n racines seront différentes des racines (177.). En effet si l'on avoit $\theta^n x' = \theta^\mu x$, il en résulteroit:

$$\theta^{n-m}\theta^m x' = \theta^{n-m+\mu} x,$$

c'est-à-dire:

$$x' = \theta^{n-m+\mu} x,$$

ce qui est contre l'hypothèse. Le degré μ de l'équation $y = \psi x$ est donc égal à $2n$, ou plus grand que ce nombre. Dans le dernier cas, si l'on désigne par x'' une racine différente des $2n$ racines précédentes, on aura en même tems celles-ci:

$$x'',\ \theta x'',\ \theta^2 x''\ \ldots\ \theta^{n-1} x'',$$

qui seront différentes entre elles et des racines (177. 178.). Donc μ sera égal à $3n$ ou plus grand que ce nombre. En continuant jusqu'à ce qu'on ait épuisé toutes les racines, on voit que μ doit être un multiple de n, et si l'on fait en conséquence:

$$\mu = m.n,$$

les μ racines se rangeront en m groupes, de n termes chacun, savoir:

$$179. \quad \begin{cases} x,\ \theta x,\ \theta^2 x\ \ldots\ \theta^{n-1} x, \\ x',\ \theta x',\ \theta^2 x'\ \ldots\ \theta^{n-1} x', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x^{(m-1)},\ \theta x^{(m-1)},\ \theta^2 x^{(m-1)}\ \ldots\ \theta^{n-1} x^{(m-1)}. \end{cases}$$

Cela posé, soit

$$\psi z = \frac{p}{q},$$

où p et q sont des fonctions entières de z, sans diviseur commun. On aura:

$$180. \quad p - qy = (a - by).(z-x)(z-\theta x)(z-\theta^2 x)\ldots(z-\theta^{n-1}x) \times (z-x')(z-\theta x')(z-\theta^2 x')\ldots(z-\theta^{n-1}x') \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \times (z-x^{(m-1)})(z-\theta x^{(m-1)})(z-\theta^2 x^{(m-1)})\ldots(z-\theta^{n-1}x^{(m-1)}),$$

et d'après ce qui a été exposé dans le paragraphe précédent, on pourra trouver une fonction rationnelle: $y_1 = \psi_1(x)$, telle que les racines de l'équation

$$y_1 = \psi_1 x$$

soient égales a ces n quantités:

$$x,\ \theta x,\ \theta^2 x,\ \ldots\ \theta^{n-1} x,$$

et que y satisfasse à une équation différentielle de la forme:

$$181.\quad \frac{\partial y_1}{\sqrt{[(1-y_1^2)(1-c_1^2 y_1^2)]}} = \varepsilon_1 \cdot \frac{\partial x}{\sqrt{[(1-x^2)(1-c^2 x^2)]}}.$$

Faisons

$$\psi_1 z = \frac{p'}{q'},$$

où p' et q' sont des fonctions entières du degré n. On aura:

$$182.\quad p' - q' y_1 = (a - b' y_1)(z-x)(z-\theta x)\ldots(z-\theta^{n-1}x),$$

où a' et b' sont des constantes.

En y mettant au lieu de x successivement les m valeurs:

$$x,\ x',\ x'',\ \ldots\ x^{(m-1)}$$

et puis multipliant entre elles les équations qui en résultent, on trouvera, en ayant égard à l'équation (180.):

$$183.\quad \frac{p-qy}{a-by} = \frac{p'-q'y_1}{a'-b'y_1}\cdot\frac{p'-q'y_2}{a'-b'y_2}\cdot\ldots\cdot\frac{p'-q'y_m}{a'-b'y_m},$$

où

$$y_2,\ y_3,\ \ldots\ y_m$$

sont les valeurs de la fonction y_1, qui répondent aux valeurs

$$x',\ x'',\ \ldots\ x^{(m-1)}$$

de x.

Puis, attribuant à x deux valeurs particulières α, β, telles que

$$\psi\alpha = 0,\quad \psi\beta = \tfrac{1}{0},$$

et désignant par

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots\ \alpha_m,\ \beta_1,\ \beta_2,\ \ldots\ \beta_m$$

les valeurs de $y_1, y_2, \ldots y_m$, respectivement correspondantes aux valeurs α et β de x, l'équation ci-dessus donnera:

$$184.\quad \begin{cases} p = A'(p'-\alpha_1 q')(p'-\alpha_2 q')\ldots(p'-\alpha_m q'), \\ q = A''(p'-\beta_1 q')(p'-\beta_2 q')\ldots(p'-\beta_m q'), \end{cases}$$

où A' et A'' sont deux constantes. En divisant p par q, on voit que $\frac{p}{q} = \psi z$ sera fonction rationnelle de $\frac{p'}{q'} = \psi_1 z$. En mettant x au lieu de z, on aura

$$\frac{p}{q} = y,\quad \frac{p'}{q'} = y_1,$$

donc:

$$185.\quad y = A.\frac{(y_1-\alpha_1)(y_1-\alpha_2)(y_1-\alpha_3)\ldots.(y_1-\alpha_m)}{(y_1-\beta_1)(y_1-\beta_2)(y_1-\beta_3)\ldots.(y_1-\beta_m)},$$

où $A = \frac{A'}{A''}$ est constant.

On voit donc que y pourra être exprimé par une fonction rationnelle de y_1 du degré m.

En combinant maintenant l'équation (182.) avec celle-ci:

$$\frac{\partial y}{\Delta' y} = \varepsilon.\frac{\partial x}{\Delta x},$$

qui doit avoir lieu, on aura:

$$186.\quad \frac{\partial y}{\sqrt{[(1-y^2)(1-c'^2y^2)]}} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}.\frac{\partial y_1}{\sqrt{[(1-y_1^2)(1-c_1^2y_1^2)]}};$$

donc la fonction y, rationnelle en y_1 et du degré m, doit satisfaire à cette équation. Réciproquement, si cette équation a lieu, l'équation

$$\frac{\partial y}{\Delta' y} = \varepsilon.\frac{\partial x}{\Delta x}$$

subsistera également, car la fonction y_1 est déterminée en x de la manière à satisfaire à la formule (182.). Ainsi le problème général est réduit à satisfaire de la manière la plus générale à l'équation (186.). Or ce problème est précisément le même que celui que nous traitons actuellement; seulement le degré de la fonction y en y_1 sera m, au lieu que y, comme fonction de x, est du degré $m.n$, qui est plus grand que m. On pourra donc appliquer à l'équation (186.) le même procédé dont on s'est servi pour l'équation $\frac{\partial y}{\Delta y} = \varepsilon.\frac{\partial x}{\Delta x}$, et il est évident qu'on parviendra ainsi à l'expression générale de y, car les degrés des fonctions successives vont toujours en décroissant.

Supposons maintenant que le degré μ de la fonction y en x est un nombre premier. Puisque $\mu = m.n$, on a nécessairement $m = 1$, $\mu = n$. Par suite:

$$y = A.\frac{y_1-\alpha_1}{y_1-\beta_1}.$$

On connoit l'expression de y_1 en x par les formules du paragraphe précédent. En substituant l'expression de y en y_1 dans l'équation (186.), on trouvera à l'aide des formules du premier paragraphe toutes les solutions possibles.

En vertu de ce qui précède on pourra donc énoncer le théorème suivant:

Théorème XII. Soit y une fonction rationnelle de x d'un degré quelconque μ, qui satisfait à l'équation différentielle:

$$\frac{\partial y}{\sqrt{[(1-y^2)(1-c'^2y^2)]}} = \varepsilon \cdot \frac{\partial x}{\sqrt{[(1-x^2)(1-c^2x^2)]}}.$$

On pourra toujours décomposer μ en deux facteurs n et m, dont l'un n est un nombre premier, tels qu'on ait:

$$\frac{\partial y_1}{\sqrt{[(1-y_1^2)(1-c_1^2y_1^2)]}} = \varepsilon_1 \cdot \frac{\partial x}{\sqrt{[(1-x^2)(1-c^2x^2)]}}$$

et

$$\frac{\partial y}{\sqrt{[(1-y^2)(1-c'^2y^2)]}} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} \cdot \frac{\partial y_1}{\sqrt{[(1-y_1^2)(1-c_1^2y_1^2)]}},$$

où y est une fonction rationnelle de y_1 du degré m, et y_1 une fonction rationnelle de x du degré n.

Si donc on désigne par n, n_1, n_2, ... n_ν des nombres premiers dont le produit est μ, et qu'on fait, pour abréger:

$$\Delta(x,c) = \sqrt{[(1-x^2)(1-c^2x^2)]},$$

on pourra faire:

$$\frac{\partial y}{\Delta(y,c')} = \varepsilon_\nu \cdot \frac{\partial y_\nu}{\Delta(y_\nu,c_\nu)} = \varepsilon_{\nu-1} \cdot \frac{\partial y_{\nu-1}}{\Delta(y_{\nu-1},c_{\nu-1})} = \ldots = \varepsilon_1 \cdot \frac{\partial y_1}{\Delta(y_1,c_1)} = \varepsilon \cdot \frac{\partial x}{\Delta x},$$

où y_1 est une fonction rationnelle de x du degré n,

- y_2 - - - - - - - - y_1 - - n_1,
- y_3 - - - - - - - - y_2 - - n_2,

. . . . . .

- y_ν - - - - - - - - $y_{\nu-1}$ - - $n_{\nu-1}$,
- y - - - - - - - - y_ν - - n_ν.

En vertu de ce théorème la solution du problème général sera donc ramenée au cas où le degré de la fonction y est un nombre premier. On trouvera toutes les solutions qui répondent à ce cas par les formules du paragraphe précédent, et la résolution du problème que nous nous sommes proposé au commencement de ce chapitre pourra être regardé comme résolu.

§. 8.

Sur la forme de la fonction y.

Désignons par x, x', x'' . . . . $x^{(\mu-1)}$ les racines de l'équation

$$y = \psi x.$$

Si l'on fait $\psi z = \frac{p}{q}$, où p et q sont des fonctions entières de z, on aura:

187. $$p - qy = (a - by)(z-x)(z-x')(z-x'')\ldots(z-x^{(\mu-1)}),$$

où a et b sont des constantes. Cela posé, soit α une racine de l'équation

$y = 0$, on aura en faisant $x = \alpha$:

$$188. \quad p = a(z-\alpha)(z-\alpha')(z-\alpha'')\ldots.(z-\alpha^{(\mu-1)}).$$

Soit également β une racine de l'équation $y = \frac{1}{0}$. Cela donnera, en faisant $x = \beta$, et après avoir divisé les deux membres de l'équation (187.) par y:

$$189. \quad q = b(z-\beta)(z-\beta')(z-\beta'')\ldots.(z-\beta^{(\mu-1)}).$$

Ces valeurs de p et q donneront, en mettant x au lieu de z:

$$190. \quad y = A.\frac{(x-\alpha)(x-\alpha')\ldots.(x-\alpha^{(\mu-1)})}{(x-\beta)(x-\beta')\ldots.(x-\beta^{(\mu-1)})},$$

où A est un coëfficient constant, qu'on trouvera en remarquant que si l'on fait $x = 1$, y doit avoir une des valeurs ± 1, $\pm\frac{1}{c'}$.

Mais il y a deux cas: savoir, il pourra arriver que l'une ou l'autre des deux quantités a et b soit égale à zéro, et dans ce cas l'une des racines des équations $y = 0$, $y = \frac{1}{0}$ sera zéro ou infini.

Cas I. Si $b = 0$.

On aura dans ce cas

$$191. \quad p - qy = a(z-x)(z-x')\ldots.(z-x^{(\mu-1)}),$$

et p sera du degré μ, et q seulement du degré $\mu-1$. En égalant le coëfficient de $z^{\mu-1}$ dans les deux membres, on aura:

$$192. \quad a' - b'y = -a(x+x'+x''+\ldots.+x^{(\mu-1)}),$$

où a' et b' sont des constantes. Maintenant si

$$x' = \frac{x\triangle e + e\triangle x}{1-c^2e^2x^2}$$

est une racine de $y = \psi x$, la quantité

$$\frac{x\triangle e - e\triangle x}{1-c^2e^2x^2}$$

le sera également; donc si ces deux quantités sont différentes entre-elles pour toutes les valeurs de e, μ sera un nombre impair, et en faisant $\mu = 2n+1$, on aura:

$$193. \quad a' - b'y = -a\left\{\frac{2x\triangle e_1}{1-c^2e_1^2x^2} + \frac{2x\triangle e_2}{1-c^2e_2^2x^2} + \ldots. + \frac{2x\triangle e_n}{1-c^2e_n^2x^2} + x\right\}.$$

Maintenant si l'on fait $x = \pm 1$, $\pm\frac{1}{c}$, on aura $y = \pm 1$, $y = \pm\frac{1}{c'}$, d'où il est facile de conclure que a' sera égal à zéro. Donc y sera une fonction impaire de x, et de la forme:

$$194. \quad y = A.x.\left\{1 + \frac{2\triangle e_1}{1-c^2e_1^2x^2} + \ldots. + \frac{2\triangle e_n}{1-c^2e_n^2x^2}\right\}.$$

Cela fait voir que

$$q = (1 - c^2 e_1^2 z^2) \ldots . (1 - c^2 e_n^2 z^2).$$

Pour avoir p, il suffit de faire dans l'équation (191.) $x = 0$, et cela donne

$$p = a z (z^2 - e_1^2) \ldots . (z^2 - e_n^2),$$

donc on aura:

$$195. \quad y = a . \frac{x (e_1^2 - x^2)(e_2^2 - x^2) \ldots . (e_n^2 - x^2)}{(1 - c^2 e_1^2 x^2)(1 - c^2 e_2^2 x^2) \ldots . (1 - c^2 e_n^2 x^2)}.$$

Telle est donc la forme de la fonction y dans le cas où le degré de son numérateur est impair et plus grand que celui du dénominateur.

Si pour quelque valeur de e les deux quantités

$$\frac{x \triangle e + e \triangle x}{1 - c^2 e^2 \triangle x}, \quad \frac{x \triangle e - e \triangle x}{1 - c^2 e^2 x^2}$$

étoient égales, on auroit:

$$e = 0, \quad \text{ou} \quad e = \tfrac{1}{0}.$$

Soit d'abord $e = \frac{1}{0}$, on aura $x' = \pm \frac{1}{cx}$, et par suite le second membre de l'équation (192.) seroit une fonction impaire de x, dont le degré seroit un nombre pair. On trouve seulement que cela donne $a' = 0$; donc en faisant $\mu = 2n$:

$$196. \quad y = A . \left\{ x \pm \frac{1}{cx} + \frac{2x \triangle e_1}{1 - c^2 e_1^2 x^2} + \ldots . + \frac{2x \triangle e_{n-1}}{1 - c^2 e_{n-1}^2 x^2} \right\},$$

et par suite y sera exprimé en factorielle comme il suit:

$$197. \quad y = \frac{a (1 - \delta_1^2 x^2)(1 - \delta_2^2 x^2) \ldots . (1 - \delta_n^2 x^2)}{x (1 - c^2 e_1^2 x^2)(1 - c^2 e_2^2 x^2) \ldots . (1 - c^2 e_{n-1}^2 x^2)},$$

Si au contraire $e = 0$, on aura en même tems:

$$x' = -x.$$

Donc dans ce cas y sera une fonction paire de x. Mais le degré du numérateur doit être le même que celui du dénominateur, comme il est facile de voir; donc l'expression (197.) appartient à y toutes les fois que le degré du numérateur est un nombre pair et en même tems plus grand que celui du dénominateur.

Cas II. Si $a = 0$.

On aura:

$$p - qy = + b (x - z)(x' - z) \ldots . (x^{(\mu-1)} - z).$$

En raisonnant comme ci-dessus on trouvera aisément que dans le cas où μ est un nombre impair, y sera une fonction impaire de x de la forme:

$$198. \quad y = a . \frac{(1 - c^2 e_1^2 x^2)(1 - c^2 e_2^2 x^2) \ldots . (1 - c^2 e_n^2 x^2)}{x (e_1^2 - x^2)(e_2^2 - x^2) \ldots . (e_n^2 - x^2)}.$$

Si μ est pair, y sera une fonction impaire de x de la forme:

$$199.\quad y = a.\frac{x(1-c^2e_1^2x^2)\ldots.(1-c^2e_{n-1}^2x^2)}{(1-\delta_1^2x^2)\ldots.(1-\delta_n^2x^2)}.$$

§. 9.

De la fonction $x_{2\mu+1}$.

Nous avons vu chapitre I. paragraphe 4. qu'à l'équation différentielle

$$\frac{\partial y}{\triangle y} = (2\mu+1).\frac{\partial x}{\triangle x}$$

on peut satisfaire, en mettant au lieu de y une fonction impaire de x du degré $2\mu=1$; qui s'évanouit avec x. En la désignant comme nous l'avons fait à l'endroit cité par $x_{2\mu+1}$, et faisant pour abréger $(2\mu+1)^2-1=2n$, cette fonction, en vertu de ce que nous venons de voir dans le paragraphe précédent, doit avoir la forme suivante:

$$200.\quad x_{2\mu+1} = a.\frac{x(e_1^2-x^2)(e_2^2-x^2)\ldots.(e_n^2-x^2)}{(1-c^2e_1^2x^2)(1-c^2e_2^2x^2)\ldots.(1-c^2e_n^2x^2)},$$

et on aura en même tems:

$$201.\quad x_{2\mu+1} = A.\left\{x+\frac{2\triangle e_1.x}{1-c^2e_1^2x^2}+\frac{2\triangle e_2.x}{1-c^2e_2^2x^2}+\ldots.+\frac{2\triangle e_n.x}{1-c^2e_n^2x^2}\right\}.$$

Pour déterminer les coëfficiens a et A, faisons $x=\frac{1}{0}$. On trouvera:

$$A.c^{2n}.e_1^2.e_2^2\ldots.e_n^2 = a.$$

Si l'on suppose x infiniment petit, la première formule donne:

$$x_{2\mu+1} = a.e_1^2.e_2^2\ldots.e_n^2.x,$$

mais l'équation différentielle donne dans ce cas:

$$x_{2\mu+1} = (2\mu+1)x,$$

par suite:

$$a.e_1^2.e_2^2\ldots.e_n^2 = 2\mu+1.$$

Si l'on suppose x infiniment grand, la seconde expression de $x_{2\mu+1}$ donne $x_{2\mu+1}=A.x$, mais dans le même cas l'équation différentielle donne:

$$\frac{\partial x_{2\mu+1}}{c.x_{2\mu+1}^2} = \frac{\partial x}{cAx^2} = (2\mu+1).\frac{\partial x}{c.x^2},$$

donc:

$$202.\quad A = \frac{1}{2\mu+1}.$$

Connoissant A, on aura:

$$203.\quad e_1^2.e_2^2\ldots.e_n^2 = \frac{2\mu+1}{c^n};\quad a = c^n = c^{2\mu^2+2\mu}.$$

Les quantités e_1, e_2, ... e_n ont entre elles des relations remarquables que nous allons développer.

Considérons l'équation

$$x_{2\mu+1} = y.$$

Les racines de cette équation seront les $(2\mu+1)^2$ quantités suivantes:

$$x,\quad \frac{x\triangle e_1 \pm e_1\triangle x}{1-c^2e_1^2x^2},\quad \frac{x\triangle e_2 \pm e_2\triangle x}{1-c^2e_2^2x^2},\quad \ldots.\quad \frac{x\triangle e_n \pm e_n\triangle x}{1-c^2e_n^2x^2}.$$

Soit $\theta x = \frac{x\triangle e + e\triangle x}{1-c^2e^2x^2}$ une quelconque de ces racines, les $2\mu+1$ quantités:

$$x,\ \theta x,\ \theta^2 x\ \ldots.\ \theta^{2\mu}x$$

seront encore des racines et en même tems différentes entre elles, en prenant pour e une quantité qui n'est pas racine d'une équation

$$x_{2m+1} = 0,$$

où $2m+1$ est facteur de $2\mu+1$. Soit

$$\theta_1 x = \frac{x\triangle e' + e'\triangle x}{1-c^2e'^2x^2}$$

une autre racine, on aura encore les racines suivantes:

$$\theta_1 x,\quad \theta_1^2 x,\quad \ldots.\quad \theta_1^{2\mu}x,$$

qui seront différentes entre elles.

Cela posé, faisons

$$x_{2\mu+1} = \psi x;$$

on aura en général:

$$\psi(\theta^m x) = \psi(\theta_1^k x),$$

quels que soient les nombres entiers m et k. En mettant $\theta^m x$ au lieu de x, on aura:

$$\psi(\theta_1^k\theta^m x = \psi(\theta^{2m}x) = x_{2\mu+1};$$

donc toute quantité de la forme

$$\theta_1^k\theta^m x$$

sera racine de l'équation $y=\psi x$. Je dis maintenant que si l'on attribue à k et m toutes les valeurs entières possibles, moindres que $2\mu+1$, les valeurs qui en résultent pour la fonction $\theta_1^k\theta^m x$, seront toutes différentes entre elles. En effet, si l'on avoit

$$\theta_1^k\theta^m x = \theta_1^{k'}\theta^{m'}x,$$

il en résulteroit, en mettant $\theta^{2\mu+1-m'}x$ au lieu de x, et remarquant que $\theta^{2\mu+1}x = x$:

$$\theta_1^k\theta^{n'}x = \theta_1^{k'}x,$$

où $n' = m+2\mu+1-m'$.

Cela donne:

$$\theta_1^{2\mu+1-k}\theta_1^k\theta^{n'}x = \theta_1^{k''}x,$$

où $k'' = 2\mu+1-k+k'$, c'est-à-dire:

$$\theta^{n'}x = \theta_1^{k''}x,$$

et de là:

$$\theta^{n'\mu'}x = \theta_1^{k''\mu'}x.$$

Maintenant, puisque $2\mu+1$ est un nombre premier, on pourra faire

$$k''\mu' = (2\mu+1)\beta+1,$$

donc:

$$\theta_1^{(2\mu+1)\beta}\theta_1 x = \theta_1 x = \theta^{n'\mu'}x,$$

c'est-à-dire $\theta_1 x$ serait une des quantités:

$$x,\ \theta x,\ \ldots\ \theta^{2\mu}x,$$

et cela est contre l'ypothèse.

L'expression $\theta_1^k\theta^m x$ a donc un nombre $(2\mu+1)^2$ de valeurs différentes et par conséquent ces valeurs seront les racines de l'équation

$$x_{2\mu+1} = y.$$

Soit maintenant

$$x' = \theta_1^k x,\ x'' = \theta_1^k\theta^m x,\ x''' = \theta^m x.$$

On aura, en regardant e et e' comme variables:

$$\frac{\partial x'}{\triangle x'} = \frac{\partial x}{\triangle x} + k.\frac{\partial e'}{\triangle e'},$$

$$\frac{\partial x'''}{\triangle x'''} = \frac{\partial x}{\triangle x} + m.\frac{\partial e}{\triangle e}.$$

En mettant dans la première formule x''' au lieu de x, x' se changera en x'', donc:

$$\frac{\partial x''}{\triangle x''} = \frac{\partial x'''}{\triangle x'''} + k\frac{\partial e'}{\triangle e'},$$

donc:

$$\frac{\partial x''}{\triangle x''} = \frac{\partial x}{\triangle x} + k\frac{\partial e'}{\triangle e'} + m.\frac{\partial e}{\triangle e},$$

et si l'on fait

$$k\frac{\partial e'}{\triangle e'} = \frac{\partial e'_k}{\triangle e'_k},\quad m\frac{\partial e}{\triangle e} = \frac{\partial e_m}{\triangle e_m}:$$

$$\frac{\partial x''}{\triangle x''} = \frac{\partial x}{\triangle x} + \frac{\partial e'_k}{\triangle e'_k} + \frac{\partial e_m}{\triangle e_m}.$$

Si donc on fait:

$$204.\quad e_{m,k} = \frac{e_m\triangle e'_k + e'_k\triangle e_m}{1-c^2e_m^2e_k'^2},$$

on aura:

$$\frac{\partial x''}{\triangle x''} = \frac{\partial x}{\triangle x} + \frac{\partial e_{m,k}}{\triangle e_{m,k}},$$

et de là, en supposant que e_m et e'_k, s'évanouissent avec e:

$$205.\quad x'' = \frac{x\triangle e_{m,k} + e_{m,k}.\triangle x}{1-c^2e_{m,k}^2x^2} = \theta_1^k\theta^m x.$$

Toutes les racines de l'équation $y = x_{2\mu+1}$, pourront donc être exprimées par cette même formule.

Donc pour trouver toutes les racines, il suffit d'avoir la valeur des deux quantités e et e', qui sont deux racines de l'équation

$$x_{2\mu+1} = 0.$$

Toutes les racines de cette équation

$$x_{2\mu+1} = 0,$$

qui, par ce qui précède, sont les $(2\mu+1)^2$ quantités suivantes

$$0,\ \pm e_1,\ \pm e_2,\ \ldots\ \pm e_n$$

sont donc exprimées par la formule

$$e_{m,k},$$

en donnant à m et k toutes les valeurs moindres que $2\mu+1$. Il est facile de voir qu'on pourra exprimer $e_{m,k}$ en fonction rationnelle des deux quantités e, e', donc on voit que toutes les racines de l'équation $x_{2\mu+1} = 0$, pourront s'exprimer rationnellement par deux entre elles et par le module c.

Si l'on veut exprimer $x_{2\mu+1}$ à l'aide des fonctions $\theta_1 x$ et θx, on pourra faire cela d'une manière fort simple. En effet, en remarquant que le dernier terme d'une équation est le produit de toutes ses racines, on aura sur le champ:

$$\begin{aligned} 206.\quad x_{2\mu+1} = c^{2\mu^2+2\mu} \pm \mu . x . \theta x . \theta^2 x \ldots . \theta^{2\mu} x \\ \times \theta_1 x . \theta_1 \theta x . \theta_1 \theta^2 x \ldots . \theta_1 \theta^{2\mu} x \\ \times \theta_1^2 x . \theta_1^2 \theta x . \theta_1^2 \theta^2 x \ldots . \theta_1^2 \theta^{2\mu} x \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \times \theta_1^{2\mu} x . \theta_1^{2\mu} \theta x . \theta_1^{2\mu} \theta^2 x \ldots . \theta_1^{2\mu} \theta^{2\mu} x. \end{aligned}$$

On a aussi:

$$207.\quad x_{2\mu+1} = \frac{1}{2\mu+1} \cdot \sum_{0}^{2\mu}{}_m \sum_{0}^{2\mu}{}_n (\theta_1^m \theta^n x).$$

§. 10.

De l'équation $x_{2\mu+1} = 0$.

D'après ce qui précède les racines de l'équation $x_{2\mu+1} = 0$ sont exprimées par $e_{m,k}$ en donnant à m et k toutes les valeurs possibles moindres que $2\mu+1$. Une de ces valeurs est zéro, savoir $e_{0,0}$.

En divisant le numérateur de la fraction $x_{2\mu+1}$ par x, on aura, en égalant le quotient à zéro, une équation:

$$208.\quad P = 0,$$

du degré $4\mu^2+4\mu$. Je dis que cette équation peut être résolue à l'aide d'équations du degré $2\mu+2$ et du degré 2μ.

Soit p une fonction quelconque symétrique et rationnelle des quantités $e_1, e_2, \ldots . e_{2\mu}$. En mettant au lieu de $e_2, e_3, \ldots . e_{2\mu}$ leurs expressions en fonctions rationnelles de e_1, p deviendra une fonction rationnelle de cette racine. Faisons:

$$209. \quad p = \varphi e_1,$$

on aura évidemment:

$$210. \quad \varphi e_1 = \varphi e_2 = \varphi e_3 = \ldots . . = \varphi e_{2\mu},$$

équations qui auront lieu quelle que soit la racine e. Cela posé, mettons $e_{m,1}$ au lieu de e, il est clair que

$$e_2, \quad e_3, \quad \ldots . \quad e_{2\mu}$$

se changeront respectivement en:

$$e_{2m,2}, \quad e_{3m,3}, \quad \ldots . \quad e_{2\mu m,2\mu}.$$

Donc on aura:

$$210'. \quad \varphi e_{m,1} = \varphi e_{2m,2} = \ldots . = \varphi e_{2\mu m,2\mu}.$$

Formons l'équation:

$$211. \quad \begin{cases} \{p-\varphi e_1\}\{p-\varphi e_{0,1}\}\{p-\varphi e_{1,1}\}\{p-\varphi e_{2,1}\}\ldots .\{p-\varphi e_{2\mu,1}\} \\ = p^{2\mu+2} - q_{2\mu+1}.p^{2\mu+1} + q_{2\mu}.p^{2\mu} - \ldots . - q_1 p + q_0 = 0, \end{cases}$$

$q_0, q_1, \ldots . q_{2\mu+1}$ seront des fonctions symétriques et rationnelles de $\varphi e_1, \varphi e_{0,1}, \ldots . \varphi e_{2\mu,1}$. Or on pourra les exprimer rationnellement en c.

En effet il suffit d'avoir la valeur de:

$$212. \quad \{\varphi e_1\}^k + \{\varphi e_{0,1}\}^k + \ldots . + \{\varphi e_{2\mu,1}\}^k = \varrho_k.$$

En vertu des équations (210., 210'.) cette quantité pourra s'écrire comme il suit:

$$\begin{aligned} 2\mu.\varrho_k = {} & (\varphi e_1)^k + (\varphi e_2)^k + (\varphi e_3)^k + \ldots . + (\varphi e_{2\mu})^k \\ & + (\varphi e_{0,1})^k + (\varphi e_{0,2})^k + (\varphi e_{0,3})^k + \ldots . + (\varphi e_{0,2\mu})^k \\ & + (\varphi e_{1,1})^k + (\varphi e_{2,2})^k + (\varphi e_{3,3})^k + \ldots . + (\varphi e_{2\mu,2\mu})^k \\ & . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ & + (\varphi e_{2\mu,1})^k + (\varphi e_{4\mu,2})^k + (\varphi e_{6\mu,3})^k + \ldots . + (\varphi e_{4\mu\mu,2\mu})^k. \end{aligned}$$

Or le second membre de cette équation est une fonction rationnelle et symétrique des racines de l'équation $P = 0$; donc on pourra exprimer ϱ_k rationnellement par les coëfficiens de cette équation, c'est-à-dire par c.

On voit donc que les coëfficiens de l'équation (211.), $q_0, q_1, q_2, \ldots .$ seront des fonctions rationnelles en c. Donc une fonction symétrique quelconque des racines:

$$e_1, \quad e_2, \quad e_3, \quad \ldots . \quad e_{2\mu}$$

pourra être déterminée par le module c, à l'aide d'une équation du degré $2\mu+2$. Cela posé, faisons:

$$213.\quad (e-e_1)(e-e_2)\ldots.(e-e_{2\mu}) =$$
$$e^{2\mu}+p_{\mu-1}.e^{2\mu-2}+p_{\mu-2}.e^{2\mu-4}+\ldots.+p_1.e^2+p_0=0.$$

Les coëfficiens p_0, p_1, ... $p_{\mu-1}$ seront des fonctions rationnelles et symétriques de e_1, e_2, ... $e_{2\mu}$; donc, comme nous verrons, on pourra les déterminer à l'aide d'équations du degré $2\mu+2$. Ainsi pour avoir les racines de l'équation $P=0$, il suffira de résoudre des équations du degré 2μ et $2\mu+2$.

Ce qui précède est susceptible d'une application importante. Le module c', exprimé par la formule (156.), est comme on voit une fonction rationnelle et symétrique de e, e_2, e_3, ... $e_{2\mu}$. Donc, en vertu de la propriété démontrée précédemment, on pourra trouver le module c' en c à l'aide d'une équation du degré $2\mu+2$. Cette équation ne paroit guère résoluble algébriquement, excepté lorsque $2\mu+1=3$. Dans ce cas elle sera du quatrième degré.

En appliquant le théorème XII. à l'équation:

$$\frac{\partial x_{2\mu+1}}{\triangle x_{2\mu+1}} = (2\mu+1)\frac{\partial x}{\triangle x},$$

on aura, en remarquant que le degré de la fonction $x_{2\mu+1}$ est $(2\mu+1)^2$, et $2\mu+1$ un nombre premier:

$$\frac{\partial x_{2\mu+1}}{\triangle x_{2\mu+1}} = \frac{2\mu+1}{\varepsilon}.\frac{\partial y}{\triangle' y} = (2\mu+1).\frac{\partial x}{\triangle x},$$

où y est une fonction de x du degré $2\mu+1$, et $x_{2\mu+1}$ une fonction de y du même degré. On aura:

$$y = \frac{c^{\mu+\frac{1}{2}}}{\sqrt{c'}}.\frac{x(e^2-x^2)(e_2^2-x^2)\ldots.(e_\mu^2-x^2)}{(1-c^2e^2x^2)(1-c^2e_2^2x^2)\ldots.(1-c^2e_\mu^2x^2)}$$

et

$$x_{2\mu+1} = \frac{c'^{\mu+\frac{1}{2}}}{\sqrt{c}}.\frac{y(e'^2-y^2)(e_1'^2-y^2)\ldots.(e_\mu'^2-y^2)}{(1-c'^2e'^2y^2)(1-c'^2e_2'^2y^2)\ldots.(1-c'^2e_\mu'^2y^2)},$$

$$c' = c^{2\mu+1}.\left\{\frac{1-e^2}{1-c^2e^2}.\frac{1-e_2^2}{1-c^2e_2^2}\ldots.\frac{1-e_\mu^2}{1-c^2e_\mu^2}\right\}^2,$$

$$c = c'^{2\mu+1}.\left\{\frac{1-c'^2}{1-c'^2e'^2}.\frac{1-e_2'^2}{1-c'^2e_2'^2}\ldots.\frac{1-e_\mu'^2}{1-c'^2e_\mu'^2}\right\}^2,$$

$$\varepsilon = \frac{c^{\mu+\frac{1}{2}}}{\sqrt{c'}}.e^2.e_2^2\ldots.e_\mu^2.$$

e' est déterminé de la même manière en c' que e l'est en c. Donc si l'on change c en c'; c se changera en c'. De là il suit que l'équation entre les modules c' et c doit rester la même si l'on change simultanément c en c' et c' en c.

Puisque c' dépend d'une équation du degré $2\mu+2$, on pourra donner à la fonction y, $2\mu+2$ valeurs différentes.

§. 11.

Des transformations différentes qui répondent à un même degré de la fonction y.

Soit

$$y = \frac{A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_\mu x^\mu}{B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + \ldots + B_\mu x^\mu}$$

et

$$214. \quad \frac{\partial y}{\triangle(y, c')} = \varepsilon . \frac{\partial x}{\triangle(x, c)}.$$

Supposons μ premier et d'abord $\mu = 1$. Dans ce cas le module c', en vertu des formules du paragraphe 2., aura six valeurs différentes et la fonction y en aura douze.

Si $\mu = 2$, on aura toutes les solutions possibles en combinant les deux formules (163., 165.) avec les six formules du paragraphe 2., ce qui en donne 18 valeurs différentes du module c'.

Si l'on fait

$$c_1 = \frac{1-c}{1+c}, \quad c_2 = \frac{2\sqrt{c}}{1+c}, \quad c_3 = \frac{2\sqrt{-c}}{1-c},$$

ces 18 valeurs se trouveront en mettant dans les six fonctions:

$$\pm c, \quad \pm \frac{1}{c}, \quad \pm \left(\frac{1-\sqrt{c}}{1+\sqrt{c}}\right)^2, \quad \pm \left(\frac{1+\sqrt{c}}{1-\sqrt{c}}\right)^2, \quad \pm \left(\frac{1-\sqrt{-c}}{1+\sqrt{-c}}\right)^2, \quad \pm \left(\frac{1+\sqrt{-c}}{1-\sqrt{-c}}\right)^2,$$

les trois quantités c_1, c_2, c_3 au lieu de c.

Si μ est un nombre premier impair, on aura d'abord $2\mu+2$ valeurs du module c', qui répondent à la forme suivante de y:

$$y = \frac{c^{n+\frac{1}{2}}}{\sqrt{c'}} \cdot \frac{x(e^2 - x^2)(e_2^2 - x^2)\ldots(e_n^2 - x^2)}{(1 - c^2 e^2 x^2)(1 - c^2 e_2^2 x^2)\ldots(1 - c^2 e_n^2 x^2)}.$$

Or de chaque valeur de y de cette forme on tire en vertu des six formules du paragraphe 2. cinq autres de la forme:

$$\frac{y}{c'}, \quad \frac{1+\sqrt{c'}}{1-\sqrt{c'}} \cdot \frac{1 \pm y\sqrt{c'}}{1 \mp y\sqrt{c'}}; \quad \frac{1-\sqrt{c'}}{1+\sqrt{c'}} \cdot \frac{1 \pm y\sqrt{c'}}{1 \mp y\sqrt{c'}}; \quad \frac{1-\sqrt{-c'}}{1+\sqrt{-c'}} \cdot \frac{1 \pm y\sqrt{-c'}}{1 \mp y\sqrt{-c'}};$$
$$\frac{1+\sqrt{-c'}}{1-\sqrt{-c'}} \cdot \frac{1 \pm y\sqrt{-c'}}{1 \mp y\sqrt{-c'}},$$

auxquelles répondent respectivement les modules:

$$\frac{1}{c'}, \quad \left(\frac{1-\sqrt{c'}}{1+\sqrt{c'}}\right)^2, \quad \left(\frac{1+\sqrt{c'}}{1-\sqrt{c'}}\right)^2, \quad \left(\frac{1-\sqrt{-c'}}{1+\sqrt{-c'}}\right)^2, \quad \left(\frac{1+\sqrt{-c'}}{1-\sqrt{-c'}}\right)^2.$$

On aura donc en totalité un nombre de $6(2n+2) = 6(\mu+1)$ valeurs différentes pour le module c'. On en aura le double nombre pour la fonction y.

§. 12.

Résolution de l'équation $y = \psi x$.

L'équation algébrique $y = \psi x$, où ψx est une fonction rationnelle quelconque de x, satisfaisant à une équation différentielle de la forme (214.), jouira de la propriété remarquable d'être résoluble par rapport à x à l'aide de radicaux. Cela est facile de démontrer en ayant égard à la forme des racines de cette équation. D'abord si le degré μ est un nombre composé $= n.n_1.n_2 \ldots . n_\nu$, on pourra faire comme nous venons de voir dans le §. 7.:

$$y = \psi_\nu(y_\nu),\ y_{\nu-1} = \psi_{\nu-1}(y_{\nu-1}),\ \ldots .\ y_2 = \psi_1(y_1);\ y_1 = \psi(x),$$

où ψ_ν, $\psi_{\nu-1}$, $\ldots . \psi_1$, ψ désignent des fonctions rationnelles respectivement des degrés n_ν, $n_{\nu-1}$, $\ldots . n_1$, n, ces derniers nombres étant premiers. On aura donc la valeur de x en y à l'aide de la résolution de $\nu+1$ équations des degrés n, n_1, $\ldots . n_\nu$ respectivement. Donc il suffit de résoudre l'équation $y = \psi x$ dans le cas où le degré μ est un nombre premier. Si $\mu = 2$, on aura l'expression de x par les règles connues. Si μ est impair, les racines de l'équation $y = \psi x$ seront les μ quantités suivantes:

$$x,\ \theta x,\ \theta^2 x \ldots . \ \theta^{2\mu} x.$$

Cela posé, soit δ une racine imaginaire de l'équation

$$\delta^{2\mu+1} = 1,$$

et faisons

$$v = x + \delta.\theta x + \delta^2\theta^2 x + \ldots . + \delta^{2\mu}.\theta^{2\mu} x,$$
$$v' = x + \delta.\theta^{2\mu} x + \delta^2\theta^{2\mu-1} x + \ldots . + \delta.\theta x.$$

En substituant pour les quantités $\theta^m x$ leurs valeurs:

$$\theta^m x = \frac{x\triangle e_m + e_m \triangle x}{1 - c^2 e_m^2 x^2}$$

et remarquant que

$$\theta^{2\mu+1-m} x = \frac{x\triangle e_m - e_m \triangle x}{1 - c^2 e_m^2 x^2},$$

il est clair qu'on aura:

$$v = p + q\triangle x,\quad v' = p - q\triangle x,$$

où p et q sont des fonctions rationnelles de x. Cela fait voir que $v.v'$ et $v^{2\mu+1} + v'^{2\mu+1}$ sont des fonctions rationnelles de x; or je dis qu'on pourra exprimer ces quantités en fonctions rationnelles de y. En effet il est clair en vertu de la forme de v et v', que si l'on fait

$$v.v' = \varphi x,\quad v^{2\mu+1} + v'^{2\mu+1} = fx,$$

les deux fonctions φx et fx ne changeront pas de valeur en mettant pour x les $2\mu+1$ quantités:

$$x,\ \theta x,\ \ldots .\ \theta^{2\mu}x.$$

Donc on aura:

$$\varphi x = \frac{1}{2\mu+1}\{\varphi x+\varphi\theta x+\ldots.+\varphi\theta^{2\mu}x\} = v.v',$$

$$fx = \frac{1}{2\mu+1}\{fx+f\theta x+\ldots.+f\theta^{2\mu}x\} = v^{2\mu+1}+v'^{2\mu+1}.$$

Ces expressions des quantités $v.v'$, $v^{2\mu+1}+v'^{2\mu+1}$ sont des fonctions rationnelles et symétriques des racines de l'équation $y=\psi x$; donc on pourra les exprimer rationnellement par les coëfficiens de cette équation, c'est-à-dire en y.

Faisons donc:

$$v.v' = s,$$
$$v^{2\mu+1}+v'^{2\mu+1} = t,$$

s et t seront des fonctions rationnelles de y. On en tire

$$v = \sqrt[2\mu+1]{\left[\frac{t}{2}+\sqrt{\left(\frac{t^2}{4}-\varrho^{2\mu+1}\right)}\right]}.$$

On connoit donc la fonction v. Maintenant si l'on désigne par v_0, v_1, v_2, ... $v_{2\mu}$ les valeurs de v qui répondent respectivement aux racines 1, δ, δ^2, δ^3, ... $\delta^{2\mu}$ de l'équation $\delta^{2\mu+1}=1$, on aura sur le champ:

$$x = \frac{1}{2\mu+1}.\{v_0+v_1+v_2+\ldots.+v_{2\mu}\},$$

$$\theta^m x = \frac{1}{2\mu+1}.\{v_0+\delta^{-m}v_1+\delta^{-2m}v_2+\ldots.+\delta^{-2m\mu}v_{2\mu}\},$$

qui est l'expression générale des racines.

On aura par là une classe très étendue d'équations algébriques de tous les degrés, résolubles algébriquement. Nous n'entrerons pas ici dans des détails sur ce sujet, mais nous renvoyons nos lecteurs à la seconde partie de ce mémoire, où nous en donneront des développemens étendus et remarquables à cause de belles propriétés des fonctions elliptiques qu'on en peut tirer.

On pourra encore remarquer comme cas particulier l'équation:

$$x_\mu = y,$$

où x_μ désigne la fonction rationnelle de x du degré μ^2, qui satisfera à l'équation:

$$\frac{\partial x_\mu}{\triangle x_\mu} = \mu.\frac{\partial x}{\triangle x}.$$

On en pourra toujours tirer la valeur de x en y à l'aide des radicaux. Si μ est un nombre impair, on pourra donner aux racines cette forme très simple:

$$x = \frac{1}{\mu}.\{a.y + (p_1 + q_1\Delta y)^{\frac{1}{\mu}} + (p_2 + q_2\Delta y)^{\frac{1}{\mu}} + \ldots + (p_{\mu^2-1} + q_{\mu^2-1}\Delta y)^{\frac{1}{\mu}}\},$$

où p_1, p_2, p_3 . . . . sont des fonctions entières impaires de y du degré μ, et q_1, q_2, q_3 . . . . des fonctions paires de y du degré $\mu - 3$. p_m et q_m seront déterminés par l'équation

$$p_m^2 - q_m^2(1-y^2)(1-c^2y^2) = (y^2 - e_m^2)^\mu,$$

où e_m est une constante, savoir une racine de l'équation $x_\mu = 0$.

Chapitre V.

Théorie générale de la transformation des fonctions elliptiques par rapport au module.

A l'aide des théorèmes que nous avons établis dans les chapitres précédens, nous pourrons maintenant donner la solution de ce problème:

„Etant proposé une fonction elliptique avec une module quelconque, exprimer cette fonction de la manière la plus générale en d'autres fonctions."

§. 1.

Condition générale pour la transformation.

Soit proposé une intégrale de la forme:

$$\int \frac{r.\partial x}{\Delta x},$$

on demande, s'il est possible d'exprimer cette intégrale par des fonctions algébriques, logarithmiques et des fonctions elliptiques, dont les modules sont c_1, c_2, ... c_n, en sorte qu'on ait:

$$\int \frac{r\partial x}{\Delta x} = A_1.\psi_1 x_1 + A_2\psi_2 x_2 + \ldots + A_m\psi_m x_m + V,$$

où A_1, A_2 . . . . A_m sont des constantes, x_1, x_2 . . . . x_m des fonctions algébriques de x, et V une fonction algébrique et logarithmique. ψ_1, ψ_2, ... ψ_m désignent des fonctions elliptiques ayant respectivement c_1, c_2 . . . . c_m pour modules.

Cela posé, cette équation donnera en vertu de (86.):

$$\int \frac{r\partial x}{\Delta x} = k_1.\psi_1 y_1 + k_2.\psi_2 y_2 + \ldots + k_m.\psi_m y_m + V',$$

où

$$y_1,\ y_2,\ y_3,\ \ldots\ y_m,$$

et également

$$\frac{\Delta_1 y_1}{\Delta x}, \frac{\Delta_2 y_2}{\Delta x}, \frac{\Delta_3 y_3}{\Delta x}, \ldots \frac{\Delta_m y_m}{\Delta x}$$

sont des fonctions rationnelles de x.

Si l'on suppose, ce qui est permis, qu'il soit impossible d'exprimer

$$\int \frac{r\,\partial x}{\Delta x}$$

par un nombre moindre des fonctions $\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_m$, il est clair, qu'aucune des quantités $y_1, y_2, \ldots y_m$ ne pourra être constante.

On doit donc avoir séparément, en vertu du théorème démontré dans le premier paragraphe du chapitre précédent:

$$\frac{\partial y_1}{\Delta_1 y_1} = \varepsilon_1 \cdot \frac{\partial x}{\Delta x}; \quad \frac{\partial y_2}{\Delta_2 y_2} = \varepsilon \cdot \frac{\partial x}{\Delta x}; \quad \ldots \quad \frac{\partial y_m}{\Delta_m y_m} = \varepsilon_m \cdot \frac{\partial x}{\Delta x},$$

où $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_m$ sont des constantes. Cela donne en intégrant,

$$\varpi(y_1, c_1) = \varepsilon_1 \varpi x; \quad \varpi(y_2, c_2) = \varepsilon_2 \varpi x; \quad \ldots \quad \varpi(y_m, c_m) = \varepsilon_m \varpi x$$

sauf une constante qu'il faut ajouter à chacune de ces équations. On pourra donc énoncer ce théorème:

Théorème XIII. Une relation quelconque entre des fonctions elliptiques, ayant $c_1, c_2, \ldots c_m$ pour modules, ne pourra subsister à moins qu'on n'ait entre les fonctions correspondantes de la première espèce, cette relation:

215. $$\varpi(x, c) = \frac{1}{\varepsilon_1} \cdot \varpi(y_1, c_1) = \frac{1}{\varepsilon_2} \cdot \varpi(y_2, c_2) = \ldots = \frac{1}{\varepsilon_m} \cdot \varpi(y_m, c_m),$$

où $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_m$ sont des constantes et $y_1, y_2, \ldots y_m$ des fonctions rationnelles de la variable x.

On pourra donc encore satisfaire aux équations suivantes:

216. $$\begin{cases} \varpi(x_1, c) = \varepsilon' \cdot \varpi(x_1, c_1), \\ \varpi(x_2, c) = \varepsilon'' \cdot \varpi(x, c_2), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varpi(x_m, c) = \varepsilon^{(m)} \cdot \varpi(x, c_m), \end{cases}$$

où $x_1, x_2, \ldots x_m$ sont des fonctions rationnelles de x; ou bien, si l'on désigne par c et c' les modules de deux quelconques des fonctions entre lesquelles on a une relation, on pourra toujours satisfaire à l'équation:

217. $$\varpi(x', c') = \varepsilon \cdot \varpi(x, c)$$

en supposant x' fonction rationnelle de x, ou x fonction rationnelle en x'. Cette équation donne

218. $$\frac{\partial x'}{\Delta(x', c')} = \varepsilon \cdot \frac{\partial x}{\Delta(x, c)}.$$

Soit maintenant x' une fonction rationnelle de x; si r' désigne une fonction rationnelle quelconque de x', on pourra transformer r en une fonction pareille de x. En la désignant par r, on aura donc $r' = r$. Donc en multipliant l'équation différentielle ci-dessus par r', on aura, en intégrant:

$$219. \quad \int \frac{r' \partial x'}{\Delta(x', c')} = \varepsilon \int \frac{r \partial x}{\Delta(x, c)}.$$

Quelle que soit la fonction rationnelle r, on pourra toujours, comme on sait, exprimer

$$\int \frac{r \partial x}{\Delta(x, c)}$$

par des fonctions elliptiques des trois espèces avec le module c. On aura donc ce théorème:

Theorème XIV. Si une fonction elliptique quelconque φx, ayant c' pour module, peut être exprimée par d'autres fonctions avec les modules $c_1, c_2, \ldots . c_m$, on pourra toujours exprimer la même fonction φx par des fonctions elliptiques avec le même module c, c étant un quelconque des modules $c_1, c_2, \ldots . c_m$, et cela de la manière suivante:

$$220. \quad \varphi y = \int \frac{r \partial x}{\Delta(x, c)},$$

où y et r sont des fonctions rationnelles de x *).

*) C'est jusqu'ici que ce mémoire est parvenu à l'éditeur. Mr. Abel est mort sans l'avoir fini. (Voyez son nécrologe à la fin de ce cahier.)

Note de l'éditeur.

27.

Über die allgemeinen Gesetze, nach welchen irgend zwei Flächen einen Contact der verschiedenen Ordnungen haben.

(Von Herrn Prof. *Plücker* zu Bonn.)

1. Eine gegebene Fläche kann in einem gegebenen Puncte mit einer andern Fläche, die der Art nach, d. h. durch eine Gleichung gegeben ist, in der die Coëfficienten beliebig zu bestimmende Gröfsen sind, einen verschiedenartigen, mehr oder weniger innigen Contact haben. Je inniger dieser Contact sein soll, desto mehr Bedingungen müssen befriedigt werden, desto mehr unbestimmte Coëfficienten mufs die allgemeine Gleichung der osculirenden Fläche haben. Die möglichen Ordnungen des Contactes pflegt man nach der Zahl dieser Coëfficienten zu bestimmen, und nach der gewöhnlichen Entwickelungsweise sind $1+2+3+\ldots.+(n+1)$ Coëfficienten nothwendig und hinreichend, damit ein Contact der $n$ten Ordnung Statt habe. Man siehet leicht ein, dafs wenn man annimmt, die Gleichung der osculirenden Fläche sei nach steigenden Potenzen der drei Veränderlichen entwickelt, jene unbestimmten Coëfficienten nicht zu durchaus willkürlichen Potenzen gehören dürfen. Aber auch mit dieser Beschränkung ist jene Bestimmung nur dann die richtige, wenn der Grad der sich osculirenden Flächen rücksichtlich der Ordnung des Contactes von einer bestimmten Höhe ist. Denn damit z. B. zwei Flächen dritten und zweiten Grades einen Contact der 5ten Ordnung haben, sind nicht:

$$1+2+3+4+5+6=21,$$

sondern nur:

$$1+2+3+4+3+2=15$$

Bedingungs-Gleichungen zu befriedigen. Uberdies ist die Bestimmung der möglichen Ordnungen des Contactes nach der Zahl der Coëfficienten der osculirenden Fläche eine durchaus indirecte.

Es scheint mir am natürlichsten und am leichtesten, die Discussion des Contactes zweier Flächen in einem gegebenen Puncte, anzuknüpfen an die Theorie des Contactes der beiden Durchschnittscurven der beiden Flächen

mit einer Ebene, die durch den Berührungspunct geht und die man sich um eine in derselben befindliche, und durch diesen Punct gehende gerade Linie drehen läfst. Auf diese Weise ergiebt sich zugleich ohne Aufwand von Rechnung die Beantwortung einer Reihe von Fragen, die sich von selbst darbieten und mit denen man sich bisher wenig beschäftigt zu haben scheint. Nach wie vielen Richtungen z. B. müssen zwei Flächen des $m$ten und m'ten Grades einen Contact der $n$ten Ordnung haben, damit ein Contact derselben Ordnung nach allen Richtungen hin Statt finde? Wenn zwei solche Flächen einen vollständigen Contact der $n$ten Ordnung haben, findet alsdann möglicher oder nothwendiger Weise nach gewissen Richtungen ein Contact der $(n+1)$ten Ordnung Statt? Kann dieser Contact auch von noch höherer Ordnung, der $(n+p)$te sein, und ist er dann nach allen eben bezeichneten Richtungen ein Contact von dieser höheren Ordnung, oder nur nach einer bestimmten Zahl derselben? In welchen Beziehungen steht die Durchschnitts-Curve (im Allgemeinen doppelter Krümmung) zu der Ordnung des Contactes? In welcher Beziehung stehen zu einander, bei den verschiedenen Contact-Ordnungen, die Durchschnitts-Curven der beiden Flächen mit der gemeinschaftlichen Tangential-Ebene? Von welcher Ordnung ist der Contact, wenn die beiden Flächen sich nach theilweise ebenen Curven schneiden und diese in der Tangential-Ebene zusammenfallen? Und, umgekehrt, von welcher Ordnung mufs der Contact sein, damit die beiden Flächen nach einer oder mehreren zusammenfallenden Ebenen sich berühren? u. s. w.

„Wenn zwei Curven sich osculiren, so vereinigen sich im Osculationspuncte mehrere Durchschnittspuncte". Diesen Satz betrachtet man gewöhnlich als eine Folge des Prinzips der Continuität; ich habe ihn in meinen „Entwicklungen," um darauf die Theorie der Osculation ebener Curven zu gründen, lediglich als die geometrische Interpretation eines algebraischen Factums, nemlich der gleichen Wurzeln derjenigen Gleichungen betrachtet, die man erhält, indem man nach einander zwischen den Gleichungen der beiden Curven jede der Veränderlichen eliminirt. Beim Contacte von Flächen kann zwar von einem Zusammenfallen einer bestimmten Anzahl von Durchschnittspuncten unmittelbar nicht mehr die Rede sein: für das Analoge erhalten wir hier aber Folgendes. „Wenn „irgend zwei Flächen einen Contact der $n$ten Ordnung haben, so vereini„gen sich in dem Contactpuncte $(n+1)$ Zweige der Durchschnittscurve

„der beiden Flächen (Zweige die paarweise genommen imaginär werden „können), oder, mit andern Worten, der Contactpunct ist ein $(n+1)$fa-cher Punct dieser Curve." (Wenn wir also durch den Contactpunct irgend eine Ebene legen, so wird dieselbe in diesem Puncte von den $(n+1)$ Zweigen der Durchschnittscurve in $(n+1)$ zusammenfallenden Puncten geschnitten. Diese Puncte bilden den Osculationspunct derjenigen beiden Curven, nach welchen jene Ebene die beiden Flächen schneidet.) Auf diesen Satz könnten wir die Theorie des Contactes zweier Flächen in einem gegebenen Puncte gründen. Nur würde diese Art zu verfahren mehr Rechnung erfordern, als die oben angedeutete, weil wir nothwendig die Gleichung einer Projection der Durchschnittscurve der beiden Flächen entwickeln müfsten. Wenn (wodurch die Untersuchung aber ungemein eingeschränkt wird) in den Gleichungen der beiden Flächen z als Function von y und x:

$$z = \varphi(y, x), \quad z = \psi(y, x)$$

gegeben ist, so erhält man für die Gleichung der Projection der Durchschnittscurve auf die Ebene der y und x:

$$\varphi(y, x) = \psi(y, x).$$

Um auszudrücken, dafs diese Curve durch den Anfangspunct der Coordinaten gehe, in diesem Puncte einen Doppelpunct, einen dreifachen, vierfachen etc. Punct habe, müssen wir, nach der bekannten Theorie, die letzte Gleichung nach steigenden Potenzen von y und x entwickeln, und dann das constante Glied, die Coëfficienten der ersten, zweiten, dritten etc. Potenzen der beiden Veränderlichen gleich Null setzen. Auf diese Weise erhalten wir auf der Stelle die bekannten Bedingungsgleichungen, welche uns die gewöhnliche Theorie des Contactes zweier Flächen giebt.

In den nachstehenden Entwickelungen habe ich, nach der zuerst bezeichneten Methode, die Theorie des Contactes einer Fläche zweiter Ordnung mit einer andern Fläche derselben Ordnung und mit einer Fläche dritter Ordnung vollständig behandelt, um mich so, auf dem Wege der Induction, zu den allgemeinen Gesetzen, nach welchen überhaupt irgend zwei Flächen, namentlich zwei algebraische von bestimmten Graden, sich osculiren. Was hier noch unvollständig bleiben mag, gedenk' ich später an einem andern Orte nachzutragen.

2. Bei der Annahme durchaus beliebiger Coordinaten-Axen seien:

$$(1.)\begin{cases} Az^2+2Bzy+2Czx+Dy^2+2Eyx+Fx^2+2Gz+2Hy+2Kx=0, \\ A'z^2+2B'zy+2C'zx+D'y^2+2E'yx+F'x^2+2G'z+2H'y+2K'x=0, \end{cases}$$

die Gleichungen irgend zweier durch den Anfangspunct gehender Flächen zweiter Ordnung. Alsdann stellen bekanntlich die linearen Theile dieser Gleichungen:

$$Gz + Hy + Kx = 0,$$
$$G'z + H'y + K'x = 0,$$

die Tangential-Ebenen der beiden Flächen im Anfangspuncte der Coordinaten dar. Die Durchschnittslinie dieser beiden Ebenen ist eine, beiden Flächen gemeinschaftliche Tangente. Nehmen wir diese Linie zur Axe der x, so ergiebt sich $K = K' = 0$. Wenn die beiden Flächen dieselbe Tangential-Ebene haben, so müssen die beiden letzten Gleichungen identisch sein. Dies erfordert überdies noch $\frac{H}{G} = \frac{H'}{G'}$. Wenn diese gemeinschaftliche Tangential-Ebene mit der Ebene der xy zusammenfallen soll, so mufs H und H' verschwinden. Diesen Bestimmungen gemäfs nehmen die Gleichungen (1.) folgende Form an:

$$(2.)\quad \begin{cases} Az^2 + 2Bzy + 2Czx + Dy^2 + 2Eyx + Fx^2 + 2Gz = 0, \\ A'z^2 + 2B'zy + 2C'zx + D'y^2 + 2E'yx + F'x^2 + 2G'z = 0, \end{cases}$$

3. Wenn wir die Axe der x in der Tangential-Ebene um irgend einen Winkel α fortrücken lassen, um alsdann die Durchschnittscurven der beiden gegebenen Flächen mit der neuen Ebene der z, x zu bestimmen, so brauchen wir nur, wie bekannt, wenn wir den von den Axen der y und x gebildeten Winkel β nennen, $x\sin(\beta-\alpha)$ für x, und $x\sin\alpha$ für y in den letzten beiden Gleichungen zu substituiren und nachher $y = 0$ zu setzen. Auf diese Weise ergeben sich folgende beide Gleichungen:

$$(3.)\quad \begin{cases} az^2 + 2czx + fx^2 + 2gz = 0, \\ a'z^2 + 2c'zx + f'x^2 + 2g'z = 0, \end{cases}$$

indem wir, der Kürze halber,

$$a = A, \quad c = B\sin\alpha + C\sin(\beta-\alpha),$$
$$f = D\sin^2\alpha + 2E\sin\alpha\sin(\beta-\alpha) + F\sin^2(\beta-\alpha), \quad g = G,$$
$$a' = A', \quad c' = B'\sin\alpha + C'\sin(\beta-\alpha),$$
$$f' = D'\sin^2\alpha + 2E'\sin\alpha\sin(\beta-\alpha) + F'\sin^2(\beta-\alpha), \quad g' = G',$$

setzen. Die beiden durch (3.) dargestellten Curven berühren sich immer im Anfangspuncte der Coordinaten, welches auch der Winkel α sein mag. Wenn der Contact in diesem Puncte ein dreipunctiger sein soll, so wird erfordert, dafs

$$\frac{g}{f} = \frac{g'}{f'},$$

und mithin, wenn wir substituiren:

$$G[D'\sin^2\alpha + 2E'\sin\alpha\sin(\beta-\alpha) + F'\sin^2(\beta-\alpha)]$$
$$= G'[D\sin^2\alpha + 2E\sin\alpha\sin(\beta-\alpha) + F\sin^2(\beta-\alpha)].$$

Hieraus ergiebt sich, wenn wir entwickeln und, der Kürze halber, für den Ausdruck $\frac{\sin\alpha}{\sin(\beta-\alpha)}$, der wenn der Coordinaten-Winkel β ein rechter ist in tangα übergeht, φ schreiben, folgende quadratische Gleichung:

$$(4.)\quad (GD'-G'D)\varphi^2 + 2(GE'-G'E)\varphi + (GF'-G'F) = 0.$$

Also:

Wenn irgend zwei Flächen zweiter Ordnung in demselben Puncte eine gemeinschaftliche Tangential-Ebene haben, so giebt es überdies, im Allgemeinen, zwei Richtungen, nach welchen die Flächen dieselbe Krümmung, d. h. einen Contact von drei Puncten haben.

Die eine dieser Richtungen fällt mit der ersten oder zweiten Axe, oder beide Richtungen fallen mit den beiden Axen zusammen, wenn $GF' = G'F$, oder $GD' = G'D$, oder wenn zugleich $GF' = G'F$ und $GD' = G'D$.

4. Die folgende geometrische Beziehung der beiden in Rede stehenden Richtungen ergiebt sich unmittelbar aus der Form der Gleichung (4.), in der das zweite Glied ausfällt, wenn $E = E' = 0$. Wenn man nemlich irgend eine den beiden Flächen begegnende, der Tangential-Ebene parallele Ebene legt, so haben die beiden Durchschnittscurven in dieser Ebene, wie überhaupt je zwei in derselben Ebene befindlichen Linien zweiter Ordnung, ein gemeinschaftliches System zugeordneter Durchmesser. Wenn man alsdann durch den Berührungspunct beider Flächen diesen beiden Durchmessern zwei gerade Linien parallel zieht, so bilden diese mit denjenigen beiden geraden Linien, nach welchen die beiden gegebenen Flächen dieselbe Krümmung haben, eine System von solchen vier geraden Linien, die man „Harmonicalen" nennt.

Wenn eine der beiden sich berührenden Flächen, etwa die erste, eine Kugel ist, oder wenn auch nur der Berührungspunct ein „*ombilic*" dieser Fläche ist, so hat man, bei der Voraussetzung rechtwinkliger Coordinaten, immer $E = o$, und indem man die Axen der x und y nach den Hauptkrümmungs-Richtungen der zweiten Fläche nimmt, verschwindet auch E'. Man erhält also für φ oder tangα zwei gleiche und entgegen-

gesetzte Werthe, so dafs die durch α bestimmten Richtungen gemeinschaftlicher Krümmung mit den Hauptkrümmungs-Richtungen der zweiten Fläche gleiche Winkel bilden.

Wenn der Berührungspunct ein „*ombilic*" beider Flächen zugleich ist, so verliert die Gleichung (4.) ihre Bedeutung; denn alsdann hat man

$$D = F, \quad D' = F', \quad E = E' = 0,$$

und mithin:

$$f = F, \quad f' = F'.$$

Die Gleichungen:

$$\frac{g}{f} = \frac{g'}{f'} \text{ oder } \frac{G}{F} = \frac{G'}{F'}$$

werden also entweder gar nicht befriedigt, oder für jeden beliebigen Werth von α. Dasselbe ergiebt sich auch a priori.

5. Wenn wir die Gleichungen (2.) addiren, nachdem wir die zweite derselben mit einem unbestimmten Coëfficienten multiplicirt haben, so erhalten wir:

$$(A+\mu A')z^2+2(B+\mu B')zy+2(C+\mu C')zx+(D+\mu D')y^2$$
$$+2(E+\mu E')yx+(F+\mu F')x^2+2(G+\mu G')z = 0$$

für die allgemeine Gleichung aller Flächen zweiter Ordnung, welche mit den beiden gegebenen dieselbe Durchschnittscurve haben. Sollen sich diese Flächen daher in ebenen Curven schneiden, und eine derselben in die Ebene der xy fallen, wo sich dieselbe alsdann auf einen Punct oder ein System von zwei geraden Linien reducirt, so erhalten wir folgende Bedingungs-Gleichungen:

$$D+\mu D' = 0, \quad E+\mu E' = 0, \quad F+\mu F' = 0,$$

mithin

$$(5.) \quad \frac{D}{D'} = \frac{E}{E'} = \frac{F}{F'}.$$

Diese Gleichungen enthalten zwei von einander unabhängige Bedingungen, von denen aber nur eine auf die Natur der Flächen sich bezieht. Denn wir können immer in den ursprünglichen Gleichungen (2.) die Coëfficienten von xy beide fortschaffen, indem wir die Richtung der Axen der x und y ändern.

Vermittelst der Gleichungen (5.) können wir die Gleichung (4.) der 3ten Nummer auf jede der beiden nachstehenden zurückführen:

$$D\varphi^2+2E\varphi+F = 0,$$
$$D'\varphi^2+2E'\varphi+F' = 0;$$

woraus hervorgeht, das alsdann die in jener Nummer bezeichneten Rich-

tungen gleicher Krümmung diejenigen sind, nach welchen die Krümmungen beider Flächen unendlich werden. Die Hauptkrümmungen der beiden Flächen haben dieselben Richtungen, und nach jeder beliebigen Richtung ist das Verhältnifs der Krümmungen beider Flächen ein constantes.

6. Die zweite Durchschnitts-Ebene der beiden gegebenen Flächen wird, bei den eben gemachten Voraussetzungen, durch folgende Gleichung dargestellt:

(6.) $(A+\mu A')z + 2(B+\mu B')y + 2(C+\mu C')x + (G+\mu G') = 0.$

Soll diese Ebene durch den Berührungspunct gehen, so ist nothwendig

$$G + \mu G' = 0,$$

und also nach der vorigen Nummer:

$$(7.)\quad \frac{D}{D'} = \frac{E}{E'} = \frac{F}{F'} = \frac{G}{G'},$$

wonach die Gleichung (4.) der 2ten Nummer für jeden beliebigen Werth von φ befriedigt wird, und, umgekehrt: diese Gleichung wird nur dann befriedigt, abgesehen von dem besondern, am Ende der 3ten Nummer betrachteten Falle, wenn die in (7.) enthaltenen Gleichungen Statt haben. Diese Gleichungen enthalten also die Bedingungen einer dreipunctigen Osculation nach allen Richtungen. Diese findet nur dann Statt wenn die gegebenen Flächen sich in demselben Puncte so berühren, dafs sie aufserdem noch in einer ebenen Curve sich schneiden und diese Curve durch den Berührungspunct geht.

7. Die Gleichungen (3.) stellen in dem eben betrachteten Falle zwei Durchschnittscurven dar, die sich immer im Anfangspuncte osculiren, welches auch der Winkel α sein mag. Soll diese Osculation eine vierpunctige sein, so erhalten wir, wie bekannt, neben der Bedingungs-Gleichung

$$\frac{g}{f} = \frac{g'}{f'},$$

noch eine zweite:

$$\frac{c}{f} = \frac{c'}{f'},$$

statt welcher wir auch folgende nehmen können:

$$\frac{g}{c} = \frac{g'}{c'},$$

oder, wenn wir substituiren, folgende:

$$G[B'\sin\alpha + C'\sin(\beta-\alpha)] = G'[B\sin\alpha + C\sin(\beta-\alpha)].$$

Aus dieser Gleichung ergiebt sich:

$$(8.)\quad (GB'-G'B)\varphi + (GC'-G'C) = 0.$$

Also:

Wenn zwei Flächen zweiter Ordnung nach allen Richtungen hin einen dreipunctigen Contact haben, so findet überdies nach *einer* Richtung hin ein Contact von vier Puncten Statt.

Die obige Gleichung zeigt, dafs diese Richtung eines höhern Contactes durch die Durchschnittslinie der Durchschnitts-Ebene (6.) der beiden gegebenen Flächen mit ihrer gemeinsamen Tangential-Ebene angezeigt wird; wie dies auch a priori sich leicht einsehen läfst.

8. Wenn die beiden Gleichungen (4.) und (8.) zugleich bestehen sollen, so erhalten wir folgende Bedingungs-Gleichung:

$$(GD'-G'D)(GC'-G'C)^2 - 2(GE'-G'E)(GC'-G'C)(GB'-G'B) + (GF'-G'F)(GB'-G'B)^2 = 0.$$

In diesem Falle ist die Osculation der beiden gegebenen, sich blofs berührenden Flächen, die, im Allgemeinen, nach dem Satze der 3ten Nummer nach zwei Richtungen hin Statt hat, nicht nach beiden Richtungen eine dreipunctige, sondern nach einer derselben eine vierpunctige, und immer eine reelle.

9. Für den Fall eines vollständigen Contactes zweiter Ordnung nimmt die Gleichung (6.) nach dem Vorstehenden folgende Form an:

$$(A+\mu A')z + 2(B+\mu B')y + 2(C+\mu C')x = 0.$$

Soll die bezügliche Durchschnitts-Ebene mit der Tangential-Ebene zusammenfallen, so ist nothwendig und hinreichend, dafs

$$B+\mu B' = 0, \quad C+\mu C' = 0.$$

Eine dieser beiden Bedingungs-Gleichungen wird wieder auf Rechnung der Coordinaten-Annahme kommen, denn man kann die Richtung der dritten Axe so verändern, dafs aus den beiden Gleichungen (2.) die Coëfficienten von zy oder zx zugleich verschwinden. Der Werth von φ erscheint nach diesen Bedingungs-Gleichungen unter der nicht reducirbaren Form $\frac{0}{0}$; es findet also, und es findet nur in diesem Falle nach allen Richtungen hin eine vierpunctige Osculation der beiden Flächen Statt. Wir haben also in diesem Falle folgende Bedingungen:

$$(9.)\quad \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \frac{D}{D'} = \frac{E}{E'} = \frac{F}{F'} = \frac{G}{G'}.$$

Es giebt unendlich viele Flächen zweiter Ordnung, die mit einer gegebenen in einem gegebenen Puncte einen vollständigen Contact der dritten Ordnung haben. Eine solche Fläche ist vollkommen bestimmt, wenn überdies irgend ein Punct, durch welche sie gehen, oder irgend eine Ebene, die sie berühren soll, gegeben ist.

Die vorstehenden Entwicklungen enthalten die vollständige Theorie des Contactes zweier Flächen zweiter Ordnung in einem gegebenen Puncte. Ich könnte an dieselben unmittelbar eine Reihe interessanter Constructionen knüpfen, dem analog, wie ich es in meinen „Entwicklungen" in Beziehung auf Osculation der Linien zweiter Ordnung gethan habe. Doch dies liegt nicht in der Absicht gegenwärtigen Aufsatzes. Ich gehe daher sogleich über zu der vollständigen Theorie der Osculation zweier Flächen zweiter und dritter Ordnung.

10. Die Gleichungen irgend zweier Flächen dritter und zweiter Ordnung, welche von der Ebene der yx im Anfangspuncte berührt werden, seien, bei derselben Coordinaten-Bestimmung als bisher, folgende:

$$(1.)\quad \begin{cases} Az^3+Bz^2y+Cz^2x+Dzy^2+Ezyx+Fzx^2+Gy^3+Hy^2x+Iyx^2+Kx^3 \\ \quad +Lz^2+Mzy+Nzx+Oy^2+Pyx+Qx^2+Rz=0, \\ \quad L'z^2+M'zy+N'zx+O'y^2+P'yx+Q'x^2+R'z=0. \end{cases}$$

Wenn wir die Axe der x in der Tangential-Ebene um irgend einen Winkel α sich drehen lassen, und durch diese neue Axe der x und die Axe der z eine Ebene legen, so müssen wir, um die Gleichungen der Durchschnittscurven der beiden gegebenen Flächen mit dieser Ebene zu finden, in den vorstehenden Gleichungen $x\sin\alpha$ für y und $x\sin(\beta-\alpha)$ für x schreiben und dann $y=0$ setzen. Auf diese Weise kommt:

$$(2.)\quad \begin{cases} az^3+bz^2x+czx^2+dx^3+ez^2+fzx+gx^2+hz=0, \\ \quad e'z^2+f'zx+g'x^2+h'z=0, \end{cases}$$

indem wir, der Kürze halber,

$$a=A,\ b=B\sin\alpha+C\sin(\beta-\alpha),\ c=D\sin^2\alpha+E\sin\alpha\sin(\beta-\alpha)+F\sin^2(\beta-\alpha),$$
$$d=G\sin^3\alpha+H\sin^2\alpha\sin(\beta-\alpha)+I\sin\alpha\sin^2(\beta-\alpha)+K\sin^3(\beta-\alpha),$$
$$e=L,\quad f=M\sin\alpha+N\sin(\beta-\alpha),$$
$$g=O\sin^2\alpha+P\sin\alpha\sin(\beta-\alpha)+Q\sin^2(\beta-\alpha),\quad h=R,$$
$$e'=L',\quad f'=M'\sin\alpha+N'\sin(\beta-\alpha),$$
$$g'=O'\sin^2\alpha+P'\sin\alpha\sin(\beta-\alpha)+Q'\sin^2(\beta-\alpha),\quad h'=R'$$

setzen. Wenn die durch die Gleichungen (2.) dargestellten Curven sich

dreipunctig osculiren sollen, so hat man folgende Bedingungs-Gleichung:

$$hg' - h'g = 0$$ *)

aus der wir, ähnlich wie in der 3ten Nummer, folgende erhalten:

$$(3.)\quad (RO' - R'O)\varphi^2 + (RP' - R'P)\varphi + (RQ' - R'Q) = 0.$$

Also:

Wenn eine Fläche zweiter und eine Fläche dritter Ordnung in demselben Puncte von derselben Ebene berührt werden, so giebt es im Allgemeinen *zwei* Richtungen, nach denen zwischen den beiden Flächen ein Contact von drei Puncten Statt hat.

Es hat die Durchschnittscurve der beiden Flächen im Berührungspuncte derselben einen Doppelpunct, einen Rückkehrpunct oder einen conjugirten Punct; und mithin im ersten Falle in diesem Puncte zwei Tangenten, die im zweiten Falle zusammenfallen und im dritten Falle imaginär werden. Diese Tangenten zeigen die Richtungen jener dreipunctigen Osculation an. Dasselbe gilt offenbar von je zwei Flächen jedes beliebigen Grades.

11. Soll nach allen Richtungen hin ein Contact zweiter Ordnung Statt finden, so mufs die Gleichung (3.) für jeden beliebigen Werth von φ befriedigt werden. Dies führt uns zu folgenden drei Bedingungs-Gleichungen:

$$(4.)\quad RO' = R'O,\quad RP' = R'P,\quad RQ' = RQ,$$

---

*) Man erhält nach meinen „Entwicklungen" S. 227., Note, folgende Gleichungen:

$$(a.)\quad hg' - h'g = 0,$$
$$(b.)\quad fg' - f'g - h'd = 0,$$
$$(c.)\quad g'(g'e - ge') = h'(cg' - df'),$$
$$(d.)\quad g'(bg' - de') = f'(cg' - df').$$

Die erste dieser vier Gleichungen zeigt eine dreipunctige Osculation der Curven (2.) im Anfangspuncte der Coordinaten an, die zwei ersten zeigen eine vierpunctige, die drei ersten eine fünfpunctige, und endlich alle vier zusammen eine sechspunctige Osculation an. Wenn man zu den vorstehenden vier Gleichungen noch folgende fünfte hinzufügt:

$$(e.)\quad ag'^2 = e'(cg' - df'),$$

so wird dadurch ausgedrückt, dafs die Linie dritter Ordnung aus dem Systeme der Linie zweiter Ordnung und irgend einer geraden Linie besteht. Statt der drei letzten Gleichungen (*c.*), (*d.*), (*e.*) können wir folgende drei nehmen:

$$(c'.)\quad h'g'(h'g'e - h'e'g - h'^2c + h'f'f - f'^2h) = 0,$$
$$(d'.)\quad g'^2(h'^2b - h'e'f + f'e'h - f'h'e + f'e'h) = 0,$$
$$(e'.)\quad g'^2(h'e'e - e'^2h - h'^2a) = 0,$$

Gleichungen die wir erhalten, indem wir die jedesmalig vorhergehenden berücksichtigen

oder

$$\frac{O}{O'} = \frac{P}{P'} = \frac{Q}{Q'} = \frac{R}{R'}.$$

Wir wären zu denselben Bedingungs-Gleichungen gekommen, wenn wir statt der gegebenen Fläche dritter Ordnung diejenige Fläche in Betracht gezogen hätten, die durch denjenigen Theil ihrer Gleichung dargestellt wird, der die veränderlichen Gröfsen nur in der ersten und zweiten Potenz enthält. Es ist klar, dafs wir überhaupt in allen denjenigen Fällen, wo es sich blofs von einem Contacte zweiter Ordnung zwischen irgend zweien Flächen (algebraischen oder transcendenten) in einem gegebenen Puncte handelt, zwei Flächen zweiter Ordnung nehmen können, deren Gleichungen wir aus den Gleichungen jener Flächen (nöthigen Falls entwickelt) auf die eben angezeigte Weise erhalten.

12. Wenn irgend eine (algebraische oder transcendente) Fläche in irgend einem Puncte von einer Ebene berührt wird, so schneidet diese Ebene die Fläche in einer solchen Curve, die im Berührungspuncte einen Doppelpunct, einen Rückkehrpunct oder einen conjugirten Punct hat. Wenn zwei Flächen von derselben Ebene in demselben Puncte berührt werden, so enthält diese Ebene zwei Durchschnittscurven mit demselben Doppelpuncte. Wenn der Contact der beiden Flächen ein vollständiger der zweiten Ordnung ist, so erhalten wir nach (4.) der vorhergehenden Nummer, wenn wir, was in unserer Willkür steht, die Coëfficienten von z in den Gleichungen beider Flächen gleich setzen ($R = R'$), auch gleiche Coëfficienten von y^2, yx und x^2, so dafs also die Durchschnittscurven der beiden Flächen mit der Tangential-Ebene in dem gemeinschaftlichen Doppelpuncte dieselben beiden Tangenten haben. In dem Falle dafs eine osculirende Fläche vom zweiten Grade ist, sind diese Tangenten (die imginär werden können und alsdann auf einen Punct sich reduciren) diejenigen beiden geraden Linien selbst, nach welchen die Berührungs-Ebene jene Fläche schneidet. Zugleich ersieht man auf diese Weise, dafs wenn zwei Flächen zweiter Ordnung einen Contact der zweiten Ordnung haben, die Durchschnittslinie beider Flächen mit der Tangential-Ebene (ein System von zwei geraden Linien oder eine Ellipse die auf einen Punct sich reducirt hat) dieselben sind, und sich also die beiden Flächen nach derselben Ebene berühren und überdies in einer

ebenen Curve schneiden. — Umgekehrt ist es nicht hinreichend, dafs die beiden Durchschnittscurven in der gemeinschaftlichen Tangential-Ebene zweier Flächen dieselben beiden Tangenten haben; auch nicht, dafs diese beiden Curven durchaus dieselben sind, damit die beiden Flächen einen vollständigen Contact der zweiten Ordnung haben.

13. Damit der Contact der beiden Curven (2.) ein vierpunctiger sei, mufs neben der frühern Gleichung auch noch folgende bestehen:

$$fg' - f'g - h'd = 0.$$

Substituiren wir für die in dieser Gleichung vorkommenden Ausdrücke ihre Werthe und dividiren zugleich durch $\sin^3(\beta - \alpha)$, so kommt:

$$(5.)\quad \begin{cases} (MO' - M'O - R'G)\varphi^3 + (MP' - M'P + NO' - N'O - R'H)\varphi^2 \\ + (MQ' - M'Q + NP' - N'P - R'I)\varphi + (NQ' - N'Q - R'K) = 0. \end{cases}$$

Also:

Wenn zwei Flächen zweiten und dritten Grades einen vollständigen Contact der zweiten Ordnung haben, so findet überdies, im Allgemeinen, nach dreien, und immer wenigstens nach einer Richtung, eine vierpunctige Osculation Statt.

Die Durchschnittscurve beider Flächen (doppelter Krümmung) hat im Anfangspuncte der Coordinaten einen dreifachen Punct (diesen Ausdruck in einer ausgedehntern Bedeutung als gewöhnlich genommen) und also drei Tangenten, von denen zwei imaginär werden können. Nach diesen Tangenten findet jene vierpunctige Osculation Statt. Dasselbe gilt offenbar, wenn wir die Fläche dritter Ordnung mit irgend einer beliebigen vertauschen.

14. Wenn der Contact nach allen Richtungen hin ein vierpunctiger sein soll, so ergeben sich folgende vier Bedingungs-Gleichungen:

$$(6.)\quad \begin{cases} MO' - M'O = R'G, \\ MP' - M'P + NO' - N'O = R'H, \\ MQ' - M'Q + NP' - N'P = R'I, \\ NQ' - N'Q = R'K. \end{cases}$$

Diese vier Gleichungen, so wie die drei Gleichungen (4.), sind alle sieben rücksichtlich der Constanten jeder der beiden Gleichungen (1.) linear, und da keine derselben eine Folge der andern ist, so enthalten sie sieben von einander unabhängige Bedingungen. Diese sieben Bedingungen können,

im Allgemeinen, nicht erfüllt werden, wenn man die erste Fläche als eine gegebene, die zweite als eine zu bestimmende, und dem gemäfs die Constanten ihrer Gleichung als unbestimmte Coëfficienten betrachtet. Da die Gleichungen (4.) und (6.) kein von diesen Constanten unabhängiges Glied enthalten, so kann von einer absoluten Bestimmung derselben nicht die Rede sein; wenn wir aber eine derselben, etwa R', beliebig annehmen, so geben fünf von jenen sieben Gleichungen die Werthe von M', N', O', P' und Q'. Der Coëfficient L' kommt in diesen Gleichungen gar nicht vor; wenn daher die, durch fünf jener Gleichungen bestimmten Werthe auch die beiden übrigen der sieben Gleichungen befriedigen, wodurch zwei Bedingungs-Gleichungen zwischen den Constanten der gegebenen Fläche dritter Ordnung angezeigt werden, so giebt es unendlich viele Flächen zweiter Ordnung, die mit der gegebenen Fläche in dem gegebenen Puncte einen vollständigen Contact der dritten Ordnung haben. Die Gleichungen aller dieser Flächen stimmen, wenn wir einem Coëfficienten, dem von z z. B., denselben beliebigen Werth beilegen, auch in allen übrigen Coëfficienten, ausgenommen in dem von z^2, überein. Dasselbe ergiebt sich auch a priori, weil offenbar alle jene osculirenden Flächen zweiter Ordnung auch unter sich einen Contact der dritten Ordnung haben.

15. Wenn die beiden gegebenen Flächen einen vollständigen Contact dritter Ordnung haben, so haben sie, nach gewissen Richtungen, auch einen Contact vierter Ordnung. Wenn wir die Durchschnittscurven nach einer solchen Richtung wiederum durch die Gleichungen (2.) darstellen, so erhalten wir zu den beiden frühern Bedingungs-Gleichungen noch folgende:

$$(7.)\quad h'g'(h'g'e - h'e'g - h'^2e + h'f'f - f'^2h) = 0.$$

Diese Gleichung wird zuvörderst befriedigt, wenn wir den in den Klammern eingeschlossenen Ausdruck gleich Null setzen. Dies führt uns, wenn wir substituiren und entwickeln, zu folgender Gleichung:

$$(8.)\quad \left\{\begin{array}{c} (R'O'L - R'L'O - R'^2D + R'M'M - M'^2R)\varphi^2 \\ + R'P'L - R'L'P - R'^2E + R'M'N + R'N'M - 2M'N'R)\varphi \\ + (R'Q'L - R'L'Q - R'^2F + R'N'N - N'^2R) = 0. \end{array}\right.$$

Da diese Gleichung in Beziehung auf φ vom zweiten Grade ist, so giebt es hiernach im Allgemeinen zwei Richtungen, nach welchen der Contact der beiden Flächen ein fünfpunctiger ist.

Diese Richtungen werden durch zwei Tangenten an die Durchschnittscurve dieser beiden Flächen angezeigt.

Die Gleichung (7.) wird ebenfalls befriedigt, wenn man $g' = 0$ setzt. Dies führt zu folgender Gleichung:

$$O'\varphi^2 + P'\varphi + Q = 0,$$

die nach der 11ten Nummer mit folgender identisch ist:

$$O\varphi^2 + P\varphi + Q = 0.$$

Die Bedeutung hiervon wird sich später in der 22sten Nummer ergeben.

16. Wenn der Contact nach allen Richtungen hin ein fünfpunctiger sein soll, so ergeben sich folgende drei Bedingungs-Gleichungen:

$$(9.)\quad \begin{cases} R'O'L - R'L'O - R'^2D + R'M'M - M'^2R = 0, \\ R'P'L - R'L'P - R'^2E + R'M'N + R'N'M - 2M'N'R = 0, \\ R'Q'L - R'L'Q - R'^2F + R'N'N - N'^2R = 0. \end{cases}$$

Wenn wir die Fläche zweiter Ordnung als eine gegebene betrachten, so können wir die Fläche dritter Ordnung immer auf solche Weise bestimmen, dafs die Gleichungen (4.), (6.) und (9.) alle zehn befriedigt werden. Diese Gleichungen sind alle in Beziehung auf die Constanten der Gleichung der Fläche dritter Ordnung linear.

17. Sollen in dem Falle eines vollständigen Contacts der vierten Ordnung die durch (2.) dargestellten Durchschnittscurven einen sechspunctigen Contact haben, so mufs auch noch folgende Gleichung befriedigt werden:

$$(10.)\quad g'^2(h'^2b - h'e'f + f'e'h - f'h'e + f'e'h) = 0.$$

Abstrahiren wir von dem quadratischen Factor g'^2, so wird diese Gleichung nur dann befriedigt, wenn der in der Klammer befindliche Factor verschwindet. Wenn wir substituiren und entwickeln, so kommt:

$$(11.)\quad \begin{cases} (R'^2B - LR'M + L'M'R - R'M'L + L'M'R)\varphi \\ = (R'^2C - L'R'N + L'N'R - R'N'L + L'N'R). \end{cases}$$

Diese Gleichung giebt uns, da sie in Beziehung auf φ nur vom ersten Grade ist, eine einzige Richtung eines sechspunctigen Contactes. Diese Richtung ist durch eine Tangente an die Durchschnittscurve der beiden Flächen angezeigt.

18. Soll der Contact nach allen Richtungen hin ein sechspunctiger sein, so erhalten wir folgende zwei neue, in Bezie-

hung auf die Coëfficienten der Gleichung der Fläche dritter Ordnung ebenfalls lineare Bedingungs-Gleichungen:

$$(12.)\quad \begin{cases} R'^2 B - L'R'M + L'M'R - R'M'L + L'M'R = 0, \\ R'^2 C - L'R'N + L'N'R - R'N'L + L'N'R = 0. \end{cases}$$

Wir erhalten hiernach im Ganzen zwölf Bedingungs-Gleichungen.

19. Um endlich noch auszudrücken, dafs die erste der durch (2.) dargestellten Durchschnittscurven aus dem Systeme der andern und einer geraden Linie bestehe, erhalten wir folgende neue Bedingungs-Gleichung:

$$g'^2 (h' e' e - e'^2 h - h'^2 a) = 0.$$

Wenn wir von dem Factor g'^2 abstrahiren, so erhalten wir, indem wir substituiren:

$$(13.)\quad R'L'L - L'^2 R - R'^2 A = 0,$$

eine Gleichung, die vom Winkel α unabhängig ist. Wird daher diese Gleichung befriedigt, so besteht die osculirende Fläche dritter Ordnung aus dem Systeme der gegebenen Fläche zweiter Ordnung und irgend einer Ebene.

20. Da die geometrischen Beziehungen, um die es uns hier hauptsächlich zu thun ist, von jeder Coordinaten-Annahme unabhängig sind, so können wir die Discussion sehr erleichtern, wenn wir für die Gleichung der Fläche zweiter Ordnung, die wir als eine gegebene betrachten, folgende nehmen:

$$(14.)\quad \alpha z^2 + \beta y^2 + \gamma x^2 + z = 0,$$

welche, bei gehöriger Bestimmung von α, β und γ, jede beliebige Fläche dieser Ordnung darstellt. Die Gleichung der Fläche dritter Ordnung ist, indem wir, unbeschadet der Allgemeinheit, den Coëfficienten von z gleich Eins setzen, folgende:

$$(15.)\quad \begin{cases} Az^3 + Bz^2 y + Cz^2 x + Dzy^2 + Ezyx + Fzx^2 + Gy^3 + Hy^2 x \\ + Iyx^2 + Kx^3 + Lz^2 + Mzy + Nzx + Oy^2 + Pyx + Qx^2 = 0. \end{cases}$$

Alsdann erhält man

1) aus den Gleichungen (4.) folgende Bedingungs-Gleichungen für einen vollständigen Contact von drei Puncten:

$$(16.)\quad O = \beta, \quad P = 0, \quad Q = \gamma;$$

2) aus den Gleichungen (6.) für einen vollständigen Contact von vier Puncten, neben den vorstehenden Bedingungs-Gleichungen noch folgende:

$$(17.)\quad M\beta = G, \quad N\beta = H, \quad M\gamma = I, \quad N\gamma = K.$$

Der allgemeinen Gleichung der osculirenden Fläche dritter Ordnung können wir, mit Berücksichtigung der Gleichungen (16.) und (17.) folgende Form geben:

$$(18.)\quad \begin{cases} z^2(Az+By+Cx+L)+z(Dy^2+Exy+Fx^2) \\ \quad +(\beta y^2+\gamma x^2+z)(My+Nx+1)=0. \end{cases}$$

Wenn wir in dieser Gleichung für den Ausdruck $(\beta y^2+\gamma x^2+z)$ den Werth $(-\alpha z^2)$, den uns die Gleichung (15.) giebt, schreiben, so kommt:

$$(19.)\quad z\{Az^2+(B-M\alpha)zy+(C-N\alpha)zx+(L-\alpha)z+Dy^2+Exy+Fx^2\}=0.$$

Die Form dieser Gleichung giebt uns folgenden Satz:

Wenn zwei Flächen zweiter und dritter Ordnung sich nach allen Richtungen hin vierpunctig osculiren, so berühren sich die beiden Flächen im Osculationspuncte nach einer ebenen Curve (zweiter Ordnung) und schneiden sich überdies auf einer zweiten Fläche zweiter Ordnung, die mit jenen beiden Flächen im Osculationspuncte dieselbe Tangential-Ebene hat.

Hiernach könnten wir die Discussion des Contactes höherer Ordnung zweier Flächen zweiten und dritten Grades auf die Theorie des Contactes zweier Flächen zweiter Ordnung zurükführen.

Die Durchschnitte der Tangential-Ebene mit der Fläche zweiter und dritter Ordnung haben folgende Gleichungen:

$$\beta y^2+\gamma x^2=0,$$
$$(My+Nx+1)(\beta y^2+\gamma x^2)=0.$$

Die Form dieser Gleichungen zeigt ebenfalls, dafs die beiden Flächen sich in einer Ebene berühren. Es besteht nemlich der Durchschnitt der Tangential-Ebene mit der Fläche dritter Ordnung, wenn β und γ von entgegengesetztem Zeichen sind, aus drei geraden Linien, von denen zwei in dem Osculations-Puncte sich schneiden und dieselben Linien sind, nach welchen die Fläche zweiter Ordnung von der Tangential-Ebene geschnitten wird, und von denen die dritte durch folgende Gleichung dargestellt wird:

$$(20.)\quad My+Nx+1=0.$$

Die beiden erstgenannten geraden Linien fallen ganz zusammen, wenn β oder γ Null sind, wonach zugleich die Fläche zweiter Ordnung ein Kegel wird. Wenn endlich β und γ von gleichem Zeichen sind, so besteht jener Durchschnitt aus einem conjugirten Puncte (nemlich einer ver-

schwindenden Ellipse) und einer geraden Linie, die wiederum durch die Gleichung (20.) dargestellt wird.

Die Form der Gleichung (20.) zeigt, dafs die bezügliche gerade Linie nie durch den Anfangspunct der Coordinaten, d. h. durch den Osculationspunct gehen kann; was auch a priori sich ergiebt, wenn man erwägt, dafs alsdann die Fläche dritter Ordnung mit der Tangential-Ebene einen Contact zweiter Ordnung hat, den eine Fläche zweiter Ordnung nie haben kann.

Aus diesen letzten Entwickelungen ergiebt sich auch sogleich die geometrische Deutung der beiden Bedingungs-Gleichungen, „dafs eine Fläche dritter Ordnung in einem gegebenen Puncte mit einer Fläche zweiter Ordnung einen vollständigen Contact von vier Puncten habe," auf welche wir in der 14ten Nummer geführt worden sind. Es ist nemlich offenbar zu diesem Ende erforderlich, dafs die Tangential-Ebene in dem gegebenen Puncte die gegebene Fläche nach dreien geraden Linien schneide, von denen zwei zusammenfallen und auf einen Punct sich reduciren können. (In dem Falle dreier geraden Linien wird die Fläche von der Tangential-Ebene in drei verschiedenen Puncten, nemlich in den Winkelpuncten des von jenen Linien gebildeten Dreicks berührt; wenn zwei Linien imaginär werden, findet nur ein Berührungspunct Statt; wenn endlich diese beiden Linien in eine einzige Linie zusammenfallen, so findet nach dieser ganzen Linie eine einfache Berührung und in einem Puncte derselben, dem Durchschnitte mit der dritten Linie, ein Contact der zweiten Ordnung Statt.)

3) Für einen vollständigen Contact der vierten Ordnung erhalten wir, neben den Bedingungs-Gleichungen (16.) und (17.), aus den Gleichungen (9.) noch folgende drei:

$$(21.)\quad \beta(L-\alpha) = D,\quad E = 0,\quad \gamma(L-\alpha) = F,$$

wonach sich die Gleichung der osculirenden Fläche (18.) in folgende verwandelt:

$$(22.)\quad \begin{cases} z^2(Az+By+Cx+L)+z(\beta y^2+\gamma x^2)(L-\alpha) \\ \quad +(\beta y^2+\gamma x^2+z)(My+Nx+1) = 0. \end{cases}$$

Substituiren wir endlich in diese Gleichung

$$-(\alpha z^2+z) \quad \text{für} \quad (\beta y^2+\gamma x^2),$$
$$-\alpha z^2 \quad = \quad (\beta y^2+\gamma x^2+z),$$

so verwandelt sich dieselbe in:

$$(23.)\quad z^2\{[A-(L-\alpha)\alpha]z+(B-M\alpha)y+(C-N\alpha)x\}=0.$$

Aus der Form dieser Gleichung ziehen wir folgenden Satz:

Wenn zwei Flächen zweiter und dritter Ordnung einen vollständigen Contact der vierten Ordnung haben, so berühren sie sich nach zwei Ebenen und schneiden sich überdies nach einer ebenen Curve, die durch den Berührungspunct der Flächen geht.

Es verdient bemerkt zu werden, dafs die Gleichung (23.) von β und γ durchaus unabhängig ist.

4) Für einen vollständigen Contact der fünften Ordnung ergeben sich neben den Gleichungen (16.), (17.) und (21.), aus (12.) noch folgende beide:

$$B=M\alpha,\quad C=N\alpha.$$

wonach sich die Gleichung der osculirenden Fläche (22.) in

$$(24.)\quad \begin{cases} z^2(Az+M\alpha y+N\alpha x+L)+z(\beta y^2+\gamma x^2)(L-\alpha) \\ \quad +(\beta y^2+\gamma x^2+z)(My+Nx+1)=0 \end{cases}$$

und die Gleichung (23.) in

$$z^3=0$$

verwandelt. Also:

Wenn zwei Flächen zweiter und dritter Ordnung sich nach allen Richtungen hin sechspunctig osculiren, so berühren sie sich nach dreien Ebenen und haben daher sonst keinen Punct mehr mit einander gemein.

5) Die Gleichung (13.) geht in vorliegendem Falle in folgende über:

$$\alpha(L-\alpha)=A.$$

Wenn auch diese Bedingungs-Gleichung befriedigt wird, so besteht die Fläche dritter Ordnung aus dem Systeme der gegebenen Fläche zweiter Ordnung und irgend einer Ebene. Wirklich stellt auch in diesem Falle die Gleichung:

$$[A-(L-\alpha)\alpha]z+(B-M\alpha)y+(C-N\alpha)x=0$$

keine bestimmte Durchschnitts-Ebene mehr dar, und die Gleichung (24.) verwandelt sich in folgende:

$$(\alpha z^2+\beta y^2+\gamma x^2+z)[(L-\alpha)z+My+Nx+1]=0.$$

12. Aus dem Bisherigen ergiebt sich folgende Bestimmung für die Zahl der zu erfüllenden Bedingungen, damit zwei Flächen zweiter

und dritter Ordnung in einem gegebenen Puncte nach allen Richtungen hin einen Contact der verschiedenen Ordnungen haben.

	Zahl der Bedingungs-Gleichungen.
Einpunctiger Contact:	1,
zweipunctiger - -	$1+2=3$,
dreipunctiger - -	$1+2+3=6$,
vierpunctiger - -	$1+2+3+4=10$,
fünfpunctiger - -	$1+2+3+4+3=13$,
sechspunctiger - -	$1+2+3+4+3+2=15$,
unendlichpunct. - -	$1+2+3+4+3+2+1=16$.

Wenn wir eine Fläche irgend einer $n$ten Ordnung statt der Fläche dritter Ordnung nehmen, so kann der Contact bis zu einem $2n$punctigen steigen, wo sich alsdann die beiden Flächen in n zusammenfallenden Ebenen berühren. Für einen $(n+1-m)$punctigen Contact erhalten wir alsdann

$$1+2+3....+(n+1-m)=\frac{(n+2-m)(n+1-m)}{1\,.\,2}$$

Bedingungs-Gleichungen, und für einen $(n+1+m)$punctigen Contact

$$1+2+....+(n+1)+n+(n-1)+....+(n+1-m)=\frac{(n+1)(n+2)+(2n+1-m)m}{1\,.\,2}$$

solcher Gleichungen.

22. Wenn der Grad der osculirenden Fläche höher ist, als die Ordnung des Contactes, so erhalten wir, wenn dieser Contact ein $n$punctiger sein soll, $\frac{n(n+1)}{1\,.\,2}$ Bedingungs-Gleichungen zu befriedigen. Alsdann giebt es überdies n Richtungen, nach welchen der Contact ein $(n+1)$punctiger ist. Die Zahl dieser Richtungen reducirt sich für die höhern Contact-Ordnungen, wenn die sich osculirenden Flächen von gegebenen Graden sind. Wir haben solcher Richtungen für zwei Flächen zweiter und dritter Ordnung, bei einem ein- zwei- drei- vier- und fünfpunctigen Contact, eine, zwei, drei, zwei und eine nachgewiesen. Um indefs hierbei nichts zu übersehen, müssen wir auch auf den Factor q' Rücksicht nehmen, den wir in der 15ten — 17ten Nummer vernachläfsigt haben. Nach der 15ten Nummer erhalten wir bei einem vollständigen vierpunctigen Contact, indem wir $g'=0$ setzen, zwei Werthe für φ, welche die Richtungen derjenigen beiden geraden Linien bezeichnen, nach welchen die Fläche zweiter Ordnung von der Tangential-Ebene geschnitten

wird. Diese beiden Linien liegen, nach der 20sten Nummer, bei dieser Ordnung des Contactes auch ganz in der Fläche dritter Ordnung. Legt man also durch eine derselben irgend eine Ebene, so sind die Durchschnitte der beiden Flächen mit dieser Ebene, einerseits, das System dieser geraden Linie und einer Linie zweiter Ordnung, und andrerseits das System derselben geraden Linie und einer zweiten. Man kann also den Contact dieser beiden Durchschnitte als einen unendlichpunctigen betrachten. Hieraus ist ersichtlich, wie die vier Richtungen eines fünfpunctigen Contactes, die bei einem vollständigen vierpunctigen Conctacte im Allgemeinen Statt haben, sich in dem vorliegenden Falle auf zwei reduciren. Eben so zeigt uns der quadratische Factor q'^2 in der 10ten Gleichung der 17ten Nummer, wie die fünf Richtungen eines sechspunctigen Contactes, die im Allgemeinen bei einem vollständigen Contacte Statt finden, sich in unserm Falle auf eine Richtung reduciren.

23. Wenn zwei Flächen einen vollständigen $n$punctigen Contact haben, so sind in dem allgemeinen Falle durch eine, nicht in Factoren zerlegbare Gleichung des $n$ten Grades diejenigen n Richtungen gegeben, nach denen der Contact ein $(n+1)$punctiger ist. Dieser Contact geht in einen $(n+2)$punctigen über, wenn zugleich mit dieser Gleichung eine ähnliche Gleichung des $(n+1)$ten Grades besteht, wodurch eine Bedingungs-Gleichung gegeben ist; er geht in einen $(n+3)$punctigen über, wenn mit diesen beiden Gleichungen eine dritte Gleichung des $(n+2)$ten Grades besteht, wodurch zwei Bedingungs-Gleichungen gegeben sind, u. s. w. Der Natur der Elimination nach giebt es alsdann nach allen jenen nRichtungen, statt des $n$punctigen Contactes, einen $(n+1)$punctigen, einen $(n+2)$punctigen u. s. w. Also:

Wenn (im Allgemeinen) zwei Flächen einen vollständigen Contact von nPuncten haben, so giebt es nRichtungen eines $(n+1)$punctigen Contactes, der aber auch ein höherer sein kann. Soll dieser Contact um pOrdnungen steigen, so erhalten wir pBedingungs-Gleichungen zu befriedigen: alsdann steigt der Contact aber nothwendig nach *allen* jenen nRichtungen zu einem $(n+p)$punctigen.

Dieser Satz erleidet bedeutende Modificationen, wenn die beiden Flächen von bestimmten Grade sind. Bei zwei sich osculirenden Flächen

zweiter und dritter Ordnung ergeben sich, wenn wir uns auf die Entwickelungen der 10ten — 18ten Nummer beziehen, folgende verschiedene Fälle.

I. Bei einem Contacte erster Ordnung giebt es
1) zwei Richtungen eines Contactes zweiter Ordnung;
2) zwei Richtungen eines Contactes dritter Ordnung, wenn die Gleichungen (3.) und (5.) zugleich bestehen;
3) zwei Richtungen eines Contactes vierter Ordnung, wenn (3.), (5.) und (8.) zugleich bestehen;
4) eine Richtung eines Contactes vierter und eine Richtung eines Contactes fünfter Ordnung, wenn (3.), (5.), (8.) und (11.) zugleich befriedigt werden;
5) gar keinen höhern Contact, oder, wenn wir lieber wollen: die Ordnung des höhern Contactes wird unendlich, wenn neben (3.) und (5.) die Gleichung $g' = 0$ besteht.

II. Bei einem Contacte zweiter Ordnung giebt es:
1) drei Richtungen eines Contactes dritter Ordnung;
2) eine Richtung eines Contactes dritter Ordnung, und zwei Richtungen eines Contactes vierter Ordnung, wenn (5.) und (8) zugleich bestehen;
3) eine Richtung eines Contactes dritter, eine Richtung eines Contactes vierter und eine Richtung eines Contactes fünfter Ordnung, wenn (5.), (8.) und (11.) zugleich befriedigt werden;
4) eine einzige Richtung eines Contactes dritter Ordnung, wenn neben (5.) auch die Gleichung $q' = 0$ besteht.

III. Bei einem Contacte dritter Ordnung giebt es
1) zwei Richtungen eines Contactes vierter Ordnung;
2) eine Richtung eines Contactes vierter und eine Richtung eines Contactes fünfter Ordnung, wenn (8.) und (11.) zugleich bestehen;
3) keinen höheren Contact, wenn zugleich die beiden Gleichungen (8.) und $g' = 0$ befriedigt werden.

IV. Bei einem Contacte vierter Ordnung giebt es
1) eine Richtung eines Contactes fünfter Ordnung;
2) keinen höhern Contact, wenn die Gleichung $g' = 0$ neben (11.) besteht.

Ich breche hier diese Entwickelungen ab. In einem nächsten Aufsatze, der dieselben gewissermafsen ergänzen wird, gedenke ich mich mit der Theorie der Osculation zwischen Flächen und Linien doppelter Krümmung zu beschäftigen. Diese Theorie ist der Theorie der Osculation ebener Curven ganz analog; denn in beiden Fällen haben wir es mit dem Zusammenfallen von Durchschnittspuncten zu thun. Bleiben wir z. B. bei Flächen zweiter Ordnung und solchen Curven stehen, die der Durchschnitt zweier solcher Flächen sind, so haben wir, da drei Flächen zweiter Ordnung im Allgemeinen sich in acht Puncten schneiden, auch acht verschiedene Arten des Contactes nachzuweisen.

Bonn, am 16. Januar 1829.

28.

De functionibus ellipticis commentatio.

(Auct. *C. G. J. Jacobi*, prof. math. ord. Regiom.)

A. De transformatione functionum $E(u)$, $\Pi(u, \varepsilon)$, quae ad speciem secundam et tertiam integralium ellipticarum pertinent. De transformatione functionis $\Omega(u)$.

1.

Iisdem, quas in fundamentis proposui, adhibitis denominationibus, sit n numerus quilibet impar, sint m, m' numeri quilibet, per eundem ipsius n factorem uterque simul non divisibiles: demonstravi in Fundamentis Theorema in theoria transformationis functionum ellipticarum fundamentale, posito $\omega = \frac{mK + m'iK'}{n}$,

$$\lambda = \{\sin\mathrm{coam}\, 2\omega . \sin\mathrm{coam}\, 4\omega \ldots . \sin\mathrm{coam}\,(n-1)\omega\}^4,$$

$$M = (-1)^{\frac{n-1}{2}} . \left\{\frac{\sin\mathrm{coam}\, 2\omega . \sin\mathrm{coam}\, 4\omega \ldots . \sin\mathrm{coam}\,(n-1)\omega}{\sin\mathrm{am}\, 2\omega . \sin\mathrm{am}\, 4\omega \ldots . \sin\mathrm{am}\,(n-1)\omega}\right\}^2,$$

atque insuper

$$x = \sin\mathrm{am}\,(u), \quad y = \sin\mathrm{am}\left(\frac{u}{M}, \lambda\right),$$

fore

$$y = \frac{x}{M} \cdot \frac{\left(1 - \frac{x^2}{\sin^2\mathrm{am}\, 2\omega}\right)\left(1 - \frac{x^2}{\sin^2\mathrm{am}\, 4\omega}\right) \ldots . \left(1 - \frac{x^2}{\sin^2\mathrm{am}\,(n-1)\omega}\right)}{(1 - \varkappa^2 \sin^2\mathrm{am}\, 2\omega . x^2)(1 - \varkappa^2 \sin^2\mathrm{am}\, 4\omega . x^2) \ldots . (1 - \varkappa^2 \sin^2\mathrm{am}\,(n-1)\omega . x^2)}.$$

E qua deinde formula derivavimus (Fund. pag. 47.) equationem identicam, quae valet, quaecunque sit x quantitas:

1) $x\Pi(x^2 - \sin^2\mathrm{am}\, 2p\omega) - \frac{\lambda}{\varkappa M} . \sin\mathrm{am}\left(\frac{u}{M}, \lambda\right)\Pi\left(x^2 - \frac{1}{\lambda^2 \sin^2\mathrm{am}\, 2p\omega}\right) =$

$[x - \sin\mathrm{am}\, u][x - \sin\mathrm{am}\,(u + 4\omega)] \ldots . [x - \sin\mathrm{am}\,(u + 4(n-1)\omega)]$,

siquidem in productis praefixo Π designatis numero p tribuuntur valores 1, 2, 3, ..., $\frac{n-1}{2}$.

Formula 1., singulis elementi x dignitatibus in utraque aequationis parte inter se comparatis, suppeditat nobis summas combinationum expressionum

$\sin\mathrm{am}\,(u)$, $\sin\mathrm{am}\,(u + 4\omega)$, $\sin\mathrm{am}\,(u + 8\omega)$, ..., $\sin\mathrm{am}\,(u + 4(n-1)\omega)$.

Fit e. g. summa harum expressionum =

$$\frac{\lambda}{\varkappa M}\sin\mathrm{am}\left(\frac{u}{M},\lambda\right);$$

summa ambarum =

$$-\{\sin^2\mathrm{am}\,2\omega+\sin^2\mathrm{am}\,4\omega+\ldots.+\sin^2\mathrm{am}\,(n-1)\omega\},$$

quam quantitatem constantem designabimus per $-\varrho$. Hinc etiam deducitur summa quadratorum

$$\sin^2\mathrm{am}\,(u)+\sin^2\mathrm{am}\,(u+4\omega)+\ldots.+\sin^2\mathrm{am}\,(u+4(n-1)\omega)=\frac{\lambda^2}{\varkappa^2M^2}+2\varrho,$$

sive

$$2)\quad \frac{\lambda^2}{\varkappa^2M^2}.\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{u}{M},\lambda\right)=\Sigma\sin^2\mathrm{am}\,(u)-2\varrho,$$

siquidem per $\Sigma\varphi(u)$ designamus expressionem

$$\Sigma\varphi(u)=\varphi(u)+\varphi(u+4\omega)+\varphi(u+8\omega)+\ldots.+\varphi(u+4(n-1)\omega).$$

E 2. sequitur etiam:

$$3)\quad \frac{\lambda^2}{\varkappa^2M^2}.\cos^2\mathrm{am}\left(\frac{u}{M},\lambda\right)=\Sigma\cos^2\mathrm{am}\,(u)-2\sigma,$$

$$4)\quad \frac{1}{M^2}.\Delta^2\mathrm{am}\left(\frac{u}{M},\lambda\right)=\Sigma\Delta^2\mathrm{am}\,(u)+2\tau,$$

siquidem

$$5)\quad \frac{\lambda^2}{\varkappa^2M^2}=n-2\varrho-2\sigma,$$

$$6)\quad \frac{1}{M^2}=n-2\varkappa^2\varrho+2\tau.$$

Expressio $\cos\mathrm{am}\left(\frac{u}{M},\lambda\right)$, cum evanescat, posito $u=K$, obtinemus e 3.:

$$7)\quad \sigma=\cos^2\mathrm{coam}\,2\omega+\cos^2\mathrm{coam}\,4\omega+\ldots.+\cos^2\mathrm{coam}\,(n-1)\omega.$$

Expressio $\Delta\mathrm{am}\left(\frac{u}{M},\lambda\right)$ cum evanescat, posito $u=K+iK'$, atque insuper sit: $\Delta\mathrm{am}\,(u+K+iK')=\Delta\mathrm{coam}\,(u+iK')=i\varkappa'\tang\mathrm{am}\,(u)$ (v. Fund. p. 35.), e 4. obtinemus:

$$8)\quad \tau=\varkappa'\varkappa'\{\tang^2\mathrm{am}\,2\omega+\tang^2\mathrm{am}\,4\omega+\ldots.+\tang^2\mathrm{am}\,(n-1)\omega\}.$$

2.

Formulas 2., 3., 4. etiam hunc in modum repraesentare licet:

$$9)\quad \frac{\lambda^2}{\varkappa^2M^2}.\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{u}{M},\lambda\right)$$
$$=\sin^2\mathrm{am}\,(u)+\Sigma\{\sin^2\mathrm{am}\,(u+2p\omega)+\sin^2\mathrm{am}\,(u-2p\omega\}-2\varrho,$$

$$10)\quad \frac{\lambda^2}{\varkappa^2M^2}.\cos^2\mathrm{am}\left(\frac{u}{M},\lambda\right)$$
$$=\cos^2\mathrm{am}\,(u)+\Sigma\{\cos^2\mathrm{am}\,(u+2p\omega)+\cos^2\mathrm{am}\,(u-2p\omega)\}-2\sigma,$$

$$11)\quad \frac{1}{M^2}.\Delta^2 \operatorname{am}\left(\frac{u}{M},\lambda\right)$$
$$= \Delta^2 \operatorname{am}(u) + \Sigma\{\Delta^2 \operatorname{am}(u+2p\omega) + \Delta^2 \operatorname{am}(u-2p\omega)\} + 2\tau,$$

semper tribuendo numero p valores 1, 2, 3, ..., $\frac{n-1}{2}$.

Ponatur iam

$$\int_0^u \Delta^2 \operatorname{am}(u).\partial u = E(u),$$

qui paulo discrepat notationis modus ab eo, quem Cl. Legendre adhibuit, quo etiam in fundamentis passim usi sumus. Posito enim $\varphi = \operatorname{am}(u)$, designat ille integralia elliptice, quae ad speciem secundam pertinet, per

$$E(\varphi) = E\operatorname{am}(u) = \int_0^{\varphi} \Delta(\varphi).\partial\varphi = \int_0^u \Delta^2 \operatorname{am}(u)\,\partial u;$$

ita ut nobis $E(u)$, quod illi $E\operatorname{am}(u)$. Porro per characteram E, argumento non adiecto, semper designabimus functionem

$$E = E(K) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Delta(\varphi).\partial\varphi,$$

quam ille per E^1 denotat; eodemque modo per E' functionen

$$E' = E(K', \varkappa) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Delta(\varphi, \varkappa').\partial\varphi.$$

His stabilitis, fit

$$\int_0^{\cdot} \partial u\{\Delta^2 \operatorname{am}(u+2p\omega) + \Delta^2 \operatorname{am}(u-2p\omega)\} = E(u+2p\omega) + E(u-2p\omega).$$

Constans non adiicienda erit, quia utraque aequationis pars posito $u = 0$ evanescit *). Unde e 11., integratione facta ab $u = 0$ usque ad $u = u$:

$$12)\quad \frac{E\left(\frac{u}{M},\lambda\right)}{M} = E(u) + \Sigma\{E(u+2p\omega) + E(u-2p\omega)\} - 2\tau.u.$$

Formulam 12. transformare licet ope theorematis noti de additione integralium ellipticorum, quae ad speciem secundam pertinent:

$$E(u+a) + E(u-a) = 2E(u) - \frac{2\varkappa^2 \sin^2\operatorname{am} a.\sin\operatorname{am} u.\cos\operatorname{am} u.\Delta\operatorname{am} u}{1-\varkappa^2\sin^2\operatorname{am} a.\sin^2\operatorname{am} u},$$

quod differentiatione facta facile ex elementis comprobatur. v. Fund. p. 138. Cuius ope 12. in hanc abit:

$$13)\quad nE(u) - \frac{1}{M}.E\left(\frac{u}{M},\lambda\right) + 2\tau.u =$$
$$2\varkappa^2 \sin\operatorname{am}(u)\cos\operatorname{am}(u)\Delta\operatorname{am}(u).\Sigma\frac{\sin^2\operatorname{am}(2p\omega)}{1-\varkappa^2\sin^2\operatorname{am}(2p\omega).\sin^2\operatorname{am} u},$$

*) Fit enim generaliter $E(-u) = -E(u)$.

Formulae 12., 13. concernunt transformationem integralium ellipticorum, quae ad speciem secundam pertinent. Easdem mox sub forma commodiore exhibebimus.

Ponamus

$$\int_0^u E(u).\partial u = \log\Omega(u),$$

cum sit

$$\frac{2\varkappa^2 \sin\mathrm{am}(u)\cos\mathrm{am}(u)\triangle\mathrm{am}(u).\sin^2\mathrm{am}(2p\omega)}{1-\varkappa^2\sin^2\mathrm{am}(2p\omega).\sin^2\mathrm{am}(u)} = \frac{-\partial.\log(1-\varkappa^2\sin^2\mathrm{am}\,2p\omega.\sin^2\mathrm{am}\,u)}{\partial u},$$

nanciscimur e 13., iterum integratione facta ab $u=0$ usque ad $u=u$:

$$\varkappa\log\Omega(u)-\log\Omega\left(\frac{u}{M},\lambda\right)+\tau.uu = -\Sigma\log(1-\varkappa^2\sin^2\mathrm{am}\,2p\omega.\sin^2\mathrm{am}\,u),$$

sive

$$14)\quad e^{-\tau.uu}.\frac{\Omega\left(\frac{u}{M},\lambda\right)}{\Omega^n(u)} = \Pi(1-\varkappa^2\sin^2\mathrm{am}\,2p\omega.\sin^2\mathrm{am}\,u),$$

siquidem, ut supra, designatur per $\Pi\varphi(p)$ productum

$$\Pi\varphi(p) = \varphi(1)\varphi(2)\varphi(3)\ldots.\varphi\left(\frac{n-1}{2}\right),$$

Posito $\sin\mathrm{am}(u)=x$, 14. ita repraesentatur:

$$16)\quad e^{-\tau.uu}.\frac{\Omega\left(\frac{u}{M},\lambda\right)}{\Omega^n(u)} =$$

$$(1-\varkappa^2\sin^2\mathrm{am}\,2\omega.xx)(1-\varkappa^2\sin^2\mathrm{am}\,4\omega.xx)\ldots.(1-\varkappa^2\sin^2\mathrm{am}\,(n-1)\omega.xx).$$

Haec expressio denominatorem constituit substitutionis rationalis, quae ad transformationem functionum ellipticarum adhibita est (v. supra)

$$\sin\mathrm{am}\left(\frac{u}{M},\lambda\right) = \frac{\frac{x}{M}\left(1-\frac{xx}{\sin^2\mathrm{am}\,2\omega}\right)\left(1-\frac{xx}{\sin^2\mathrm{am}\,4\omega}\right)\ldots.\left(1-\frac{xx}{\sin^2\mathrm{am}\,(n-1)\omega}\right)}{(1-\varkappa^2\sin^2\mathrm{am}2\omega.xx)(1-\varkappa^2\sin^2\mathrm{am}4\omega.xx)\ldots.(1-\varkappa^2\sin^2\mathrm{am}(n-1)\omega.xx)};$$

quem igitur denominatorem ope transcendentis novae $\Omega(u)$ seorsim exprimere licet. Quod est gravissimum theorema et maximi usus in universa theoria functionum ellipticarum.

Sit substitutio illa, siquidem $x=\sin\mathrm{am}(u)$:

$$\sin\mathrm{am}\left(\frac{u}{M},\lambda\right) = \frac{x}{M}.\frac{1+A'x^2+A''x^4+\ldots.+A^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}x^{n-1}}{1+B'x^2+B''x^4+\ldots.+B^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}x^{n-1}},$$

posito

$$1+A'x^2+A''x^4+\ldots.+A^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}x^{n-1} = \Pi\left(1-\frac{\sin^2\mathrm{am}(u)}{\sin^2\mathrm{am}(2p\omega)}\right) =$$

$$\left(1-\frac{\sin^2\mathrm{am}\,u}{\sin^2\mathrm{am}\,2\omega}\right)\left(1-\frac{\sin^2\mathrm{am}\,u}{\sin^2\mathrm{am}\,4\omega}\right)\ldots.\left(1-\frac{\sin^2\mathrm{am}(u)}{\sin^2\mathrm{am}\,(n-1)\omega}\right),$$

$$1+B'x^2+B''x^4+\ldots.+B^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}x^{n-1}=\Pi(1-\varkappa^2\sin^2\mathrm{am}\,(2p\omega)\sin^2\mathrm{am}\,(u))=$$
$$(1-\varkappa^2\sin^2\mathrm{am}\,2\omega\sin^2\mathrm{am}\,u)(1-\varkappa^2\sin^2\mathrm{am}\,4\omega\sin^2\mathrm{am}\,u)\ldots.$$
$$\ldots.(1-\varkappa^2\sin^2\mathrm{am}\,(n-1)\omega\sin^2\mathrm{am}\,(u),$$

erit:

$$16)\quad e^{-\tau.uu}.\frac{\Omega\left(\frac{u}{M},\lambda\right)}{\Omega^n(u)}=1+B'\sin^2\mathrm{am}\,u+B''\sin^4\mathrm{am}\,u+\ldots.+B^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}\sin^{n-1}\mathrm{am}\,(u).$$

Hinc sequitur, sumtis logarithmis et differentiatione instituta,

$$17)\quad nE(u)-\frac{1}{M}E\left(\frac{u}{M},\lambda\right)+2\tau.u=$$
$$-\frac{\cos\mathrm{am}\,(u)\triangle\mathrm{am}\,(u)\left\{2B'\sin\mathrm{am}\,u+4B''\sin^3\mathrm{am}\,u+\ldots.+(n-1)\,B^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}\sin^{n-2}\mathrm{am}\,u\right\}}{1+B'\sin^2\mathrm{am}\,u+B''\sin^4\mathrm{am}\,u+\ldots.+B^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}\sin^{n-1}\mathrm{am}\,u}.$$

Quae docet formula elegantissima, quomodo ex ipso denominatore expressionis, pro functione transformata $\sin\mathrm{am}\left(\frac{u}{M},\lambda\right)$ inventae, continuo eruatur transformatio integralis elliptici, quod ad speciem secundam pertinet.

Valorem constantis τ eruis e 17., ponendo u infinite parvum, quo facto $E(u)=u$, $\sin\mathrm{am}\,(u)=u$, $\cos\mathrm{am}\,(u)=\triangle\mathrm{am}\,(u)=1$; unde fit

$$n-\frac{1}{MM}+2\tau=-2B',$$

id quod, cum sit $B'=-\varkappa^2\varrho$, cum formula 6. convenit.

Adnotemus adhuc, ubi a formula 12. proficisceris, integratione facta obtineri:

$$18)\quad \Omega\left(\frac{u}{M},\lambda\right)=e^{-\tau.uu}\Omega(u)\frac{\Omega(u+2\omega)\,\Omega(u+4\omega)\ldots.\Omega(u+(n-1)\omega)}{\Omega 2\omega.\Omega 4\omega\ldots.\Omega(n-1)\omega}\times$$
$$\frac{\Omega(u-2\omega)\,\Omega(u-4\omega)\ldots.\Omega(u-(n-1)\omega)}{\Omega 2\omega.\Omega 4\omega\ldots.\Omega(n-1)\omega}.$$

3.

Ponamus brevitatis causa, siquidem $x=\sin\mathrm{am}\,u$,

$$U=\frac{x}{M}\left(1+A'x^2+A''x^4+\ldots.+A^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}x^{n-1}\right),$$
$$V=\quad 1+B'x^2+B''x^4+\ldots.+B^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}x^{n-1},$$

ita ut

$$\sin\mathrm{am}\left(\frac{u}{M},\lambda\right)=\frac{U}{V}.$$

Fit 17.:

$$nE(u)-\frac{1}{M}E\left(\frac{u}{M},\lambda\right)+2\tau u=-\frac{\partial V}{V\partial u},$$

unde differentiatione facta,

$$n\Delta^2 \operatorname{am} u - \frac{1}{M^2}\Delta^2 \operatorname{am}\left(\frac{u}{M},\lambda\right) + 2\tau = \frac{\partial V \partial V - V\partial^2 V}{VV\partial u^2},$$

quae formula, advocata 6.

$$\frac{1}{M^2} = n - 2\varkappa^2\varrho + 2\tau,$$

in hanc abit:

19) $$-n\varkappa^2 \sin^2 \operatorname{am} u + \frac{\lambda^2}{M^2}\sin^2 \operatorname{am}\left(\frac{u}{M},\lambda\right) + 2\varkappa^2\varrho = \frac{\partial V \partial V - V\partial^2 V}{VV.\partial u^2},$$

sive, multiplicatione facta per VV, in hanc:

$$\varkappa^2(2\varrho - n\sin^2 \operatorname{am} u)VV + \frac{\lambda^2}{M^2}.UU = \frac{\partial V}{\partial u}.\frac{\partial V}{\partial u} - V\frac{\partial^2 V}{\partial u^2}.$$

Porro vidimus in fundamentis, posito $u + iK'$ loco u, sive $\frac{1}{\varkappa \sin \operatorname{am} u}$ loco $\sin \operatorname{am} u$, abire

$$V \text{ in } \sqrt{\left(\frac{\lambda}{\varkappa^n}\right)}.\frac{U}{\sin^2 \operatorname{am} u}, \quad \sin \operatorname{am}\left(\frac{u}{M},\lambda\right) \text{ in } \frac{1}{\lambda \sin \operatorname{am}\left(\frac{u}{M},\lambda\right)},$$

unde expressio

$$\frac{\partial V \partial V - V\partial^2 V}{VV.\partial u^2} = -\frac{\partial^2 \log V}{\partial u^2}$$

abit in

$$\frac{n\partial^2 \log \sin \operatorname{am} u}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \log U}{\partial u^2} = u\left\{\varkappa^2 \sin^2 \operatorname{am} u - \frac{1}{\sin^2 \operatorname{am} u}\right\} - \frac{\partial^2 \log U}{\partial u^2}\ ^*),$$

ideoque 19. in

$$-n\varkappa^2 \sin^2 \operatorname{am} u + \frac{1}{M^2 \sin^2 \operatorname{am}\left(\frac{u}{M},\lambda\right)} + 2\varkappa^2\varrho = \frac{\partial U \partial U - U\partial^2 U}{UU.\partial u^2},$$

unde, multiplicatione facta per UU, fit:

$$\varkappa^2(2\varrho - n\sin^2 \operatorname{am} u)UU + \frac{1}{M^2}VV = \frac{\partial U \partial U - U\partial^2 U}{\partial u^2}.$$

Formulis inventis:

20) $$\varkappa^2(2\varrho - n\sin^2 \operatorname{am} u)VV + \frac{\lambda^2}{M^2}UU = \frac{\partial V}{\partial u}.\frac{\partial V}{\partial u} - V\frac{\partial^2 V}{\partial u^2},$$

21) $$\varkappa^2(2\varrho - n\sin^2 \operatorname{am} u)UU + \frac{1}{M^2}VV = \frac{\partial U}{\partial u}.\frac{\partial U}{\partial u} - U\frac{\partial^2 U}{\partial u^2}$$

adiungi debet haec

22) $$V\frac{\partial U}{\partial u} - U\frac{\partial V}{\partial u} = \frac{1}{M}\sqrt{[(VV - UU)(VV - \lambda^2 UU)]},$$

quae e differentiatione aequationis $\sin \operatorname{am}\left(\frac{u}{M},\lambda\right) = \frac{U}{V}$ prodit; cuius ope e 20., 21. quantitatum U, V alterutram eliminare licet; quo facto per-

*) v. Fund. p. 112. 1.

venietur ad aequationem differentialem tertii ordinis. Quod sane est theorema memorabile, satis reconditum, numeratorem et denominatorem substitutionis, U, V singulos definiri posse per aequationem differentialem tertii ordinis.

Ipsas aequationes differentiales tertii ordinis prolixitatis causa non apponam; omnibus casibus commodius videbitur, aequationibus 20. — 22., quae earum locum tenent, iunctis uti. Quarum usum insignem ad formationem algebraicam functionum U, V, sive ipsius, quae ad transformationem ducit, substitutionis alio loco fusius demonstrabo. Hoc loco tantum adnotemus adhuc verificationem formularum 20., 21., sequentem.

Divisa enim 20. per VV, 21. per UU, prodit:

$$\varkappa^2(2\varrho - n\sin^2\mathrm{am}\,u) + \frac{\lambda^2}{M^2}\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{u}{M},\lambda\right) = \frac{-\partial^2\log V}{\partial u^2},$$

$$\varkappa(2\varrho - n\sin^2\mathrm{am}\,u) + \frac{1}{M^2\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{u}{M},\lambda\right)} = -\frac{\partial^2\log U}{\partial u^2},$$

unde, subtractione facta:

$$\frac{1}{M^2}\left\{\lambda^2\sin^2\mathrm{am}\,u - \frac{1}{\sin^2 am\left(\frac{u}{M},\lambda\right)}\right\} = \frac{\partial^2\log\sin\mathrm{am}\left(\frac{u}{M},\lambda\right)}{\partial u^2},$$

quae statim prodit e formula:

$$\frac{\partial^2\log\sin\mathrm{am}\,u}{\partial u^2} = \varkappa^2\sin^2\mathrm{am}\,u - \frac{1}{\sin^2\mathrm{am}\,u},$$

posito $\frac{u}{M}$ loco u et λ loco $\varkappa$.

Integrale completum aequationem differentialium tertii ordinis, quibus functiones U, V definiuntur, in promtu esse non videtur.

4.

Integrata formula supra allegata §. 2.:

$$23)\quad E(u+a)+E(u-a) = 2E(u) - \frac{2\varkappa^2\sin^2\mathrm{am}\,a\,.\sin\mathrm{am}\,u\cos\mathrm{am}\,u\triangle\mathrm{am}\,u}{1-\varkappa^2\sin^2\mathrm{am}\,a\,.\sin^2\mathrm{am}\,u}$$

inde a $u = 0$ usque ad $u = u$, obtinemus:

$$\log\frac{\Omega(u+a)}{\Omega(a)} + \log\frac{\Omega(u-a)}{\Omega(a)} = 2\log\Omega(u) + \log(1-\varkappa^2\sin^2\mathrm{am}\,a\,.\sin^2\mathrm{am}\,u),$$

unde prodit formula in analysi functionis Ω fundamentalis

$$24)\quad \frac{\Omega(u+a)\Omega(u-a)}{\Omega^2(a)\Omega^2(u)} = 1-\varkappa^2\sin^2\mathrm{am}\,a\,.\sin^2\mathrm{am}\,u.$$

E formula 23., a et u inter se commutatis, fit

25) $$E(u+a)-E(u-a) = 2E(a) - \frac{2\varkappa^2 \sin\mathrm{am}\,a \cos\mathrm{am}\,a \,\Delta\mathrm{am}\,a \,.\, \sin^2\mathrm{am}\,u}{1-\varkappa^2\sin^2\mathrm{am}\,a\,.\,\sin^2\mathrm{am}\,u},$$

qua integrato inde a $u=0$, obtinemus:

$$\log\frac{\Omega(u+a)}{\Omega(u-a)} - 2uE(a) = -2\varkappa^2 \sin\mathrm{am}\,a\cos\mathrm{am}\,\Delta\mathrm{am}\,a\int_0^u \frac{\sin^2\mathrm{am}\,u\,.\,\partial u}{1-\varkappa^2\sin^2\mathrm{am}\,a\,.\,\sin^2\mathrm{am}\,u}.$$

Designavi in Fundamentis per characteram $\Pi(u,a)$ integrale, quod secundum eam, quam Cl. Legendre instituit, distributionem integralium ellipticorum in classes, ad speciem tertiam pertinet,

$$\Pi(u,a) = \varkappa^2 \sin\mathrm{am}\,a\cos\mathrm{am}\,a\,\Delta\mathrm{am}\,a\int_0^u \frac{\sin^2\mathrm{am}\,u\,.\,\partial u}{1-\varkappa^2\sin^2\mathrm{am}\,a\,.\,\sin^2\mathrm{am}\,u},$$

qua adhibita denotatione, fit:

$$26)\quad \Pi(u,a) = uE(a) + \tfrac{1}{2}\log\sqrt{\frac{\Omega(u-a)}{\Omega(u+a)}},$$

Quae est formula fundamentalis pro reductione integralium ellipticorum, quae ad speciem tertiam pertinent, ad fuunctiones $E(u)$, $\Omega(u)$. Cf. Fund. §§. 49. sqq.

Ope formulae 26. e formulis pro transformatione functionum $E(u)$ $\Omega(u)$ inventis, exemplo nanciscimur eas, quae transformationem integralium ellipticorum tertiae speciei sive functionis Π concernunt. Fit enim e 26., posito $\frac{u}{M}$, $\frac{a}{M}$, λ loco u, a, $\varkappa$:

$$27)\quad \Pi\left(\frac{u}{M},\frac{a}{M},\lambda\right) = \frac{u}{M}E\left(\frac{a}{M},\lambda\right) + \tfrac{1}{2}\log\frac{\Omega\left(\frac{u-a}{M},\lambda\right)}{\Omega\left(\frac{u+a}{M},\lambda\right)};$$

de qua formula subtrahamus sequentem

$$n\Pi(u,a) = nuE(a) + \frac{n}{2}\log\frac{\Omega(u-a)}{\Omega(u+a)},$$

prodit:

$$28)\quad \Pi\left(\frac{u}{M},\frac{a}{M},\lambda\right) - n\Pi(u,a) =$$

$$u\left\{\frac{1}{M}E\left(\frac{a}{M},\lambda\right) - nE(a)\right\} + \tfrac{1}{2}\log\frac{\Omega\left(\frac{u-a}{M},\lambda\right)}{\Omega^n(u-a)} - \tfrac{1}{2}\log\frac{\Omega\left(\frac{u+a}{M},\lambda\right)}{\Omega^n(u+a)},$$

quae formula ope 16., 17. in sequentem abit:

$$29)\quad \Pi\left(\frac{u}{M},\frac{a}{M},\lambda\right) - n\Pi(u,a) =$$

$$\left\{\frac{\cos\mathrm{am}\,a\,\Delta\mathrm{am}\,a\left\{2B'\sin\mathrm{am}\,a + 4B''\sin^3\mathrm{am}\,a + \ldots + (n-1)B^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}\sin^{n-2}\mathrm{am}\,a\right\}}{1+B'\sin^2\mathrm{am}\,a + B''\sin^4\mathrm{am}\,a + \ldots + B^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}\sin^{n-1}\mathrm{am}\,a}\right\}u$$

$$+\tfrac{1}{2}\log\frac{1+B'\sin^2\mathrm{am}\,(u-a)+B''\sin^4\mathrm{am}\,(u-a)+\ldots+B^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}\sin^{n-1}\mathrm{am}\,(u-a)}{1+B'\sin^2\mathrm{am}\,(u+a)+B''\sin^4\mathrm{am}\,(u+a)+\ldots+B^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}\sin^{n-1}\mathrm{am}\,(u+a)},$$

quae formula fundamentalis docet, quomodo ex ipso denominatore substitutionis confestim eruatur transformatio integralium ellipticorum, quae ad speciem tertiam pertinent.

Eandem aliter exhibere licet per formulas 12., 18., quarum ope fit e 27.:

$$\Pi\left(\frac{u}{M}, \frac{a}{M}, \lambda\right) - \frac{u}{M} E\left(\frac{a}{M}, \lambda\right) - 2\tau a u =$$

$$\tfrac{1}{2}\log\frac{\Omega(u-a)}{\Phi(u+u)} + \Sigma\left\{\tfrac{1}{2}\log\frac{\Omega(u+2p\omega-a)}{\Omega(u+2p\omega+a)} + \tfrac{1}{2}\log\frac{\Omega(u-2p\omega-a)}{\Omega(u-2p\omega+a)}\right\} =$$

$$\tfrac{1}{2}\log\frac{\Omega(u-a)}{\Omega(u+a)} + \Sigma\left\{\tfrac{1}{2}\log\frac{\Omega(u-a+2p\omega)}{\Omega(u+a-2p\omega)} + \tfrac{1}{2}\log\frac{\Omega(u-a-2p\omega)}{\Omega(u+a+2p\omega)}\right\},$$

unde sequentes duas deducimus formulas:

$$30)\quad \Pi\left(\frac{u}{M}, \frac{a}{M}, \lambda\right) + u\left\{nE(a) - \frac{1}{M}E\left(\frac{a}{M}, \lambda\right) - 2\tau a\right\} =$$

$$\Pi(u,a) + \Pi(u+2\omega,a) + \Pi(u+4\omega,a) + \ldots + \Pi(u+(n-1)\omega,a)$$
$$+ \Pi(u-2\omega,a) + \Pi(u-4\omega,a) + \ldots + \Pi(u-(n-1)\omega,a),$$

$$31)\quad \Pi\left(\frac{u}{M}, \frac{a}{M}, \lambda\right) =$$

$$\Pi(u,a) + \Pi(u,a+2\omega) + \Pi(u,a+4\omega) + \ldots + \Pi(u,a+(n-1)\omega)$$
$$+ \Pi(u,a-2\omega) + \Pi(u,a-4\omega) + \ldots + \Pi(u,a-(n-1)\omega);$$

quae et ipsae sunt formulae novae fundamentales. Dedimus in Fund. p. 161. 7. formulam

$$\Pi(u,a+b) + \Pi(u,a-b)\,2\Pi(u,a) =$$

$$-2\varkappa^2 \sin\mathrm{am}\,a\,\cos\mathrm{am}\,a\,\Delta\mathrm{am}\,a\,.\,\frac{\sin^2\mathrm{am}\,b}{1-\varkappa^2\sin^2\mathrm{am}\,b\sin^2\mathrm{am}\,a}$$
$$+\tfrac{1}{2}\log\frac{1-\varkappa^2\sin^2\mathrm{am}\,b\sin^2\mathrm{am}\,(u-a)}{1-\varkappa^2\sin^2\mathrm{am}\,b\sin^2\mathrm{am}\,(u+a)},$$

cuius ope fit e 31.:

$$31)\quad \Pi\left(\frac{u}{M}, \frac{a}{M}, \lambda\right) - n\Pi(u,a) =$$

$$-2\varkappa^2 \sin\mathrm{am}\,a\,\cos\mathrm{am}\,a\,\Delta\mathrm{am}\,a\,\Sigma\frac{\sin^2\mathrm{am}\,2p\omega}{1-\varkappa^2\sin^2\mathrm{am}\,2p\omega\,.\,\sin^2\mathrm{am}\,a}$$
$$+\Sigma\log\sqrt{\frac{1-\varkappa^2\sin^2\mathrm{am}\,2p\omega\sin^2\mathrm{am}\,(u-a)}{1-\varkappa^2\sin^2\mathrm{am}\,2p\omega\sin^2\mathrm{am}\,(u+a)}},$$

siquidem numero p valores tribuis $1, 2, 3, \ldots, \frac{n-1}{2}$. Quae facile etiam e 29. sequitur formula.

B. De functionibus simpliciter periodicis $\chi(u) = e^{ruu}\Omega(u)$, earumque singularibus proprietatibus.

§. 5.

Accuratius examinemus functionem nostram $\Omega(u)$, eiusque primum reductionem pro argumento imaginaris formae iu ad argumentum reale tradamus.

Posito $\sin\varphi = i\,\mathrm{tang}\,\psi$, fit

$$\frac{\partial\varphi}{\Delta(\varphi)} = \frac{i\partial\psi}{\Delta(\psi,\varkappa')},$$

$$\Delta(\varphi).\partial\varphi = \frac{i\Delta(\psi,\varkappa')\partial\psi}{\cos\psi^2},$$

unde integratione facta:

$$\int_0^{\varphi}\Delta(\varphi).\partial\varphi = i\left\{\mathrm{tang}\,\psi\,\Delta(\psi,\varkappa') + \int_0^{\psi}\frac{\varkappa'\varkappa'\sin^2\psi}{\Delta(\psi,\varkappa')}.\partial\psi\right\}.$$

Hac formula, posito

$$\varphi = \mathrm{am}(iu,\varkappa), \text{ unde } \psi = \mathrm{am}(u,\varkappa'),$$

e notatione nostra ita repraesentatur:

1) $E\mathrm{am}(iu) = i\{\mathrm{tang}\,\mathrm{am}(u,\varkappa')\Delta\,\mathrm{am}(u,\varkappa') + u - E(u,\varkappa')\}$,

unde integratione facta:

$$\log\Omega(iu) = \log\cos\mathrm{am}(u,\varkappa') - \frac{uu}{2} + \log\Omega(u,\varkappa'),$$

sive

2) $\Omega(iu) = e^{-\frac{uu}{2}}\cos\mathrm{am}(u,\varkappa')\,\Omega(u,\varkappa')$.

Cf. Fund. pag. 162. 1., 2.

6.

His praemissis, quaeramus iam, quasnam subeat mutationes functio $\Omega(u)$, dum functiones ellipticae immutatae manent, i. e. dum argumentum u mutatur in $u + 4mK + 4m'iK'$, designantibus m, m' numeros positivos sive negativos.

Nota est ex elementis formula

3) $E(u + 2mK) = E(u) + 2mE$,

siquidem per simplicem litteram E, argumento non addito, designamus functionem integram $E(K)$, quam Cl. Legendre designat per E'; plagula apposita, per characterem E' designabimus functionem integram, quae ad complementum moduli pertinet, sive functionem $E' = E(K',\varkappa')$; sicuti initio indicavimus. Integrata 3., obtinemus:

$$\log\frac{\Omega(u+2mK)}{\Omega(2mK)} = 2mEu + \log\Omega(u),$$

sive

$$4)\quad \frac{\Omega(u+2mK)}{\Omega(2mK)} = e^{2mEu}\Omega(u).$$

Posito in hac formula $u = -2mK$, cum sit $\Omega(-u) = \Omega(u)$, $\Omega(0) = 1$, prodit:

$$\Omega(2mK) = e^{2mEK.u};$$

cuius ope 4. abit in

$$5)\quad \Omega(u+2mK) = e^{2mE(u+mK)}\Omega(u),$$

sive in

$$6)\quad e^{-\frac{E}{2K}(u+2mK)^2}\Omega(u+2mK) = e^{-\frac{Euu}{2K}}\Omega(u),$$

quae docet formula, functionem

$$e^{-\frac{Euu}{2K}}\Omega(u),$$

mutato u in $u+2mK$, immutatam manere, ideoque cum functionibus ellipticis argumenti u periodum realem communem habere.

Ponatur in formula 2. $u+2m'K'$ loco u, fit:

$$\Omega(iu+2m'iK') = (-1)^{m'}e^{-\frac{(u+2m'K')^2}{2}}\operatorname{cosam}(u,\varkappa')\Omega(u+2m'K',\varkappa'),$$

unde cum sit e 6.:

$$e^{-\frac{E'}{2K'}(u+2m'K')^2}\Omega(u+2m'K',\varkappa') = e^{-\frac{E'uu}{2K'}}\Omega(u,\varkappa'),$$

obtinemus:

$$e^{-\frac{E'}{2K'}(u+2m'iK')^2}\Omega(iu+2m'iK') = (-1)^{m'}e^{-\frac{1}{2}(u+2m'K')^2}\operatorname{cosam}(u,\varkappa')e^{-\frac{E'uu}{2K'}}\Omega(u,\varkappa'),$$

sive:

$$e^{\frac{K'-E'}{2K'}(u+2m'K')^2}\Omega(iu+2m'iK') = (-1)^{m'}e^{-\frac{E'uu}{2K'}}\operatorname{cosam}(u,\varkappa')\Omega(u,\varkappa')$$
$$= (-1)^{m'}e^{\frac{(K'-E')uu}{2K'}}\Omega(iu),$$

unde posito $-iu$ loco u, sive u loco iu:

$$7)\quad e^{-\frac{K'-E'}{2K'}(u+2m'iK')^2}\Omega(u+2m'iK) = (-1)^{m'}e^{-\frac{K'-E'}{2K'}uu}\Omega(u),$$

quae docet formula, expressionem

$$e^{-\frac{(K'-E')uu}{2K'}}\Omega(u),$$

mutato u in $u+4m'iK'$, immutatam manere, sive cum functionibus ellipticis argumenti u alteram periodum imaginariam communem habere.

Adnotare convenit, e formula nota, a Cl. Legendre inventa,

$$KE' + K'E - KK' = \frac{\pi}{2}$$

sive

$$\frac{E}{K} + \frac{E'}{K'} - 1 = \frac{\pi}{2KK'},$$

sequi

$$-\frac{K'-E'}{2K'} = \frac{\pi}{4KK'} - \frac{E}{2K},$$

unde formulam 3. etiam hunc in modum repraesentari licet:

8) $e^{\left(\frac{\pi}{4KK'} - \frac{E}{2K}\right)(u+2m'iK')^2}\Omega(u+2m'iK') = (-1)^{m'}e^{\left(\frac{\pi}{4KK'} - \frac{E}{2K}\right)uu}\Omega(u).$

Mutato in hac formula u in $u+2mK$, prodit e 6.:

$$e^{\left(\frac{\pi}{4KK'} - \frac{E}{2K}\right)(u+2mK+2m'iK')^2}\Omega(u+2mK+2m'iK')^2 = (-1)^{m'}e^{\frac{\pi}{4KK'}(u+2mK)^2}e^{-\frac{Euu}{2K}}\Omega(u).$$

Fit autem:

$$\frac{\pi}{4KK'}\{(u+2mK+2m'iK')^2 - (u+2mK)^2\} =$$

$$\frac{m'i\pi}{4K}\{4u+4mK+4m'iK'\} + mm'i\pi =$$

$$\frac{m'i\pi}{4K(mK+m'iK')}\{(u+2mK+2m'iK')^2 - uu\} + mm'i\pi.$$

Hinc ubi adnotamus, esse $e^{mm'i\pi} = (-1)^{mm'}$, atque brevitatis causa ponimus:

$$r = \frac{m'i\pi}{4K(mK+m'iK')} - \frac{E}{2K}$$

obtinemus formulam:

9) $e^{r(u+2mK+2m'iK')^2}\Omega(u+2mK+2m'iK') = (-1)^{m'(m+1)}e^{ruu}\Omega(u),$

quae docet formula, expressionem

$$e^{\left(\frac{m'i\pi}{4K(mK+m'iK')} - \frac{E}{2K}\right)uu}\Omega(u) = e^{ruu}\Omega(u),$$

mutato u in $u+4mK+4m'iK'$ immutatam manere, unde et ipsa cum functionibus ellipticis argumenti u periodum communem habet.

Adnotare convenit, valorem ipsius r non mutari, ubi loco m, m' ponitur pm, pm'.

Formula 9. etiam hunc in modum repraesentari potest:

10) $\Omega(u+2mK+2m'iK') = (-1)^{m'(m+1)}e^{-4r(mK+m'iK')(u+mK+m'iK')}\Omega(u)$

$$= (-1)^{m'(m+1)}e^{\left(\frac{2E(mK+m'iK') - m'i\pi)}{K}\right)(u+mK+m'iK')}\Omega(u),$$

quae docet formula generalis, quasnam functio $\Omega(u)$ mutationes patitur, dum functiones ellipticae immutatae manent. Posito $u = 0$, obtine-

mus e 10.:

$$11)\quad \Omega(2mK+2m'iK') = (-1)^{m'} e^{\frac{2E}{K}(mK+m'iK')^2+m'm'\pi\frac{K'}{K}}.$$

Sumptis logarithmis, et differentiatione instituta, e 10. obtinemus:

$$12)\quad E(u+2mK+2m'iK') = E(u)+\frac{2F(mK+m'iK')}{K}-\frac{m'i\pi}{K}$$
$$= E(u)+2mE+2m'i(K'-E'),$$

unde posito $u=0$,

$$13)\quad E(2mK+2m'iK') = 2mE+2m'i(K'-E').$$

7.

Ponemus in sequentibus

$$\chi(u) = e^{ruu}\Omega(u),$$

erit e 10., posito $2m$, $2m'$ loco m, m':

$$\chi(u+4mK+4m'iK) = \chi(u),$$

ita ut $\chi(u)$ sit functio periodica. Jam igitur pro innumeris valoribus, quo r induere potest, dum numeris m, m' alios et alios tribuis valores, innumeras nacti sumus functiones periodicas $\chi(u)$, quae singulae cum functionibus ellipticis unam periodum communem habent. Et vice versa, quamcunque ex innumertis periodis, quas functiones ellipticae habent et quae ex una omnes componi possunt, eligere placet, quantitatem r ita semper determinare licet, ut functio

$$\chi(u) = e^{ruu}\Omega(u)$$

eadem gaudeat periodo. E variis functionibus illis periodicis $\chi(u)$, in Fundamentis eam elegimus, quae cum functionibus ellipticis periodum realem communem habet, pro qua $m'=0$ ideoque $r=-\frac{F}{2K}$. Quam functionem ibidem designavimus per characterem particularem Θ, ita ut

$$\frac{\Theta(u)}{\Theta(0)} = e^{-\frac{Euu}{2K}}\Omega(u),$$

omniaque quae loco citato de functione Θ proposita sunt, vel nulla vel leni mutatione facta, ad functionem generaliorem $\chi(u)$ extenduntur.

E formulis supra exhibitis:

$$\frac{\Omega(u+a)\Omega(u-a)}{\Omega^2 a\,\Omega^2 u} = 1-\varkappa^2\sin^2\mathrm{am}\,a\,\sin^2\mathrm{am}\,u,$$

$$\Pi(u,a) = \frac{u\,\partial\Omega(a)}{\Omega(a)\,\partial a}+\log\sqrt{\frac{\Omega(u-a)}{\Omega(u+a)}},$$

sequitur etiam, posito

$$\chi(u) = e^{ruu}\Omega(u),$$

quaecunque sit r constans:

$$14)\quad \frac{\chi(u+a)\chi(u-a)}{\chi^2 a\,\chi^2 u} = 1 - \varkappa^2 \sin^2 \mathrm{am}\, a \sin^2 \mathrm{am}\, u,$$

$$15)\quad \Pi(u,a) = \frac{u\,\partial\chi(a)}{\chi(a)\,\partial a} + \log\sqrt{\frac{\chi(u-a)}{\chi(u+a)}}.$$

8.

Ponamus, ut supra,

$$mK + m' iK' = n\omega,$$

designante n numerum imparem, m, m' numeros quoslibet positivos seu negativos eiusmodi, ut numeri m, m', n per eundem non divisibiles sint numerum; ex antecedentibus fit:

$$\chi(u + 4n\omega) = \chi(u).$$

Formemus iam productum

$$\frac{\chi(u)\chi(u+4\omega)\chi(u+8\omega)\ldots\chi(u+4(n-1)\omega)}{\chi^2(4\omega)\chi^2(8\omega)\ldots\chi^2(2(n-1)\omega)} = \psi(u),$$

patet, posito $u + 4\omega$ loco u, quemlibet factorem in subsequentem abire, ultimum vero in primum; unde cum productum ex omnibus conflatum nil mutetur, fit

$$\psi(u + 4\omega) = \psi(u),$$

ideoque etiam, designante p numerum quemlibet positivum seu negativum:

$$\psi(u + 4p\omega) = \psi(u).$$

Jam cum generaliter sit:

$$\chi(u + 4(n-p)\omega) = \chi(u - 4p\omega),$$

fit e 14.

$$\frac{\chi(u+4\omega)\chi(u+4(n-1)\omega)}{\chi^2 4\omega} = (1 - \varkappa^2 \sin^2 \mathrm{am}\, 4\omega \sin^2 \mathrm{am}\, u)\,\chi^2 u,$$

$$\frac{\chi(u+8\omega)\chi(u+4(n-2)\omega)}{\chi^2 8\omega} = (1 - \varkappa^2 \sin^2 \mathrm{am}\, 8\omega \sin^2 \mathrm{am}\, u)\,\chi^2 u,$$

. . . . . .

unde productum $\psi(u)$ etiam hunc in modum exhibere licet:

$$17)\quad \psi(u) = \chi^n(u)\{1 + B' \sin^2 \mathrm{am}\, u + B'' \sin^4 \mathrm{am}\, u + \ldots + B^{\left(\frac{n-1}{2}\right)} \sin^{n-1} \mathrm{am}\, u\},$$

siquidem, ut supra, ponis denominatorem substitutionis

$$(1 - \varkappa^2 \sin^2 \mathrm{am}\, 4\omega \sin^2 \mathrm{am}\, u)\ldots(1 - \varkappa^2 \sin^2 \mathrm{am}\, 2(n-1)\omega \sin^2 \mathrm{am}\, u) =$$

$$1 + B' \sin^2 \mathrm{am}\, u + B'' \sin^4 \mathrm{am}\, u + \ldots + B^{\left(\frac{n-1}{2}\right)} \sin^{n-1} \mathrm{am}\, u.$$

Jam cum sit $\psi(u + 4p\omega) = \psi(u)$, fluit e 16. formula fundamentalis maximi momenti,

$$17)\quad \frac{\chi(u+4p\omega)}{\chi(u)} = \sqrt[n]{\left(\frac{1+B'\sin^2\mathrm{am}\,u+B''\sin^4\mathrm{am}\,u+\ldots+B^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}\sin^{n-1}\mathrm{am}\,u}{1+B'\sin^2\mathrm{am}\,(u+4p\omega)+B''\sin^4\mathrm{am}\,(u+4p\omega)+\ldots+B^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}\sin^{n-1}\mathrm{am}\,(u+4p\omega)}\right)}.$$

Posito $u=0$, fit e 17.:

$$18)\quad \chi(4p\omega) = \frac{1}{\sqrt[n]{[1+B'\sin^2\mathrm{am}\,4p\omega+B''\sin^4\mathrm{am}\,4p\omega+\ldots+B^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}\sin^{n-1}\mathrm{am}\,4p\omega]}}.$$

9.

Posito $\sin\mathrm{am}\,u=x$, cum sit

$$\sin\mathrm{am}\,(u\pm a) = \frac{x\cos\mathrm{am}\,a\,\triangle\,\mathrm{am}\,a \pm \sqrt{[(1-xx)(1-\varkappa^2xx)]}\sin\mathrm{am}\,a}{1-\varkappa^2\sin^2\mathrm{am}\,a\,xx},$$

videmus, expressionem

$$\frac{1+B'\sin^2\mathrm{am}\,(u\pm 4p\omega)+B''\sin^4\mathrm{am}\,(u\pm 4p\omega)+\ldots+B^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}\sin^{n-1}\mathrm{am}\,(u\pm 4p\omega)}{1+B'\sin^2\mathrm{am}\,(4p\omega)+B''\sin^4\mathrm{am}\,(4p\omega)+\ldots+B^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}\sin^{n-1}\mathrm{am}\,(4p\omega)}$$

induere formam

$$\frac{V^{(p)}\pm\sqrt{[(1-xx)(1-\varkappa^2xx)]}\,W^{(p)}}{(1-\varkappa^2\sin^2\mathrm{am}\,(2p\omega)xx)^{n-1}},$$

designantibus $V^{(p)}$, $W^{(p)}$ functiones ipsius x integras rationales. Hinc, ubi insuper ponitur

$$V = 1+B'\sin^2\mathrm{am}\,u+B''\sin^4\mathrm{am}\,u+\ldots+B^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}\sin^{n-1}\mathrm{am}\,u,$$

fit e 17., 18.:

$$19)\quad \frac{\chi(u+4p\omega)}{\chi(4p\omega)\chi(u)} = \sqrt[n]{\left(\frac{V(1-\varkappa^2\sin^2\mathrm{am}\,(4p\omega)xx)^{n-1}}{V^{(p)}+\sqrt{[(1-xx)(1-\varkappa^2xx)]}\,W^{(p)}}\right)},$$

$$20)\quad \frac{\chi(u-4p\omega)}{\chi(4p\omega)\chi(u)} = \sqrt[n]{\left(\frac{V(1-\varkappa^2\sin^2\mathrm{am}\,(4p\omega)xx)^{n-1}}{V^{(p)}-\sqrt{[(1-xx)(1-\varkappa^2xx)]}\,W^{(p)}}\right)}.$$

Quibus in se ductis, cum sit e 14.

$$\frac{\chi(u+p\omega)\chi(u-4p\omega)}{\chi(4p\omega)\chi^2(u)} = 1-\varkappa^2\sin^2\mathrm{am}\,4p\omega.xx,$$

obtinemus:

$$\{1-\varkappa^2\sin^2\mathrm{am}\,4p\omega.xx\}^n = \frac{VV(1-\varkappa^2\sin^2\mathrm{am}\,4p\omega)^{2n-2}}{V^{(p)}V^{(p)}-(1-xx)(1-\varkappa^2xx)W^{(p)}W^{(p)}},$$

sive

$$V^{(p)}V^{(p)}-(1-xx)(1-\varkappa^2xx)W^{(p)}W^{(p)} = VV(1-\varkappa^2\sin^2\mathrm{am}\,(4p\omega)xx)^{n-2}.$$

Jam vero functio V factorem continet $1-\varkappa^2\sin^2\mathrm{am}\,(4p\omega)xx$, ita ut, posito

$$V = V_p(1-\varkappa^2\sin^2\mathrm{am}\,(4p\omega)xx),$$

sit V_p functio integra: qua substituta, fit:

$$21)\quad V^{(p)}V^{(p)}-(1-xx)(1-\varkappa^2xx)W^{(p)}W^{(p)} = V_pV_p(1-\varkappa^2\sin^2\mathrm{am}\,(4p\omega)xx)^n.$$

Hinc e 19., 20. facile sequitur:

$$22)\quad \frac{\chi(u+4p\omega)}{\chi(4p\omega)\chi(u)} = \sqrt[n]{\left(\frac{V^{(p)}-\sqrt{[(1-xx)(1-\varkappa^2 xx)]}\,W^{(p)}}{V_p}\right)},$$

$$23)\quad \frac{\chi(u-4p\omega)}{\chi(4p\omega)\chi(u)} = \sqrt[n]{\left(\frac{V^{(p)}+\sqrt{[(1-xx)(1-\varkappa^2 xx)]}\,W^{(p)}}{V_p}\right)}.$$

Erit insuper $V^{(p)}$ functio ipsius x par ordinis $2n-4$,
$W^{(p)}$ - - impar - $2n-5$,
V_p - - par - $n-3$,

10.

Ponamus brevitatis causa

$$\Phi(u) = 1 + B'\sin^2\mathrm{am}\,u + A''\sin^4\mathrm{am}\,u + \ldots + B^{\left(\frac{n-1}{3}\right)}\sin^{n-1}\mathrm{am}\,u,$$

fit e 17.:

$$24)\quad \frac{\chi(u+4p\omega)}{\chi(u)} = \sqrt[n]{\left(\frac{\Phi(u)}{\Phi(u+4p\omega)}\right)};$$

sumtis logarithmis et differentiatione instituta, prodit

$$25)\quad \frac{\chi'(u+p\omega)}{\chi(u+4p\omega)} - \frac{\chi'(u)}{\chi(u)} = \frac{1}{n}\cdot\frac{\Phi'(u)}{\Phi(u)} - \frac{1}{n}\cdot\frac{\Phi'(u+up\omega)}{\Phi(u+4p\omega)},$$

siquidem ponitur

$$\chi'(u) = \frac{\partial\chi(u)}{\partial u},\quad \Phi'(u) = \frac{\partial\Phi(u)}{\partial u}.$$

Fit porro, cum sit $\chi(u) = e^{ruu}\Omega(u)$:

$$\frac{\chi'(u)}{\chi(u)} = 2ru + \frac{\Omega'(u)}{\Omega(u)} = 2ru + E(u),$$

siquidem $\Omega'(u) = \frac{\partial\Omega(u)}{\partial u}$. Jam posito $u=0$, e 25. eruis:

$$\frac{\chi'(up\omega)}{\chi(4p\omega)} = -\frac{1}{n}\cdot\frac{\Phi'(4p\omega)}{\Phi(4p\omega)},$$

sive, posito brevitatis causa $\mathrm{am}(4p\omega) = \alpha_p$

$$26)\quad E(4p\omega) + 8r{:}p\omega = -\frac{1}{n}\cdot\frac{\Phi'(4p\omega)}{\Phi(4p\omega)} =$$

$$-\frac{1}{n}\cdot\frac{\cos\alpha_p\triangle\alpha_p\left\{2B'\sin\alpha_p + 4B''\sin^3\alpha_p + \ldots + (n-1)B^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}\sin^{n-2}\alpha_p\right\}}{1 + B'\sin^2\alpha_p + B''\sin^4\alpha_p + \ldots + B^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}\sin^{n-1}\alpha_p}.$$

Quae formula docet, quomodo species secunda integralium ellipticorum, casu, quo argumentum est pars aliquota ipsius $4(mK+m'iK')$ exhiberi possit.

E formula 15. obtinemus:

$$\Pi(u,a) = u\frac{\chi'(a)}{\chi(a)} + \tfrac{1}{2}\log\frac{\chi(u-a)}{\chi(u+a)} = u\{E(a)+2ra\} + \tfrac{1}{2}\log\frac{\chi(u-a)}{\chi(u+a)},$$

unde, advocata 24.

$$27)\quad \Pi(4p\omega, a) = 4p\omega\{E(a)+2ra\} + \tfrac{1}{2}\log\frac{\chi(a-4p\omega)}{\chi(a+4p\omega)}$$
$$= 4p\omega\{E(a)+2ra\} + \frac{1}{2n}.\log\frac{\Phi(a+4p\omega)}{\Phi(a-4p\omega)},$$

$$28)\quad \Pi(u, 4p\omega) = u\{E(4p\omega)+8r.p\omega\} + \tfrac{1}{2}\log\frac{\chi(u-4p\omega)}{\chi(u+4p\omega)}$$
$$= -\frac{u}{n}.\frac{\Phi'(4p\omega)}{\Phi(4p\omega)} + \frac{1}{2n}\log\frac{\Phi(u+p\omega)}{\Phi(u-p\omega)},$$

sive

$$29)\quad \Pi(4p\omega, a) = 4p\omega\{E(a)+2ra\} +$$
$$\frac{1}{2n}\log\frac{1+B'\sin^2\mathrm{am}(a+4p\omega)+B''\sin^4\mathrm{am}(a+4p\omega)+\ldots.+B^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}\sin^{n-1}\mathrm{am}(a+4p\omega)}{1+B'\sin^4\mathrm{am}(a-4p\omega)+B''\sin^4\mathrm{am}(a-4p\omega)+\ldots.+B^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}\sin^{n-1}\mathrm{am}(a-4p\omega)},$$

$$30)\quad \Pi(u, 4p\omega) =$$
$$-\frac{u}{n}.\frac{\cos\alpha_p\triangle\alpha_p\{2B'\sin\alpha_p+4B''\sin^3\alpha_p+\ldots.+(n-1)B^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}\sin^{n-1}\alpha_p\}}{1+B'\sin^2\alpha_p+B''\sin^4\alpha_p+\ldots.+B^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}\sin^{n-1}\alpha_p}$$
$$+\frac{1}{2n}\log\frac{1+B'\sin^2\mathrm{am}(u+4p\omega)+B''\sin^4\mathrm{am}(u+4p\omega)+\ldots.+B^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}\sin^{n-1}\mathrm{am}(u+4p\omega)}{1+B'\sin^2\mathrm{am}(u-4p\omega)+B''\sin^4\mathrm{am}(u-4p\omega)+\ldots.+B^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}\sin^{n-1}\mathrm{am}(u-4p\omega)}.$$

Quae formulae docent, quomodo exhiberi possit species tertia integralium ellipticorum casibus, quibus sive amplitudinis sive parametri argumentum (v. Fund. p. 139.) est pars aliquota ipsius $4(mK+m'iK')$.

11.

In formula fundamentali 24.:

$$\frac{\chi(u+4p\omega)}{\chi(u)} = \sqrt[n]{\left(\frac{\Phi(u)}{\Phi(u+4p\omega)}\right)} =$$
$$\sqrt[n]{\left(\frac{1+B'\sin^2\mathrm{am}\,u+B''\sin\mathrm{am}\,u+\ldots.+B^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}\sin^{n-1}\mathrm{am}\,u}{1+B'\sin^2\mathrm{am}(u+4p\omega)+B''\sin^4\mathrm{am}(u+4p\omega)+\ldots.+B^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}\sin^{n-1}\mathrm{am}(u+4p\omega)}\right)}$$

altera aequationis pars functionem continet $\chi(u)$, quae unam habet periodum, altera autem functione $\sin\mathrm{am}\,u$ constat, quae praeter hanc alia adhuc gaudet, ut quae dupliciter periodica est. Dum igitur ad eam alteram applicas periodum, expressio

$$\frac{\chi(u+4p\omega)}{\chi(u)}$$

mutabitur quidem, neque tamen aliam subire potest mutationem, nisi

quae oritur ex ambiguitate n^{ti} radicalis. Quod theorema gravissimum, expressionem

$$\frac{\chi(u+p\omega)}{\chi(u)},$$

quae cum functionibus ellipticis unam habet periodum communem, dum ei aliam, qua illae gaudent, applices periodum, aliam mutationem non pati, nisi quod per radicem aequationis $x^n = 1$, multiplicetur, ex ipsa natura functionis $\chi(u)$ iam comprobemus.

Ponamus

$$mK + m'iK' = Q, \quad \mu K + \mu' iK' = Q',$$

sit porro

$$aK + a'iK' = pQ + p'Q',$$

unde, quoties p, p', m, m', μ, μ' quantitates reales:

$$a = pm + p'\mu, \quad a' = pm' + p'\mu',$$

ideoque

$$p = \frac{\mu' a - \mu a'}{m\mu' - m'\mu}, \quad p' = \frac{ma' - m'a}{m\mu' - m'\mu}.$$

Sint m, m', μ, μ' numeri integri positivi vel negativi quilibet eiusmodi, ut

$$m\mu' - m'\mu = 1,$$

erit

$$p = \mu' a - \mu a', \quad p' = ma' - m'a,$$

unde patet, quicunque sint numeri integri a, a', etiam p, p' integros fore et vice versa. Fit porro:

$$K = \mu' Q - m'Q', \quad iK' = mQ' - \mu Q.$$

Jam quicunque sint numeri integri positivi seu negativi a, a', erit

$$\operatorname{sin am}(u + 4aK + 4a'iK') = \operatorname{sin am} u,$$

unde etiam, quicunque sint numeri integri positivi seu negativi p, p':

$$\operatorname{sin am}(u + 4pQ + 4p'Q) = \operatorname{sin am} u.$$

Innumerae periodi, quibus gaudent functiones ellipticae, componi possunt omnes e binis, quae continentur aequationibus:

$$\operatorname{sin am}(u + 4K) = \operatorname{sin am} u, \quad \operatorname{sin am}(u + 4iK') = \operatorname{sin am} u.$$

Quarum in locum, ex antecedentibus patet, substitui posse has

$$\operatorname{sin am}(u + 4Q) = \operatorname{sin am} u, \quad \operatorname{sin am}(u + uQ') = \operatorname{sin am} u.$$

siquidem

$$Q = mK + m'iK', \quad Q' = \mu K + \mu' iK',$$

designantibus m, m', μ, μ' numeros integros positivos vel negativos eiusmodi, ut sit $m\mu' - m'\mu = 1$. Unde videmus, periodos, quibus functiones ellipticae gaudent, innumeris modis e binis componi posse. Eius-

modi autem binas periodos, e quibus reliquae componi possunt omnes, vocabimus periodos coniugatas.

Posito, ut supra, $\omega = \frac{Q}{n} = \frac{mK + m'iK'}{n}$, quaeramus iam, quod propositum est, quaenam evadat expressio

$$\frac{\chi(u + 4p\omega)}{\chi(u)} = \frac{\chi\left(u + \frac{4pQ}{n}\right)}{\chi(u)},$$

mutato u in $u + 4Q'$ seu generalius in $u + 4p'Q'$, designante p' numerum positivum vel negativum quemlibet. Vidimus, posito

$$r = \frac{m'i\pi}{4K(mK + m'iK')} - \frac{E}{2K} = \frac{m'i\pi}{4KQ} - \frac{E}{2K},$$

fore

$$e^{r(u+4Q)^2}\Omega(u + 4Q) = e^{ruu}\Omega(u);$$

unde etiam, posito μ, μ' loco m, m', ideoque Q' loco Q, atque

$$r' = \frac{\mu'i\pi}{4KQ'} - \frac{E}{2K},$$

fit

$$e^{r'(u+4Q')^2}\Omega(u + 4Q') = e^{r'uu}\Omega(u).$$

Mutato u in $u + \frac{4pQ}{n} = u + 4p\omega$, prodit

$$e^{r'\left(u + \frac{4pQ}{n} + 4Q'\right)^2}\Omega\left(u + \frac{4pQ}{n} + 4Q'\right) = e^{r'\left(u + \frac{4pQ}{n}\right)^2}\Omega\left(u + \frac{4pQ}{n}\right),$$

unde

$$e^{r'.\frac{32pQQ'}{n}} \cdot \frac{\Omega\left(u + \frac{4pQ}{n} + 4Q'\right)}{\Omega(u + 4Q')} = \frac{\Omega\left(u + \frac{4pQ}{n}\right)}{\Omega(u)}.$$

Sequitur autem e formula $\chi(u) = e^{ruu}\Omega(u)$:

$$\frac{\chi\left(u + \frac{4pQ}{n} + 4Q'\right)}{\chi(u + 4Q')} = e^{r.\frac{4pQ}{n}\left(2u + 8Q' + \frac{4pQ}{n}\right)} \cdot \frac{\Omega\left(u + \frac{4pQ}{n} + 4Q'\right)}{\Omega(u + 4Q')} =$$

$$e^{r.\frac{4pQ}{n}\left(2u + 8Q' + \frac{4pQ}{n}\right) - r'.\frac{32pQQ'}{n}} \cdot \frac{\Omega\left(u + \frac{4pQ}{n}\right)}{\Omega(u)},$$

unde

$$\frac{\chi\left(u + \frac{4pQ}{n} + 4Q'\right)}{\chi(u + 4Q')} = e^{\frac{32pQQ'}{n}(r - r')} \cdot \frac{\chi\left(u + \frac{4pQ}{n}\right)}{\chi(u)}.$$

Fit autem

$$r - r' = \frac{m'i\pi}{4KQ} - \frac{\mu'i\pi}{4KQ'} = \frac{i\pi'}{K} \cdot \frac{m'Q' - \mu'Q}{4QQ'},$$

ideoque cum sit $m'Q' - \mu'Q = -K$:

$$\frac{32pQQ'}{n}(r-r') = -\frac{8ip\pi}{n},$$

unde obtinemus formulam fundamentalem:

$$31)\quad \frac{\chi\left(u+\frac{4pQ}{n}+4Q'\right)}{\chi(u+4Q')} = e^{-\frac{8ip\pi}{n}}\cdot\frac{\chi\left(u+\frac{4pQ}{n}\right)}{\chi(u)},$$

sive hanc generaliorem

$$32)\quad \frac{\chi\left(u+\frac{4pQ}{n}+4p'Q'\right)}{\chi(u+4p'Q')} = e^{-\frac{8pp'i\pi}{n}}\cdot\frac{\chi\left(u+\frac{4pQ}{n}\right)}{\chi(u)}.$$

Videmus igitur, quod demonstrandum erat, expressionem

$$\frac{\chi\left(u+\frac{4pQ}{n}\right)}{\chi(u)} = \frac{\chi(u+4p\omega)}{\chi(u)},$$

quae cum functionibus ellipticis unam periodum communem habet, sive immutata manet, mutato u in $u+4Q$, dum ei periodum coniugatam applicas sive u in $u+4Q'$ mutatur, multiplicari per n^{tam} radicem unitatis.

Quin adeo ipsius, quam eligere debes, n^{tae} radicis unitatis expressionem analyticam suggerit formula 32.; quae satis delicata est quaestio.

Regiom. m. Apr. 1829.

29.
Auflösung einer geometrischen Aufgabe.

(Von Herrn *Th. Clausen* zu München.)

„Wenn die Spitzen eines um einen Kreis beschriebenen Dreiecks resp. in den Verlängerungen der Seiten eines in demselben Kreise beschriebenen Dreiecks liegen; das eine dieser Dreiecke zu finden, wenn das andere gegeben ist."

Aus dem Mittelpuncte des Kreises ziehe man drei Halbmesser nach den Spitzen (Taf. III. Fig. 1.) des im Kreise beschriebenen Dreiecks a, b, c; die aus dem Mittelpuncte des Kreises auf die drei Seiten desselben Dreiecks gefällten Senkrechten schneiden den Kreis in den Puncten a', b', c'; die aus demselben Puncte nach den Spitzen des um den Kreis beschriebenen Dreiecks schneiden den Kreis in den Puncten α', β', γ'; und die auf die Seiten desselben Dreiecks gefällten Senkrechten in den Puncten α, β, γ. In der Folge sollen die Buchstaben a, b, a' etc. die Längen der zwischeu den mit diesen Buchstaben bezeichneten Puncten und einem willkürlichen festen Puncte liegenden Kreisbogen bezeichnen; nimmt man z. B. a zum Anfangspuncte, so ist β' die Länge des Bogens $a\beta a'\beta'$, b' die Länge des Bogens $a\beta a'\beta' b\gamma b'$, u. s. w. Es versteht sich von selbst, dafs man vom Anfangspuncte aus immer nach derselben Seite zählt.

Demnach ist, wie man leicht sieht:

$$a' = \frac{a+b}{2}; \quad a = a' - b' + c'; \quad \alpha' = \frac{\alpha+\beta}{2}; \quad \alpha = \alpha' - \beta' + \gamma';$$

$$b' = \frac{b+c}{2}; \quad b = a' + b' - c'; \quad \beta' = \frac{\beta+\gamma}{2}; \quad \beta = \alpha' + \beta' - \gamma';$$

$$c' = \frac{c+a}{2}; \quad c = -a' + b' + c'; \quad \gamma' = \frac{\gamma+\alpha}{2}; \quad \gamma = -\alpha' + \beta' + \gamma';$$

Der Halbmesser des Kreises sei 1, so ist:

$$C\nu \cos(\gamma - \beta') = 1,$$
$$C\nu \cos(b' - \beta') = C\mu,$$
$$\cos(b' - b) = C\mu,$$

also

$$\cos(b' - b)\cos(\gamma - \beta') = \cos(b' - \beta'),$$

oder

$$(1.)\quad \begin{cases} \cos(a'-c')\cos(\alpha'-\gamma') = \cos(b'-\beta), \text{ und also auch} \\ \cos(b'-a')\cos(\beta'-\alpha') = \cos(c'-\gamma'), \\ \cos(c'-b')\cos(\gamma'-\beta') = \cos(a'-\alpha'). \end{cases}$$

Setzt man nun:

$$\begin{aligned} a'-c' &= 2f; \quad a'-\beta = 2x; \\ b'-a' &= 2g; \quad b'-\gamma = 2y; \\ c'-b' &= 2h; \quad c'-\alpha = 2z; \end{aligned}$$

so ist:

$$\alpha'-\gamma = \frac{\beta-\gamma}{2} = \frac{a'-b'}{2} - x + y = -g - x + y,$$

$$b'-\beta' = 2y+\gamma-\beta' = 2y+\gamma-\alpha' = g+x+y$$

und also:

$$(2.)\quad \begin{cases} \cos 2f\cos(g+x-y) = \cos(g+x+y), \\ \cos 2g\cos(h+y-z) = \cos(h+y+z), \\ \cos 2h\cos(f+z-x) = \cos(f+z+x), \end{cases}$$

woraus folgt:

$$(3.)\quad \begin{cases} \operatorname{tang} f^2 = \operatorname{tang}(g+x)\operatorname{tang} y, \\ \operatorname{tang} g^2 = \operatorname{tang}(f+y)\operatorname{tang} z, \\ \operatorname{tang} h^2 = \operatorname{tang}(f+z)\operatorname{tang} x. \end{cases}$$

Zur Abkürzung sei:

$$\begin{aligned} \operatorname{tang} f &= m; \quad \operatorname{tang} x = s; \\ \operatorname{tang} g &= n; \quad \operatorname{tang} y = t; \\ \operatorname{tang} h &= p; \quad \operatorname{tang} z = u; \end{aligned}$$

so hat man

$$(4.)\quad \begin{cases} m^2 = t\cdot\dfrac{n+s}{1-ns}, \\ n^2 = u\cdot\dfrac{p+t}{1-pt}, \\ p^2 = s\cdot\dfrac{m+u}{1-mu}, \end{cases}$$

Wird nun in die dritte dieser Gleichungen der Werth von u aus der zweiten substituirt, und in die daraus entspringende der Werth von t aus der ersten, so erhält man zur Bestimmung von s folgende Gleichung:

$$(5.)\quad \begin{cases} mp+n^2-m^3n+m^2n^3p)ss \\ +(mnp+m^3+n^3-p^3-m^2n^2p+mn^2p^2+m^2np^2+m^3n^3p^3)s \\ = np^3-mn^3p^2+m^2p^2+m^3n^2p^3. \end{cases}$$

Man sieht leicht dafs

$$2f+2g+2h = 360^\circ,$$

oder

$$f+g+h = 180^\circ,$$

daher

$$mnp = m+n+p,$$
$$m^2n^2p^2 = m^2+n^2+p^2+2mn+2np+2pm,$$
$$m^3n^3p^3 = m^3+n^3+p^3+3m^2n+3n^2p+3p^2m+3mn^2+3np^2+3pm^2+6mnp,$$

Substituirt man diese Werthe in die Gleichung (5.) um die Zahl der Factoren in jedem Gliede gleich zu machen, so erhält man:

$$(n^3-m^3+p^2n+2mn^2+2mnp+3n^2p-m^2p+mp^2)\frac{ss}{p}$$
$$+2(m^3+n^3+m^2n+mn^2+2m^2p+2mp^2+2n^2p+2np^2+4mnp)s$$
$$= p(m^3-n^3+mp^2+2m^2n+3m^2p+2mnp-n^2p+np^2),$$

und wenn man mit $(m+n)p$ dividirt:

$$(n^2-m^2+mn+3np-mp+p^2)\frac{ss}{pp}+2(m^2+n^2+2p^2+2mp+2np)\frac{s}{p}$$
$$= m^2-n^2+mn+3mp-np+p^2,$$

welcher Gleichung ich folgende Form gebe:

$$\{(n+p)^2+(n+p)(m+p)-(m+p)^2\}\frac{ss}{pp}+2\{(n+p)^2+(m+p)^2\}\frac{s}{p}$$
$$+(n+p)^2-(n+p)(m+p)-(m+p)^2 = 0,$$

woraus sogleich folgt:

$$\frac{s}{p} = \frac{(m+p)^2 \pm \sqrt{5}(m+p)(n+p)+(n+p)^2}{(m+p)^2-(m+p)(n+p)-(n+p)^2},$$

oder endlich:

$$(6.)\quad \frac{s}{p} = \frac{m+p+\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}.(n+p)}{m+p-\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}.(n+p)}.$$

Es ist aber

$$m+p = \operatorname{tang} f+\operatorname{tang} h = \frac{\sin(f+h)}{\cos f\cos h} = \frac{\sin g}{\cos f\cos h} = \frac{\sin 2g}{2\cos f\cos g\cos h},$$
$$n+p = \operatorname{tang} g+\operatorname{tang} h = \frac{\sin(g+h)}{\cos g\cos h} = \frac{\sin f}{\cos g\cos h} = \frac{\sin 2f}{2\cos f\cos g\cos h};$$

setzt man noch für s dessen Werth $\operatorname{tang} x = \operatorname{tang}\left(\frac{a'-\beta}{2}\right)$, und für p den Werth $\operatorname{tang}\left(\frac{c'-b'}{2}\right)$, $2g=(b'-a')$ und $2f=(a'-c')$, so folgt:

$$(7.)\quad \begin{cases} \operatorname{tang}\left(\frac{a'-\beta}{2}\right) = \operatorname{tang}\left(\frac{c'-b'}{2}\right).\frac{\sin(b'-a')+\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\sin(a'-c')}{\sin(b'-a')+\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\sin(a'-c')}, \\ \text{und analog:} \\ \operatorname{tang}\left(\frac{b'-\gamma}{2}\right) = \operatorname{tang}\left(\frac{a'-c'}{2}\right).\frac{\sin(c'-b')+\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\sin(b'-a')}{\sin(c'-b')+\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\sin(b'-a')}, \\ \operatorname{tang}\left(\frac{c'-\alpha}{2}\right) = \operatorname{tang}\left(\frac{b'-a'}{2}\right).\frac{\sin(a'-c')+\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\sin(c'-b')}{\sin(a'-c')-\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\sin(c'-b')}, \end{cases}$$

Die dritte der Gleichungen (3.) ist:

$$\operatorname{tang}\left(\frac{a'-\alpha}{2}\right).\operatorname{tang}\left(\frac{a'-\beta}{2}\right) = \operatorname{tang}\left(\frac{c'-b'}{2}\right)^2,$$

womit man aus der ersten der Gleichungen (7.) findet:

$$(8.)\quad \begin{cases} \operatorname{tang}\left(\frac{a'-\alpha}{2}\right) = \operatorname{tang}\left(\frac{c'-b'}{2}\right).\dfrac{\sin(b'-a') - \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\sin(a'-c')}{\sin(b'-a') + \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\sin(a'-c')}, \\ \text{und also auch:} \\ \operatorname{tang}\left(\frac{b'-\beta}{2}\right) = \operatorname{tang}\left(\frac{a'-c'}{2}\right).\dfrac{\sin(c'-b') - \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\sin(b'-a')}{\sin(c'-b') + \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\sin(b'-a')}, \\ \operatorname{tang}\left(\frac{c'-\gamma}{2}\right) = \operatorname{tang}\left(\frac{b'-a'}{2}\right).\dfrac{\sin(a'-c') - \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\sin(c'-b')}{\sin(a'-c') + \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\sin(c'-b')}, \end{cases}$$

Es ist kaum nöthig zu bemerken, dafs die durch die Gleichungen (7.) und (8.) bestimmten Winkel die Hälften der 6 an den Spitzen des äufsern Dreiecks liegenden Winkel oder deren Complemente sind. Die Winkel des äufsern Dreiecks lassen sich auch unmittelbar bestimmen; es ist $\frac{\beta-\alpha}{2} = \frac{a'-\alpha}{2} - \frac{a'-\beta}{2}$, also

$$\operatorname{tang}\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right) =$$

$$\frac{\operatorname{tang}\left(\frac{c'-b}{2}\right)}{1+\operatorname{tang}\left(\frac{c'-b'}{2}\right)^2}.\left\{\frac{\sin(b'-a')+\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\sin(a'-c')}{\sin(b'-a')-\frac{2\pm\sqrt{5}}{2}\sin(a'-c')} - \frac{\sin(b'-a')-\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\sin(a'-c')}{\sin(b'-a')+\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\sin(a'-c')}\right\},$$

und nach einer leichten Reduction:

$$(9.)\quad \begin{cases} \operatorname{cotang}\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right) = -\dfrac{\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\sin(a'-c')^2 + \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\sin(b'-a')^2}{2\sin(a'-c')\sin(b'-a')\sin(c'-b')}, \\ \text{und analog:} \\ \operatorname{cotang}\left(\frac{\gamma-\beta}{2}\right) = -\dfrac{\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\sin(b'-a')^2 + \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\sin(c'-b')^2}{2\sin(a'-c)\sin(b'-a')\sin(c'-b)}, \\ \operatorname{cotang}\left(\frac{\alpha-\gamma}{2}\right) = -\dfrac{\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\sin(e'-b')^2 + \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\sin(a'-c')^2}{2\sin(a'-c')\sin(b'-a)\sin(c'-b')}, \end{cases}$$

Aus den Gleichungen (1.) sieht man, dafs man die lateinischen Buchstaben mit den gleichnamigen griechischen verwechseln kann. Thut man dieses in den Gleichungen (7.), (8.) und (9.), so hat man die Auflösung des umgekehrten Falls, wenn nemlich das äufsere Dreieck gegeben ist und das innere gesucht wird.

Altona, den 25. Februar 1828

30.

Einfacher geometrischer Beweis,

dafs wenn R und r die Halbmesser der in und um ein Dreieck beschriebenen Kreise bedeuten und D die Entfernung der Mittelpuncte dieser Kreise von einander bezeichnet, $D^2 = R^2 - 2Rr$ ist.

(Von dem Herrn Professor *Unger* zu Erfurt.)

Wird der Bogen AB (Taf. III. Fig. 2.) in E halbirt und aus E mit EA ein Kreis beschrieben, so ist, wie sich durch den 22. Satz des 3ten Buches der Elemente von Euclid beweisen läfst, der Bogen ADB der geometrische Ort für die Mittelpuncte aller Kreise, die sich in die Dreiecke hinein zeichnen lassen, von welchen AB eine Seite ist und die in dem Kreise AGB liegen. Nimmt man also den Punct D beliebig in dem Bogen ADB an, zieht CD und die Senkrechte DI, so ist für das entsprechende Dreieck DI der Radius des Kreises, der sich hinein zeichnen läfst, CE ist der Radius des um dieses Dreieck beschriebenen Kreises, und CD ist der Abstand der Mittelpuncte beider von einander. Die Abhängigkeit dieser drei Linien von einander ergiebt sich nun wie folgt:

Es ist

$$\begin{aligned} DC^2 &= CK^2 + KD^2 \\ &= (CF - DI)^2 + FI^2 \\ &= CF^2 - 2CF.DI + DI^2 + FI^2, \end{aligned}$$

und weil nach Eucl. Buch 2. Satz 5.

$$FI^2 = AF^2 - AI.IB,$$

so ist

$$\begin{aligned} CD^2 &= CF^2 + AF^2 - 2CF.DI + DI^2 - AI.IB \\ &= CE^2 - 2CF.DI + DI^2 - DI.IL \\ &= CE^2 - 2CF.DI - DI(IL - DI) \end{aligned}$$

Es ist aber

$$IL - DI = 2IH,$$

also ist

$$\begin{aligned} CD^2 &= CE^2 - 2CF.DI - 2DI.IH \\ &= CE^2 - 2(CF + IH).DI \\ &= CE^2 - 2CE.DI, \end{aligned}$$

nemlich es ist

$$D^2 = R^2 - 2Rr.$$

31.
Aufgaben und Lehrsätze,
erstere aufzulösen, letztere zu beweisen.

Lehrsatz, vom Herrn Professor Dr. *Grunert* zu Brandenburg.

Wenn alle Seiten eines beliebigen Fünfecks *ABCDE* (Taf. III. Fig. 3.) verlängert werden, bis sie sich in *A'*, *B'*, *C'*, *D'*, *E'*, treffen; so schneiden die geraden Linien *aa'*, *bb'*, *cc'*, *dd'*, *ee'*, welche die Mittelpuncte der beiden Diagonalen eines jeden der Vierecke *ABEA'*, *BACB'*, *CBDC'*, *DCED'*, *EADE'* mit einander verbinden, sich immer alle in ein- und demselben Puncte *O*.

Aufgaben von Anderen.

1. Unter den verschiedenen Definitionen der Ebene scheint die von Robert Simson eine der beliebtesten zu sein, nemlich:

„Die Ebene ist eine Fläche von der Art, dafs alle gerade Linien zwischen beliebigen Paaren von Puncten der Fläche, ganz in ihr liegen."

Diese Erklärung scheint aber Vorausetzungen einzuschliefsen, deren Statthaftigkeit erst bewiesen werden mufs. Wenn nemlich z. B. *A*, *B*, *C* (Taf. III. Fig. 4.), drei Puncte einer Ebene und *AB*, *BC* und *CA* gerade Linien, *D* und *E* aber Puncte in *BC* und *AB*, und *AD* und *CE* wiederum gerade Linien sind, so müssen, nach der Definition der Ebene, alle diese gerade Linien in ihr liegen, oder vielmehr, die Ebene mufs durch alle diese gerade Linien zugleich gehen. Dabei wird offenbar vorausgesetzt, dafs *AD* die *EC*, etwa in *F* schneide und nicht vielleicht über oder unter *EC* an dieser Linie vorbeigehe; denn wäre dieses der Fall, so könnten es nur zwei verschiedene Flächen sein, in welchen die geraden Linien *AD* und *EC* liegen, nicht eine und dieselbe Fläche. Dafs aber *AD* die *EC* wirklich schneidet, erhellt von selbst weder aus der Natur der geraden Linie, noch aus der Erklärung der Ebene. Es darf also nicht vorausgesetzt werden und erfordert mithin einen Beweis.

Dieser Beweis wäre zu geben oder, wenn er nicht gegeben werden kann, eine andere Definition der Ebene.

2. Man könnte die Ebene wie folgt definiren.

„Sie ist diejenige Fläche, in welcher alle gerade Linien liegen, die mit einer und derselben geraden Linie, in einem und demselben Punct, zu beiden Seiten gleiche Winkel machen."

Diese Erklärung würde völlig bestimmt und deutlich sein. Es mufs aber dann bewiesen werden, dafs auch jede andere gerade Linie durch zwei Puncte in der Ebene, die nicht durch die feste Gerade geht, ganz in der Ebene liegt. Dieses kann auf folgende Weise geschehen, insofern es möglich ist, ohne den Begriff der Ebene zu zeigen, dafs Dreiecke mit den nemlichen Seiten congruent sind.

Es sei nemlich XY (Fig. 5) die die Ebene bestimmende feste gerade Linie; AP, BP seien gerade Linien in ihr, so dafs $APX = APY = BPX = BPY$ ist. Ferner sei $PX = PY$. Alsdann sind z. B. in den Dreiecken APX und APY zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel dieselben, nemlich $AP = AP$, $PX = PY$ und $APX = APY$. Also sind die Dreiecke congruent, oder vielmehr, wenn man PX in PY legt, während AP an seiner Stelle bleibt, mu. nothwendig die gerade AX in die gerade AY fallen, was sich einsehen läfst, auch ohne den Begriff der Ebene. Auf dieselbe Weise werden die Dreiecke BPX und BPY congruent sein. Nun sei AB eine gerade Linie durch A und B, und C ein beliebiger Punct in ihr: so frägt es sich ob AB ganz in der Ebene liege. Da AB den Dreiecken ABX und ABY gemein ist, so sind alle drei Seiten dieser Dreiecke die nemlichen; denn, wie sich vorhin zeigte, ist $AX = AY$ und $BX = BY$, und AB beiden gemein. Kann man also nun ohne den Begriff der Ebene beweisen, dafs zwei Dreiecke gleich sind, wenn sie die nemliehen Seiten haben, so folgt, dafs z. B. der Winkel CAX gleich ist dem Winkel CAY. Deshalb sind aber dann wiederum die Dreiecke CAX und CAY gleich, weil sie gleiche Winkel $CAX = CAY$ zwischen den nemlichen Seiten $AX = AY$ und $AC = AC$ haben. Also ist auch $CX = CY$. Mithin haben dann die Dreiecke CPX und CPY die nemlichen drei Seiten; denn aufser $CX = BY$ ist $PX = PY$ und $CP = CP$. Also wären sie nach dem postulirten Satze gleich, und es wäre endlich der Winkel CPX gleich dem Winkel CPY. Folglich läge die Gerade CP, die durch den Punct C in AB geht, und mithin der Punct C selbst, in der Ebene durch AP und BP. Und da dieses von jedem Puncte C in AB bewiesen werden könnte, so läge die gerade Linie AB ganz in der Ebene durch AP und BP. Da ferner AB jede beliebige Richtung haben kann, so würde folgen, dafs jede beliebige, nicht durch P gehende gerade Linie, welche zwei Puncte mit der Ebene durch AP und BP gemein hat, ganz in ihr liegt.

Es frägt sich also, ob sich der Satz, dafs drei gerade Linien im

Raume von bestimmter Länge, die sich paarweise schneiden, immer die nemliche Figur bilden, ohne den Begriff der Ebene beweisen lasse.

3. Folgende andere Definition der Ebene, an eine ähnliche der geraden Linie sich anschliefsend, ist sehr einfach, nemlich:

Gerade Linien sind die, deren zwei auf keine Weise einen Raum umschliefsen können.

Ebenen sind diejenigen Flächen, deren zwei auf keine Weise einen Raum umschliefsen können.

Es folgen daraus die Sätze, dafs gerade Linien, wenn sie zwei Puncte gemein haben, ganz zusammenfallen; dafs durch zwei Puncte nur eine gerade Linie möglich ist; dafs gerade Linien, welche mit einer Ebene zwei Puncte gemein haben, ganz in ihr liegen; dafs zwei Ebenen nur in einer geraden Linie sich schneiden können; dafs eine gerade Linie und ein Punct aufser ihr, oder drei Puncte, eine Ebene bestimmen u. s. w., wie leicht zu sehen, fast unmittelbar.

Die Erklärungen würden daher besonders für die Elemente geeignet sein. Es frägt sich, ob und was Erhebliches dagegen einzuwenden sei.

4. Sollte nicht vielleicht folgende Theorie der Parallelen einfach und deutlich sein?

Ein Winkel ist die Neigung zweier gerader Linien gegen einander, die sich schneiden.

Wenn zwei Winkel gleich sind, so können die unbegrenzten Räume zwischen ihren Schenkeln um keinen Winkelraum verschieden sein, sondern nur vielleicht um ganz begrenzte oder um Parallelräume.

Wenn zwei Winkel-Räume um keinen Winkelraum verschieden sind, sondern nur etwa um begrenzte oder Parallelräume, so sind die zugehörigen Winkel gleich.

Der Winkel *ACB* (Fig. 6.) bleibt z. B. offenbar derselbe, man möge den begrenzten Raum *DEC* davon abschneiden oder nicht. Die drei Winkel *FDA*, *ACB* und *BEG* machen also zusammen nur zwei Rechte aus, wenn sie gleich, aufser dem Raume an der einen Seite der geraden Linie *FG*, noch den begrenzten Raum *DCE* füllen. Nun sei $HEF = ADF$, so ist *HE* mit *AD* parallel, das heifst, *HE* begegnet der *AD* nicht, so weit man sie auch verlängert. Denn schnitte *HE* die *AD*, so wäre *HEF* nicht gleich *ADF* (Euclid. I. 16.), gegen die Voraussetzung. Es ist aber die Summe der drei Winkel *HEF*, *HEB* und *BEG* ebenfalls gleich zwei

Rechten, also ist *HEB* gleich *ACB*, dafs heifst: Parallelen, wie *HE* und *AC*, machen mit einer beliebigen Geraden *BC*, die sie schneiden, an einerlei Seite gleiche Winkel $HEB = ACB$; und daraus folgt, dafs sich zwei gerade Linien, die mit einer dritten an derselben Seite ungleiche Winkel machen, genugsam verlängert, nothwendig schneiden, denn schnitten sie sich nicht und wären also parallel, so machten sie, wie so eben folgte, mit der dritten gleiche Winkel, gegen die Vorausetzung; und dieses ist das eilfte Euclidische Axiom.

Die Schwierigkeit der Vorstellung liegt darin, dafs die Summe der drei Winkel *FDA*, *ACB* und *BEG* nur gleich zwei Rechten geachtet wird, obgleich die Winkel, aufser dem Raume an der einen Seite der geraden Linie *FG*, noch den begrenzten Raum *DCE* füllen; aber die Schwierigkeit ist nur scheinbar; denn eines Theils ändert offenbar der begrenzte Raum *DCE* an der Neigung der Linien *AC* und *BC* gegen einander wie schon gesagt nichts, andern Theils werden ja auch ohne Bedenken Winkel gleich geachtet, wenn ihre Räume sogar um einen unbegrenzten Raum verschieden sind, wie z. B. die Winkel *ADF* und *HEF*, deren Räume um den Parallelraum *ADEF* verschieden sind.

Dafs die Summe der drei Winkel in einem beliebigen ebenen Dreiecke gleich zwei Rechten ist, folgt auf diese Weise unmittelbar; denn da $ADF + ACB + BEG$ gleich zwei Rechten und $ADF = EDC$, $DCB = DCE$ und $BEG = DEC$ ist, so ist auch in dem Dreieck *DEC*, $EDC + DCE + DEC$ gleich zwei Rechten.

Diese Theorie der Parallelen dürfte um so mehr zu berücksichtigen sein, da das Resultat von der Summe der drei Winkel eines Dreiecks, auf welches sie zunächst führt, das nemliche ist, welches der auf ähnliche Weise sich ergebende Satz von der Summe der drei Winkel eines Kugel-Dreiecks giebt, wenn man den Halbmesser der Kugel unendlich grofs annimmt, wodurch die Kugelfläche zur Ebene wird. Die Summe der drei Winkel eines Kugel-Dreiecks, die durch die Fläche der zugehörigen Kugel-Ausschnitte gemessen werden, ist nemlich bekanntlich gleich zwei Rechten, oder gleich der halben Kugelfläche, plus der zwiefachen Fläche des Dreiecks. Nimmt man nun den Halbmesser der Kugel unendlich grofs, so verschwindet die Fläche des Dreiecks gegen die Kugelfläche und es folgt, dafs die Summe der drei Winkel des Dreiecks gleich zwei rechten Winkeln ist.

32.
Einige Nachrichten von Büchern.

Von dem am Schlusse des vorigen Bandes dieses Journals erwähnten Werke des Herrn Professors C. G. J. Jacobi zu Königsberg in Preufsen über die elliptischen Functionen ist nunmehr der erste Theil erschienen, unter dem Titel: *Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum, auct. Dr.* Carolo Gustavo Jacobo Jacobi, *prof. ord. in univ. regia Regimont.* 1829. 4. *IV.* 188. Es beginnt darin die systematische Zusammenstellung der die Theorie der elliptischen Functionen bildenden Sätze, mit Beziehung auf die dieselben betreffenden früheren schönen Arbeiten des Herrn Verfassers. Über den Werth des Inhalts dieser Schrift hat schon die öffentliche Stimme und insbesondere des würdigen Legendre's Urtheil entschieden. Die fernere Entwicklung des Gegenstandes dieses wichtigen Werkes will der Herr Verfasser die Güte haben, theilweise dem gegenwärtigen Journal zu überliefern. Diese Schrift des Herrn Jacobi gehört unstreitig zu den bedeutendsten mathematischen Productionen in Deutschland neuerer Zeit.

Auch die im vorigen Jahre erwähnten zwei Supplemente Legendre's zur zweiten Auflage seiner *Exercices du calcul intégral* sind erschienen, und berücksichtigen die Arbeiten von Jacobi und Abel über die elliptischen Functionen.

Einen Theil der im vorigen Jahre angekündigten Arbeit von Abel über die elliptischen Functionen findet, man in dem vorigen und gegenwärtigen Hefte dieses Journals. Leider ist der Verfasser, der, so jung noch, schon so grofse Hoffnungen gab, und dem schon jetzt die Wissenschaft wesentliche Erweiterungen verdankt, durch den Tod abgerufen worden. (Man sehe den Necrolog hier unten.)

Kürzlich hat Herr Plana zu Turin Bemerkungen über die elliptischen Functionen herausgegeben, deren Zweck vorzüglich ist, die von Herrn Jacobi in den astronomischen Nachrichten von Schumacher mitgetheilten allgemeinen Sätze elementar zu entwickeln.

Die *Annales des Mathématiques*, von Herrn Gergonne, und das *Bulletin universel des sciences* des Herrn Baron von Férussac haben erfreulichen Fortgang und behaupten ihren alten Werth.

Auch von den *Exercices des mathématiques* des Herrn Cauchy sind mehrere neue Hefte erschienen.

Von der „Wiener Zeitschrift für Physik und Mathematik, herausgegeben von A. Baumgärtner und A. v. Ettinghausen" sind bereits 5 Bände erschienen, jeder zu 4 Heften und jedes Heft 8 bis 9 Bogen stark. Der gröfsere Theil dieses Werkes ist der Physik gewidmet. Jedoch enthält auch der mathematische Theil interessante Abhandlungen und Aufsätze. Dieses Journal wird unstreitig auch seinerseits zur Verbreitung des Studiums der Mathematik wirksam beitragen.

Von einem anderen neuen, auch der Mathematik gewidmeten Journal, welches zu Brüssel unter dem Titel: „*Correspondance mathématique et physique*" herauskommt,

sind bis jetzt 4 Bände erschienen, jeder zu 6 Heften, jedes zu 3 bis 4 Bogen, und vom 5ten Bande 2 Hefte. Die ersten beiden Bände sind von den Herren J. G. Garnier und A. Quetelet gemeinschaftlich, die folgenden Bände vom Herrn A. Quetelet allein redigirt. Die Gegenstände dieser Schrift sind ziemlich mannigfaltig. Sie beschäftigt sich mit der reinen und angewandten Mathematik, mit der Astronomie, Physik, Meteorologie, Statistik, practischen Mechanik und theilweise mit der Technologie. Sie giebt Beiträge zur Geschichte dieser Wissenschaften, Nachrichten von den Arbeiten der Gelehrten in denselben, von den Preis-Aufgaben der Academieen und den darauf erfolgten Preisschriften, besonders in Belgien und Frankreich, von wichtigen Büchern und Ereignissen, die für ihre Gegenstände Interesse haben. Sie stellt Aufgaben und giebt die eingegangenen Auflösungen. Die mathematischen Arbeiten möchten ziemlich den gröfseren Theil des Raumes dieses Werkes einnehmen. Sie scheinen vorzüglich die weitere Verbreitung mathematischer Kenntnisse und Erörterungen über dieselben zum Gegenstande zu haben. Nur ein Theil davon beschäftigt sich mit der sogenannten höheren Mathematik und der weiteren Entwicklung derselben, der gröfsere Theil mit weiterer Ausbildung und Vervollkommnung schon allgemeiner verbreiteter mathematischer Kenntnisse. Gerade dieser Zweck aber dürfte recht nützlich und verdienstlich sein; denn es ist gewifs eben so wichtig, und es thut fast sogar mehr Noth das Vorhandene zu vervollkommnen und weiter zu verbreiten, als gerade Neues zu entdecken. Auch der mathematische Inhalt dieses Werkes ist also von bedeutendem Interesse. Die historischen und anderen Nachrichten sind schätzbar, und daher dürfte auch dieses Unternehmen als recht wichtig für die Verbreitung nützlicher Kenntnisse zu erachten und ihm der beste Fortgang zu wünschen sein.

Druckfehler.

Im zweiten Hefte dieses Bandes Seite 166. Zeile 4. und 5. von oben ist statt „pourvu . . . . infinies" zu lesen „pourvu toutefois que les valeurs de $f(g+\varepsilon)$ et de $f(h+\varepsilon)$ fûssent toujours supposées et determinées."

33.

Nécrologe.

Mr. Niels Henrik Abel, Norvégien, qui a fait voir un talent si extraordinaire pour les mathématiques et qui, quoique très jeune encore, s'est déjà si éminemment distingué dans cette science, est mort à la fleur de son âge le 6. Avril 1829 à Frolands-Vark près d'Arendal en Norvège, où il s'étoit rendu de Christiania, son séjour ordinaire, pour faire une visite à ses parens.

Mr. Abel naquit le 25. Août 1802 à Frindoë, sur la côte occidentale de Christiansandstifft en Norvège. Il n'a donc pas même atteint sa 27me année. Son père étoit ministre protestant de village. En 1803 sa famille fut transférée à Gierrestadt, paroisse voisine, ou son père lui donna la première éducation, jusqu'en 1815, où Mr. N. H. Abel entra dans l'école cathédrale de Christiania. Il ne se distinguoit nullement dans les premières années. Mais en 1818, à l'age de 16 ans, ses talens pour les mathématiques commencèrent subitement à se développer. Il se fit beaucoup remarquer parmi ses condisciples et fit de progrès si rapides, qu'on reconnut bientôt son génie. Mr. Holmboë, alors professeur à cette école, lui donna des leçons en particulier. Ayant rapidement passé les élémens, on lui fit parcourir l'Introduction et les Institutions du calcul diff. et intégr. d'Euler. Dès-lors il commença à marcher seul. Il étudia les ouvrages de Lacroix, Francoeur, Poisson, Gaufs et surtout ceux de Lagrange, et fit lui-même quelques essais. Sorti de l'école cathédrale, il entra dans l'université de Christiania. Dénué de fortune, et son père étant mort, il avoit eu les leçons de l'école gratis, et il jouit à l'université d'une bourse et de secours des professeurs pendant les deux premières années. Les deux années suivantes le gouvernement lui accorda un secours extraordinaire. Il poursuivit sa carrière avec ardeur. Dans cette époque il composa plusieurs mémoires, qui ont été imprimés dans un journal de Christiania qui a pour titre: „*Magazin für die Naturwissenschaften.*" Le premier de ces mémoires a été imprimé en 1820 sous le titre: „*Allgemeine Methode, Functionen einer variablen Gröfse zu finden, wenn eine Eigenschaft dieser Functionen durch eine Gleichung zwischen zwei Variabeln ausgedrückt ist.*" Il s'occupa du problème de la résolution algébrique des équations du 5me degré. Une fois il crut en avoir trouvé la solution, mais ayant remarqué son erreur, il se proposa, ou de la corriger, ou de démontrer l'impossibilité de la résolution générale des équations supérieures. Il réussit dans cette dernière tâche et fit imprimer sa démonstration en 1824 à Christiania, en françois. S'étant extraordinairement distingué dans ses études, le gouvernement lui accorda, sur la recommendation des Mrs. les professeurs Rasmusen et Hansteen, les frais de voyage pour continuer ses études en Allemagne, en Italie et en France pendant deux ans. Son plan primitif étoit d'aller directement à Paris, mais il le changea et partit pour Berlin, en s'associant à quelques amis étudians en d'autres sciences *).

Il arriva à Berlin dans l'été de 1825. Il y resta six mois, pendant lesquels je fis sa connoissance et le vis tous les jours. D'ici il se rendit par Vienne. Venise, Milan et Turin à Paris, où il fit un séjour de 10 mois. Il revient à Berlin et de là à Christiania, après une absence de 20 mois.

---

*) Ces notices sur la jeunesse et les premières études de Mr. Abel m'ont été fournies par Mr. le professeur Holmboë, nommé ci-dessus.

En arrivant à Berlin pour la première fois, il avoit déja beaucoup travaillé, mais sans avoir encore rien publié d'important, excepté son mémoire, en forme de dissertation, sur l'impossibilité de la résolution générale des équations algébriques supérieures. Ce mémoire est le même qui a été inséré dans le premier tome du présent Journal, mais refondu par son auteur pendant son séjour à Berlin. J'avois déja depuis longtems conçu le projet du présent journal, mais ce qui me décida à le mettre en exécution, ce fut surtout l'importance des nombreux mémoires déjà préparés par Mr. Abel, qui consentit à leur publication, et celle des ouvrages de Mr. Steiner, depuis zelé et très distingué collaborateur pour les premiers tomes qui ont paru de ce journal. C'est ainsi en partie à Mr. Abel qu'il doit son existence. Il en est resté jusqu'à sa fin un des collaborateurs les plus assidus et les plus fidèles.

Les mémoires dont il a enrichi ce journal, et quelques autres très importans, insérés dans le journal d'astronomie de Mr. Schumacher, ainsi que ceux qu'il a présentés à l'académie royale de Paris, prouvent que ce jeune géomètre étoit doué d'un talent vraiment supérieur, et que la perte, que les mathématiques viennent d'èprouver par sa mort, est très grande et d'autant plus déplorable qu'il commençoit à peine sa carrière.

Tous les travaux de Mr. Abel portent l'empreinte d'une sagacité et d'une force de tête extraordinaire et souvent vraiment étonnante, même sans considérer la jeunesse de l'auteur. Il pénétroit, pour ainsi dire, souvent jusqu'au fond des choses, avec une force qui sembloit irrésistible, les saisissoit avec une énergie si extraordinaire, il les prenoit de si haut et s'élevoit tellement au dessus de leur état actuel, que les difficultés sembloient s'évanouir devant la puissance victorieuse de son génie. Si l'on se rappele ce mémoire inséré dans le premier tome de ce journal sur l'impossiblité de résoudre algébriquement les équations de degrés supèrieurs au quatrième, ses travaux sur les fonctions elliptiques, son mémoire sur quelques propriétés générales d'une certaine sorte de fonctions transcendentes (tome III.) etc., tous ouvrages par lesquels il a effectivement reculé les bornes de l'analyse: on trouvera que nous n'en avons pas trop dit. Aussi les talens extraordinaires de Mr. Abel ont ils été reconnus généralement dans les derniers tems, et certes, s'il eût été contemporain de Newton, celui-ci auroit dit de lui ce qu'il disoit de Cotes: „s'il avoit vécu plus longtems, nous aurions pu apprendre encore beaucoup de lui." Les géomètres les plus distingués de notre tems, parmi lesquels il suffit de nommer Mr. Legendre, ce digne vétéran, auteur de la théorie des fonctions elliptiques, ont apprécié également Mr. Abel, en s'honorant par là autant eux mêmes que leur jeune protégé.

Il est remarquable que Mr. Abel et Mr. Jacobi de Königsberg, cet autre jeune géomètre d'un talent extraordinaire, ont toujours marché également et comme de front dans leurs recherches sur les fonctions elliptiques, sans cependant se connoître l'un l'autre non plus que leurs travaux, et sans se rencontrer ni se toucher dans leur route.

Mr. Abel, de retour dans sa patrie, n'y trouva pas d'abord un emploi convenable: ce ne fut que peu de tems avant sa mort qu'il jouit d'appointemens fixes. En 1827 on le nomma membre de la société royale des sciences à Drontheim. Mais aussitôt que la réputation de son talent et de ses mérites dans les mathématiques eurent percé, on vit les hommes qui aiment les sciences et qui sont à même de les protéger, s'intéresser à son sort. Le gouvernement prussien, attentif à tout ce qui peut faire prospérer les connoissances utiles, et avancer les sciences, songeoit à attirer Mr. Abel à son service, dans le cas où celui-ci l'aurait désiré. En même tems plusieurs membres de l'académie royale des sciences de Paris s'adressèrent au Roi de Suède, pour l'engager à appeler à Stockholm, près de l'académie, cet homme distingué. Le gouvernement de Prusse exécuta le premier le projet d'améliorer le sort de Mr. Abel. J'avois été chargé de m'instruire d'avance si Mr. Abel accepteroit une place à Berlin, dans le cas où elle lui seroit offerte; et sur sa réponse affirma-

tive, Monseigneur le ministre du culte et de l'instruction publique à Berlin avoit résolu de lui envoyer une invitation honorable. J'avois l'ordre d'écrire au jeune géomètre préalablement, que cette invitation étoit prête à partir. J'exécuta cet ordre à l'heure même. Mais malheureusement il étoit déjà trop tard. La lettre arriva peu de jours après sa mort. Un travail infatigable, joint aux soucis que lui avoit longtems donnés l'incertitude de son avenir, avoient miné sa santé délicate; il étoit tombé malade à la campagne où il se trouvoit alors; son indisposition tourna en une pulmonie, qui dégénéra en phtisie et lui coûta la vie. J'en reçus la nouvelle presque le même jour où l'invitation faite à Mr. Abel venoit d'être expédiée. J'en fis mon rapport. Le digne ministre, qui protège et fait prospérer les sciences dans notre pays avec un zèle et une ardeur au dessus de tout éloge, exprima ses vifs regrets de cette perte prématurée, en m'écrivant „qu'il avoit eu effectivement le dessein d'appeler Mr. Abel „à Berlin, pour lui ouvrir une carrière honorable près de l'université, en lui accordant „des appointemens convenables et ses frais de voyage; qu'il regrettoit d'autant plus „de voir son dessein échoué, qu'il avoit vivement désiré l'admission de Mr. Abel au „service de Prusse, à cause des grandes espérances que ses rares talens avoient „déjà données."

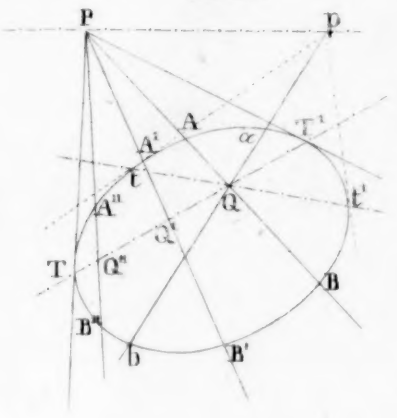
Mais ce ne sont pas les grands talens seuls de Mr. Abel qui le rendoient si respectable et qui feront toujours regretter sa perte. Il étoit également distingué par la pureté et la noblesse de son caractère, et par une rare modestie qui le rendoit aussi aimable, que son génie étoit extraordinaire. La jalousie du mérite d'autrui lui étoit tout à fait étrangère. Il étoit bien éloigné de cette avidité d'argent ou de titres, ou même de renommée, qui porte souvent à abuser de la science en en faisant un moyen de parvenir. Il apprécioit trop bien la valeur des vérités sublimes qu'il cherchoit, pour les mettre à un prix si bas. Il trouvoit la récompense de ses efforts dans leur résultat même. Il se réjouissoit presque également d'une nouvelle découverte, soit qu'elle eût été faite par lui ou par un autre. Les moyens de se faire valoir lui étoient inconnus; il ne faisoit rien pour lui-même, mais tout pour sa science chérie. Tout ce qui a été fait pour lui, provient uniquement de ses amis, sans la moindre coopération de sa part. Peut-être une telle insouciance est-elle un peu déplacée dans le monde. Il a sacrifié sa vie pour la science, sans songer à sa propre conservation. Mais personne ne dira qu'un tel sacrifice soit moins digne et moins généreux que celui qu'on fait pour tout autre grand et noble objet, et auquel on n'hésite pas d'accorder les plus grands honneurs. Gloire donc à la mémoire de cet homme également distingué par les talens les plus extraordinaires et par la pureté de son caractère, d'un de ces êtres rares, que la nature produit à peine une fois dans un siècle!

Berlin le 20. Juin 1829.

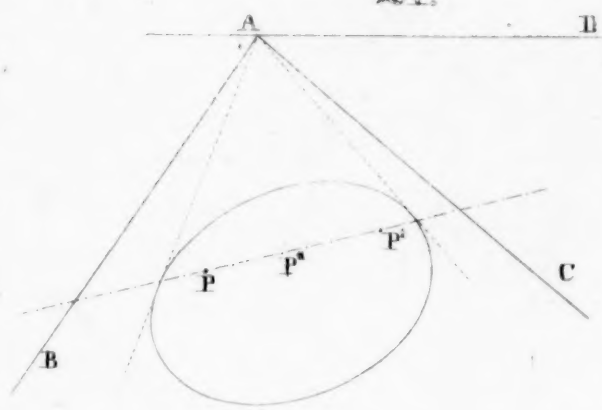
Crelle.

Taf. I

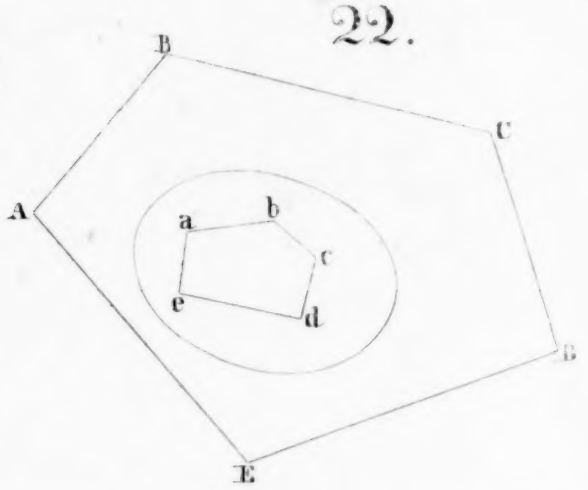
20.



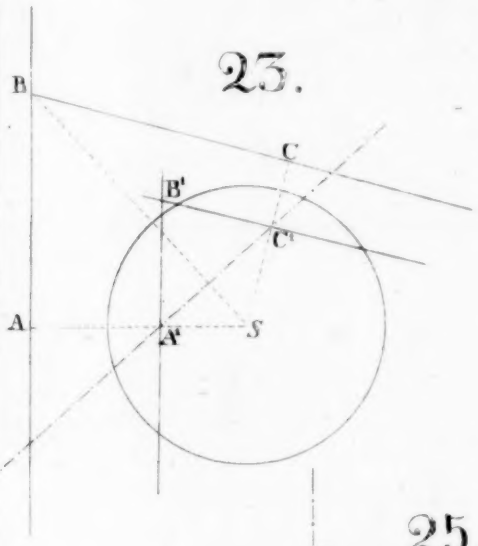
21.



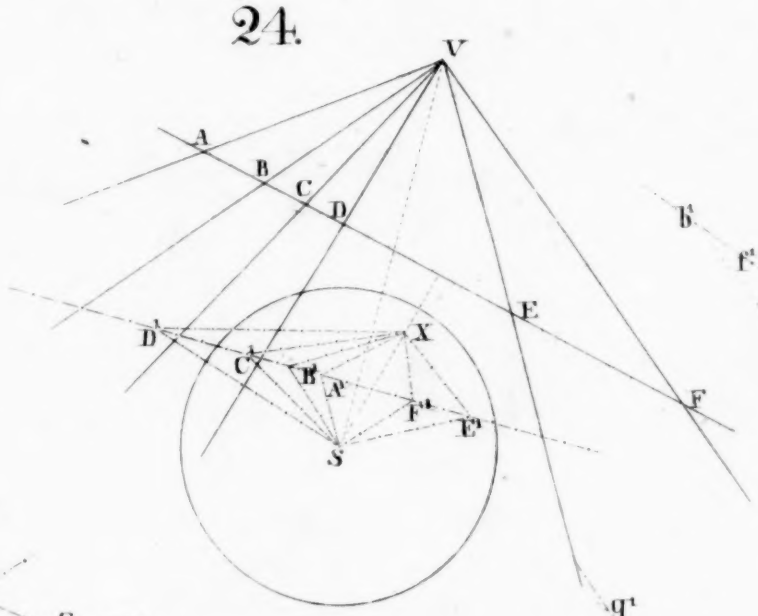
22.



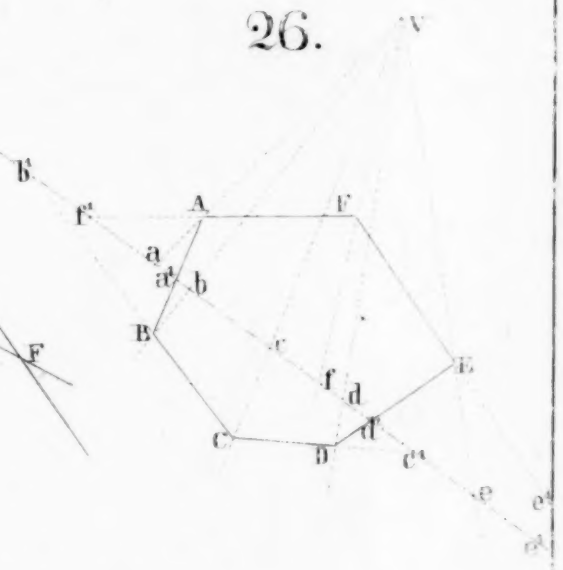
23.



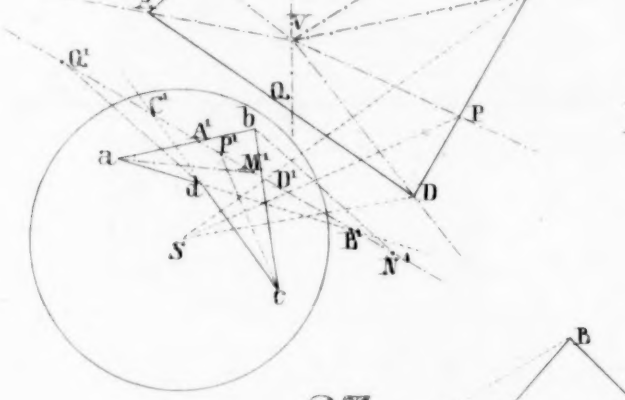
24.



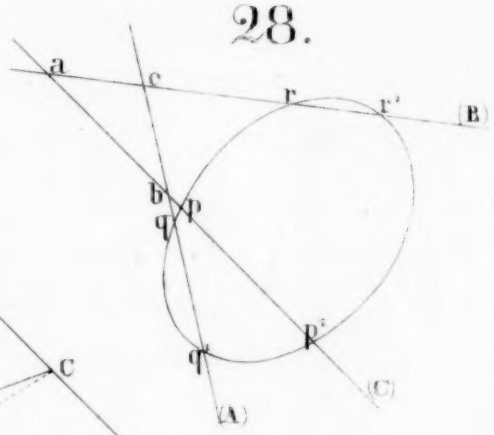
26.



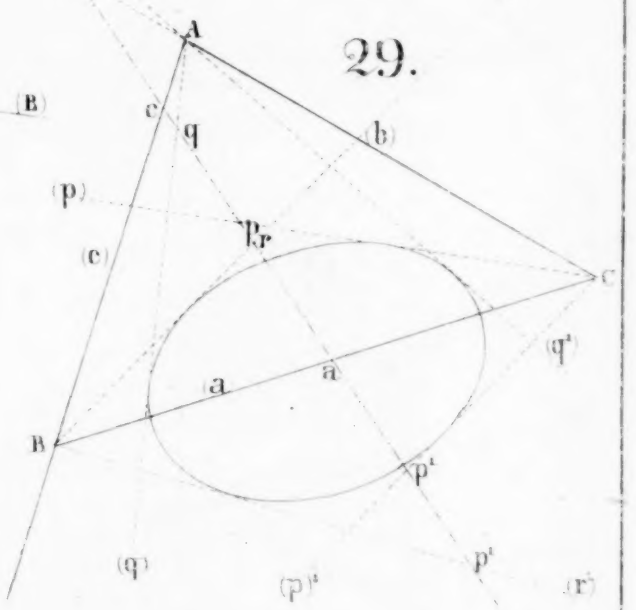
25.



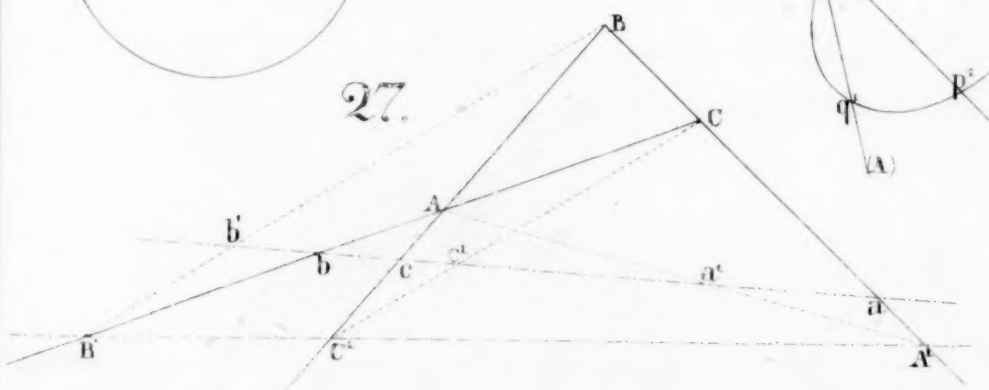
28.



29.

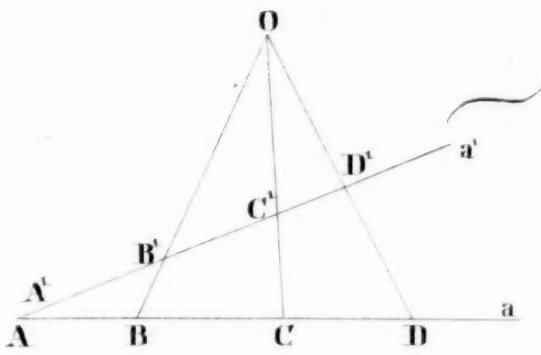


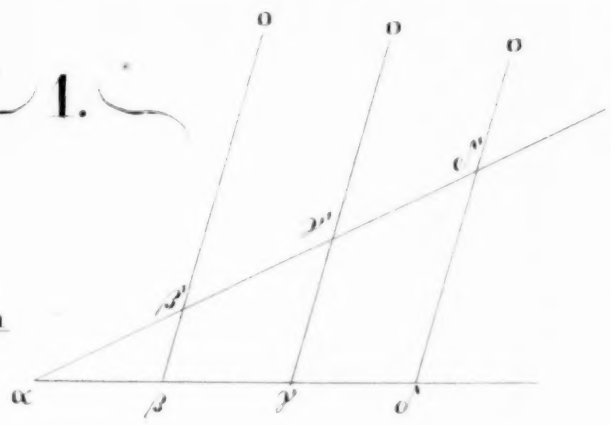
27.



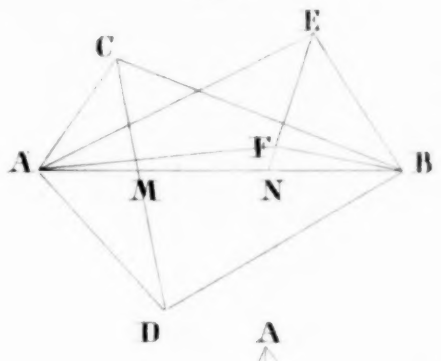
Taf. I.

1.

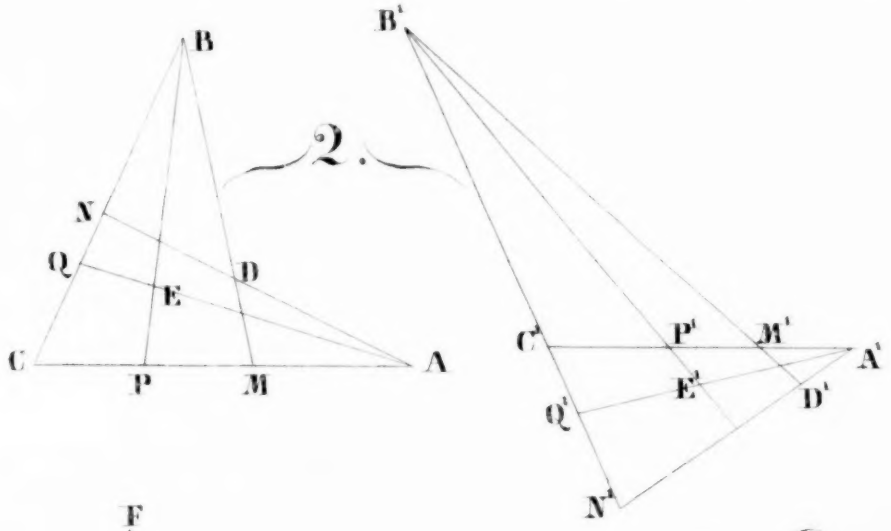




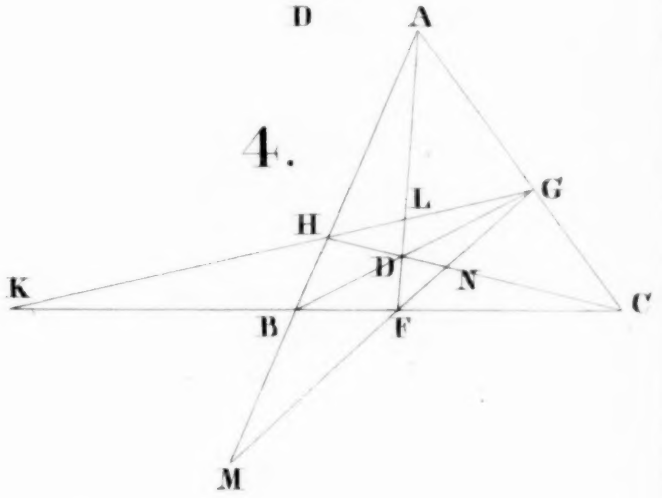
3.



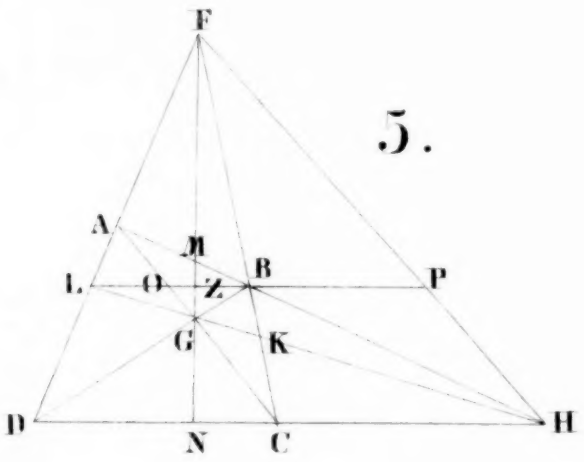
2.



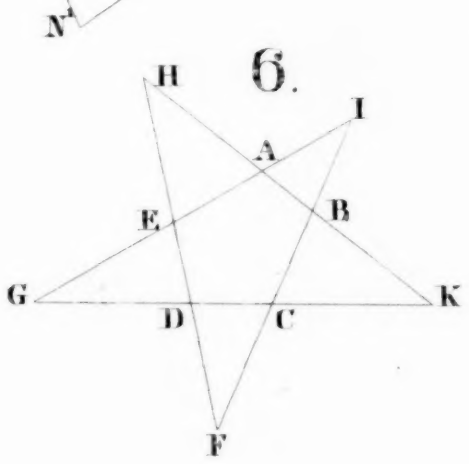
4.



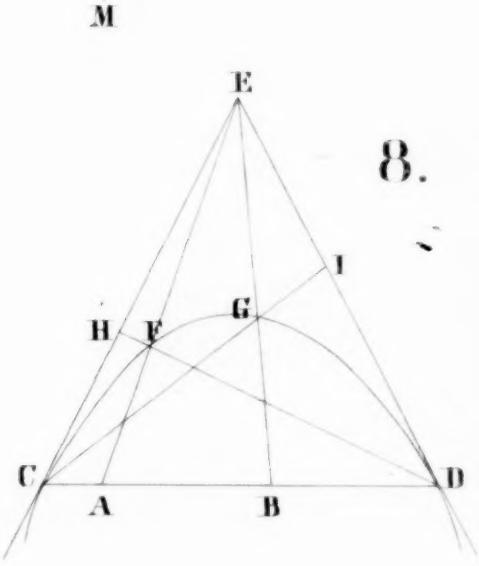
5.



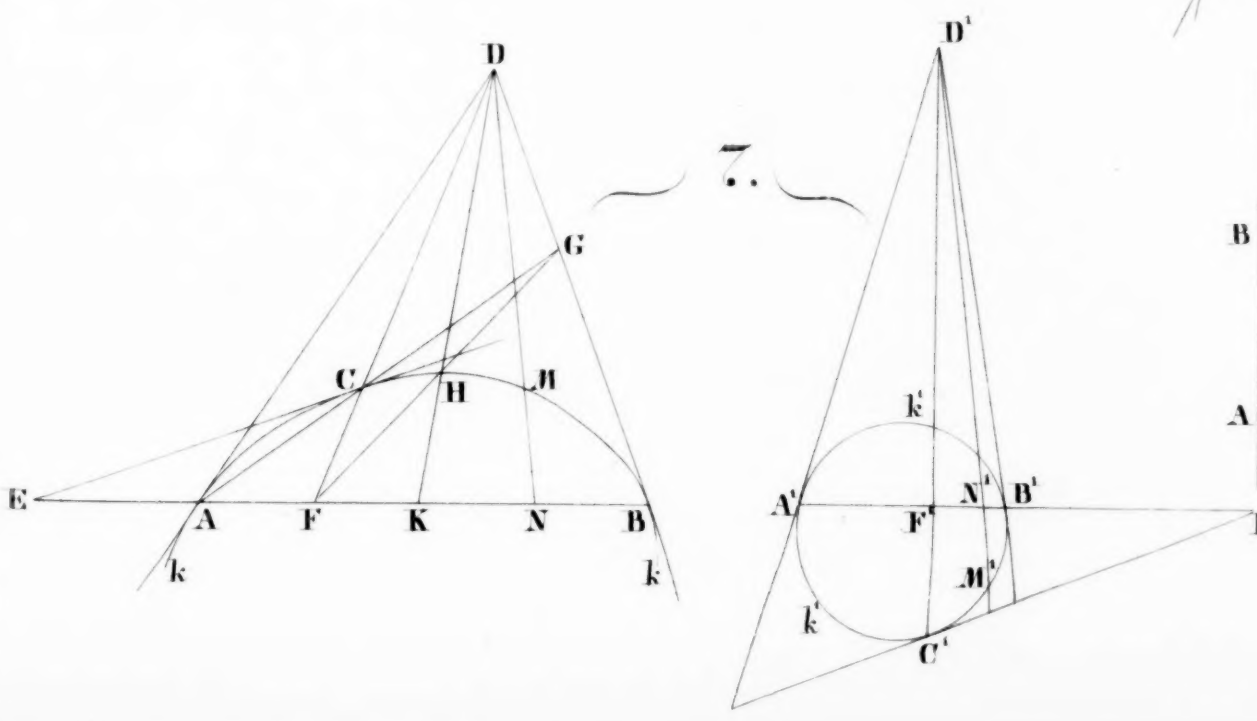
6.



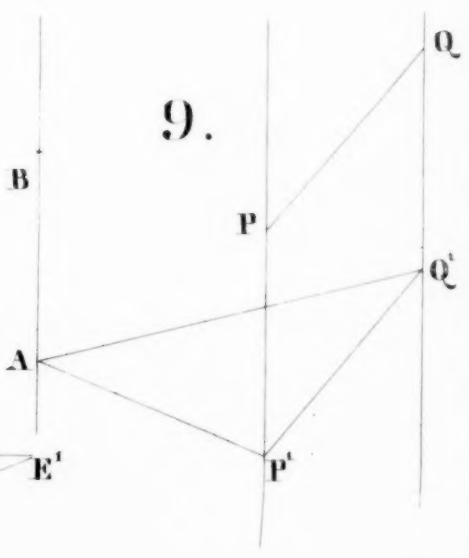
8.



7.

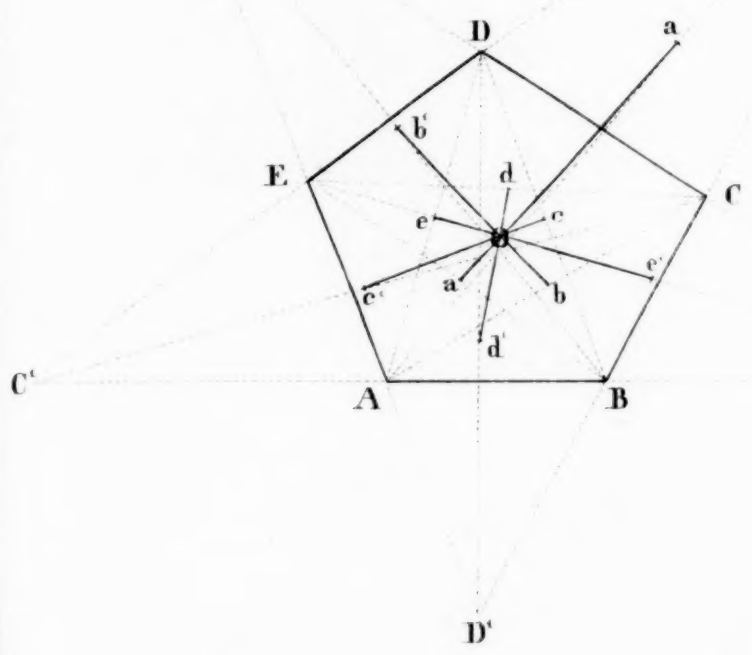


9.

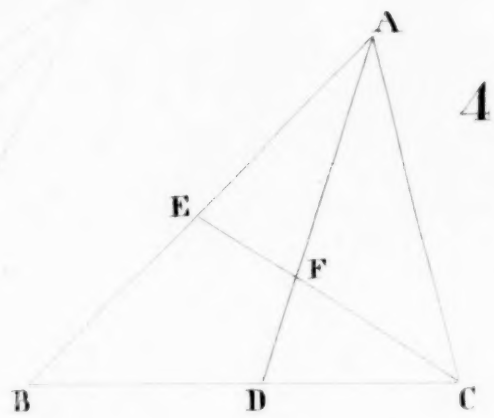


Taf. III.

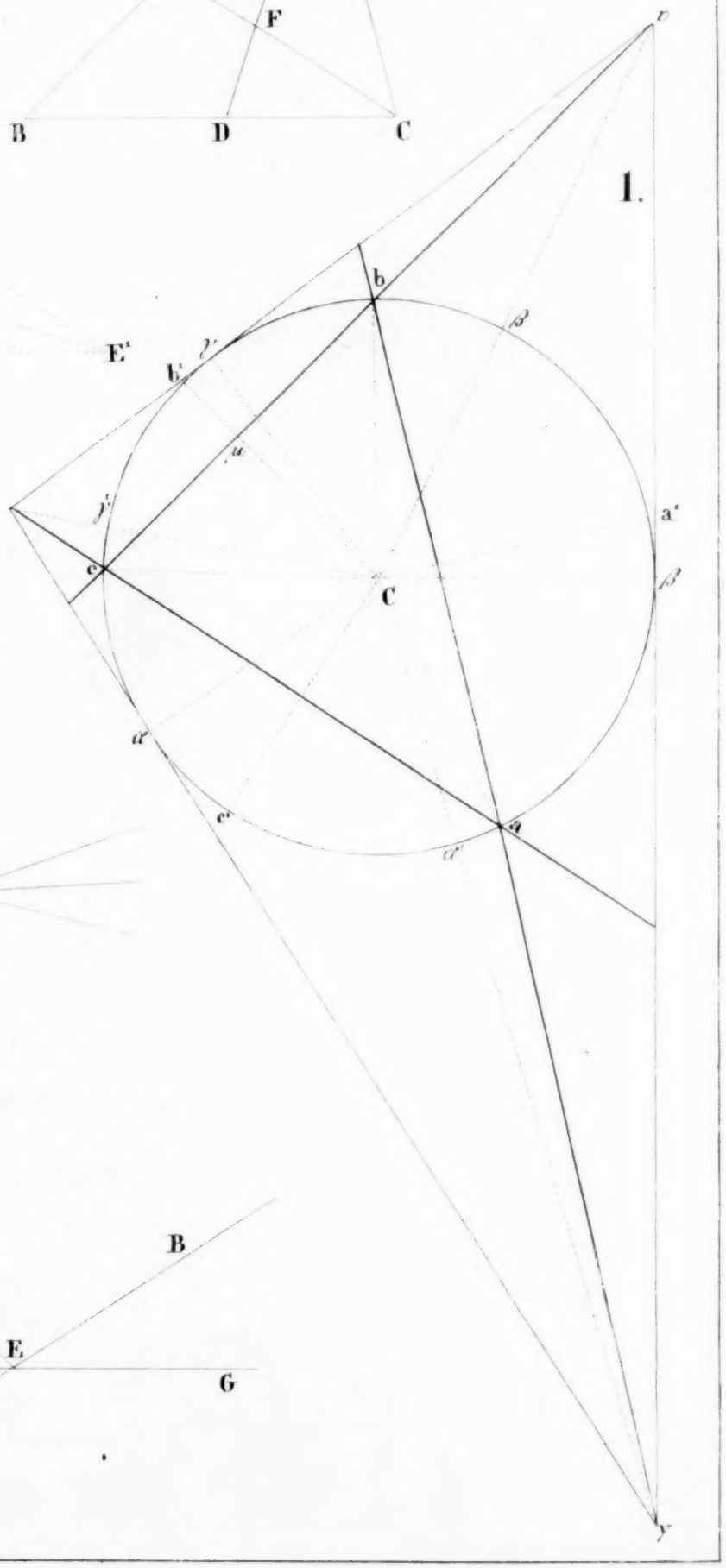
3.



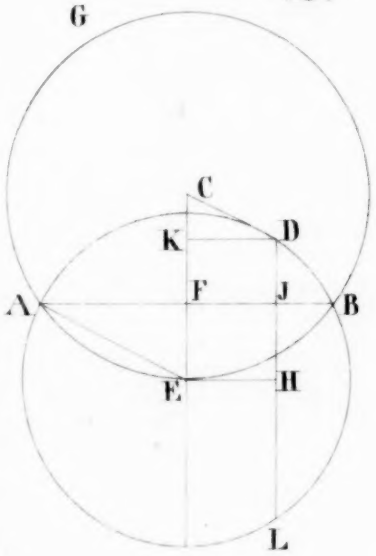
4.



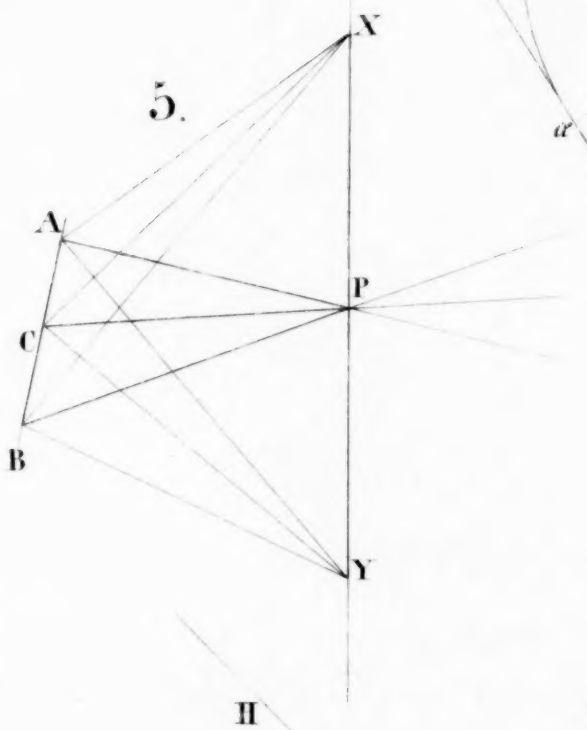
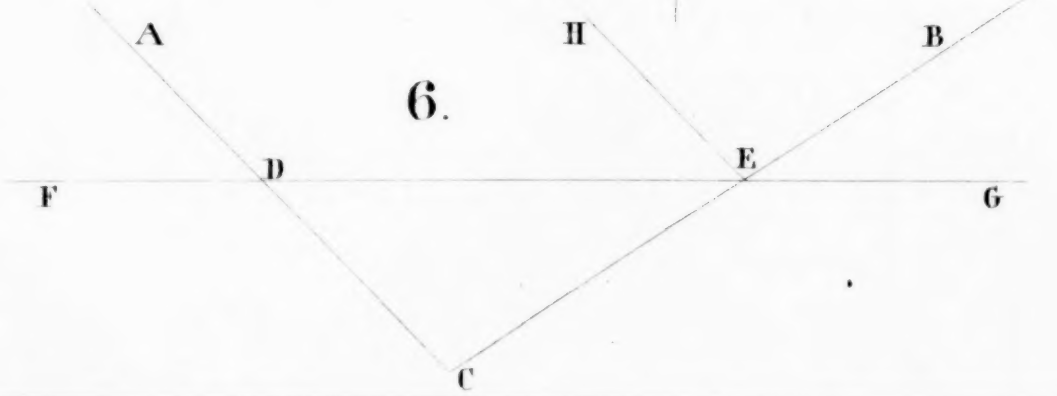
1.



2.



5.



6.